বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট ভর্তি পরীক্ষার সহায়ক Text Book.

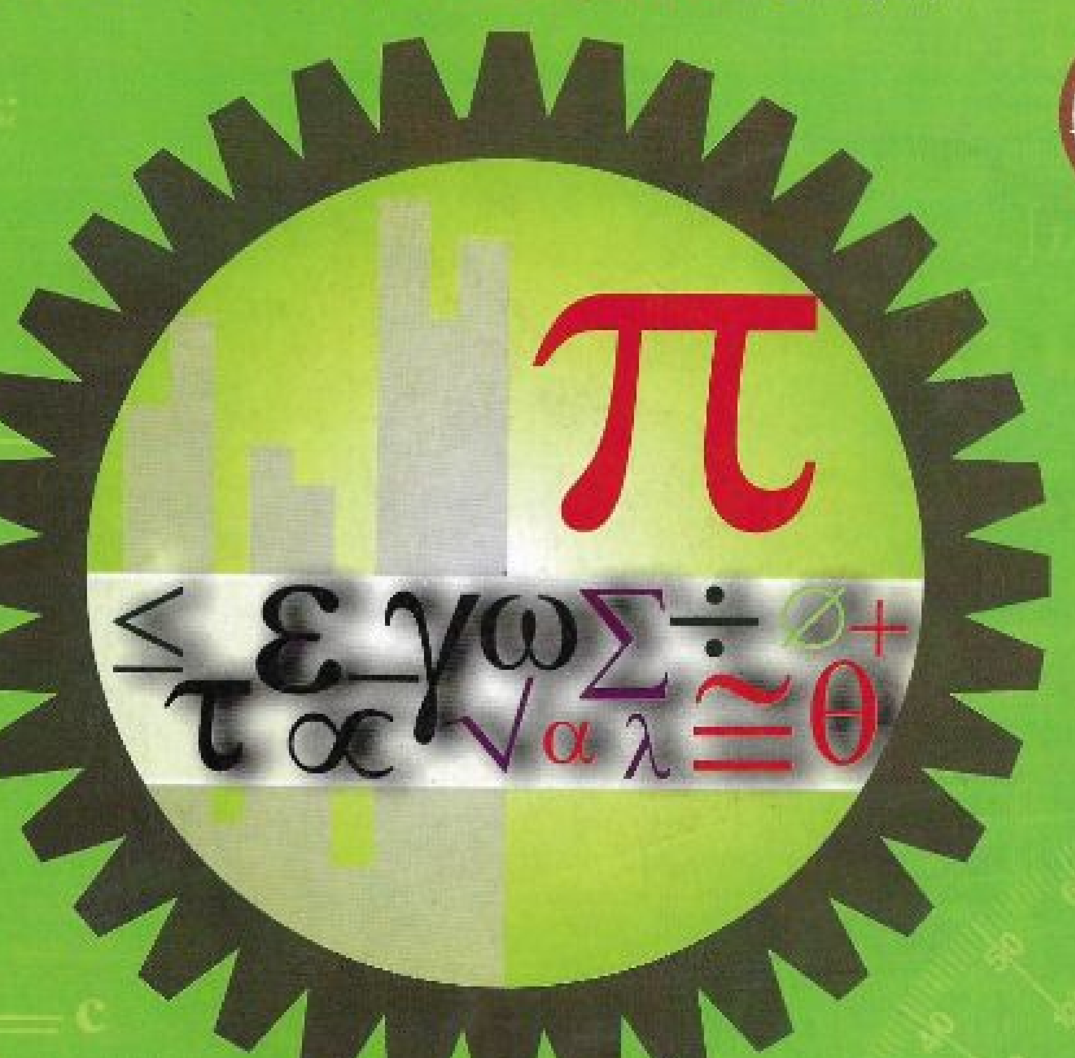
জয়কলি
বুয়েট সিরিজ

গাণিতিক সমস্যাবলির সহজ ও দ্রুত সমাধানের জাদুকরী বই

বুয়েট গণিত

গণিত [১ম ও ২য় পত্র]

বুয়েট গণিত-সকল Text Book-এর সমন্বয়ে শর্ট টেকনিক ও অভিনব কৌশলের আলোকে রচিত বাজারের একমাত্র বই যা থেকে প্রায় শতভাগ প্রশ্ন কমনের নিশ্চয়তা প্রদান। বইটি সংগ্রহে থাকলে ভর্তি পরীক্ষার জন্য অন্য কোন বই, নোট, গাইড বা শিট-এর প্রয়োজন হয় না।



সাফ কথা : বুয়েট-কুয়েট-রুয়েট ভর্তি পরীক্ষার জন্য বুয়েট গণিত-এর চেয়ে ভালো মানের বই আজও প্রকাশিত হয়নি, হয়েছে প্রমাণ করতে পারলে তাকে লক্ষ টাকা পুরস্কার দেয়া হবে।
মানি ব্যাক : বইটি থেকে প্রায় ১০০% প্রশ্ন কমন না পড়লে সম্পূর্ণ টাকা ফেরত দেয়া হবে।
প্রশ্ন কমন'১৭ : বুয়েটে- ২০/২০টি প্রশ্ন কমন পড়েছে। প্রমাণ দেখুন- কভার ব্যাক।

JOYKOLY
PUBLICATIONS LTD.

বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট ভর্তি পরীক্ষার সহায়ক Text Book.

বুয়েট গণিত

[১ম ও ২য় পত্র]

রচনায়

মো. শফিকুর রহমান ME, BUET
অর্নব ঘোষ EEE, BUET
মেহেদী হাসান CSE, BUET
সোহানুর রহমান প্রিন্স WRE, BUET
মোঃ মেহেদী হাসান Civil, BUET
অর্ণব সাহা EEE, BUET
সাঈদ হাসান EEE,BUET
নাজমুস সাআদাত আস-সাকিব EEE, BUET

সম্পাদনা পর্ষদ

সমীর পাল- ChE, BUET
সালাউদ্দিন আহমেদ- NAME, BUET
লিটন রায়- ChE, BUET
ইমরান হোসেন- ChE, BUET
আবু সালেহ তুহিন- ME, BUET
সোহেল- EEE, BUET

সম্পাদনা সহযোগী

মোঃ মহিউদ্দীন সুমন- EEE, BUET
মামুন সরকার- BUTex
আশিকুর রহমান- CSE, BUET
শাহরিয়ার রিফাত- EEE, BUET
শোভন- EEE, BUET
তুষার- CSE, KUET
রিফাত- CSE, DU
আবেশ- EEE, BUET
তীর্থ- ChE, BUET
হাফিজুর রহমান- EEE, BUET

প্রয়োজনে: ০১৬৭৮ ৩৪৩৪৫১

প্রধান সম্পাদক

অজয় সরকার

প্র কা শ না য়

JOYKOLY PUBLICATIONS LTD.

১০৯, গ্রিনরোড, ফার্মগেট, ঢাকা- ১২১৫

☎ ৯১৩২৭৭৮ ০১৬৭৮-৩৪৩৪৩৫-৩৬

Web www.joykoly.com E-mail info@joykoly.com joykoly

উৎসর্গ

শ্রদ্ধেয় বাবা ও মা'কে

প্রকাশক	: অজয় সরকার
গ্রন্থস্বত্ব	: প্রকাশক কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত
প্রকাশকাল	
১ম প্রকাশ	: জুলাই ২০১২
৭ম সংস্করণ	: মে ২০১৮
প্রচ্ছদ ডিজাইন	: মোঃ সানোয়ার হোসেন
বর্ণ বিন্যাস	: জয়কলি কম্পিউটার, ১০৯, গ্রিনরোড, ফার্মগেট, ঢাকা- ১২১৫
মুদ্রণ	: জয়কলি প্রেস, পাড়াডগার-১৩৬২, ডেমরা, ঢাকা।

মূল্য: ৬০০ (ছয়শত) টাকা মাত্র।

লেখকবৃন্দের কথা

সুপ্রিয় ছাত্র-ছাত্রীবৃন্দ,

আন্তরিক শুভেচ্ছা নিও। সুদীর্ঘ ১২টি বছর নিরলস পরিশ্রম ও অবিরাম প্রচেষ্টায় ইতোমধ্যে মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষার সিঁড়ি ডিঙিয়ে তোমাদের চোখে-মুখে আজ হাজারো স্বপ্নের আনাগোনা। উচ্চতর শিক্ষা গ্রহণের পূর্বে তোমাদের সামনে অপেক্ষারত ইঞ্জিনিয়ারিং ভর্তি পরীক্ষা নামক বিশাল প্রতিবন্ধকতা যা অনেকটা হিমালয় পর্বত জয় করার মতো। এজন্য তোমাদেরকে হতে হবে প্রচন্ড উদ্যমী, অধ্যবসায়ী, পরিশ্রমী এবং দৃঢ়চেতা। আর তোমাদের এই প্রচেষ্টাকে সফল রূপদানের জন্য প্রয়োজন একজন আদর্শ সহচর, যে তোমাদেরকে সদা-সর্বদা বন্ধুর মতো পাশে থেকে সঠিক দিক-নির্দেশনা দিয়ে নিয়ে যাবে কাঙ্ক্ষিত লক্ষ্যে। এই প্রতিযোগিতায় অনেক মেধাবী ছাত্র-ছাত্রীও ব্যর্থ হয় শুধুমাত্র ভর্তি পরীক্ষার জন্য যথাযথ কৌশল প্রয়োগে সুপরিপক্ক না হওয়ায় এবং নির্ভরযোগ্য ও সঠিক তথ্যসংবলিত নির্ভুল বইয়ের অভাবে। তাই এই লক্ষ্য অর্জনে একমাত্র সহায়ক বই হিসেবে ভূমিকা পালন করবে বুয়েট-গণিত।

পরীক্ষার্থী হিসেবে ইঞ্জিনিয়ারিং ভর্তি পরীক্ষা দিতে এসে এবং ভর্তি পরীক্ষার জন্য একটি মানসম্পন্ন ও নির্ভরযোগ্য গাইড বইয়ের তীব্র অভাব অনুভব করেছি। অবশেষে আমাদের শিক্ষক জীবনের বাস্তব অভিজ্ঞতা, অসংখ্য ছাত্র-ছাত্রী ও শুভানুধ্যায়ীদের সহযোগিতা এবং প্রকাশকের অনুপ্রেরণায় ভর্তি পরীক্ষার উপযোগী বুয়েট-গণিত বইটি রচনা ও এর উৎকর্ষ সাধনে যথাসাধ্য চেষ্টা করেছি। আমাদের দৃঢ় বিশ্বাস বইটি বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট ভর্তিচ্ছু ছাত্র-ছাত্রীদের চাহিদা পূরণে ১০০% সহায়ক ভূমিকা পালন করবে।

২০১৪-২০১৫ শিক্ষাবর্ষ থেকে বুয়েট ভর্তি পরীক্ষার পদ্ধতিতে পরিবর্তন সাধিত হয়েছে। নতুন নিয়ম অনুযায়ী গণিত, পদার্থবিজ্ঞান ও রসায়ন বিষয়ে ২০০ নম্বর করে মোট ৬০০ নম্বরের Written পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়। বুয়েট-গণিত বইটি নতুন পদ্ধতি অনুযায়ী রচিত হয়েছে। বুয়েটের ভর্তি পরীক্ষায় একাধিক লেখকের গ্রন্থাবলী বইয়ের আলোকে প্রশ্ন করা হয়। একজন শিক্ষার্থীর পক্ষে স্বল্প সময়ে অনেক লেখকের বই সংগ্রহ করে তা একই সাথে সমন্বয় করে পড়া সম্ভব নয়। শিক্ষার্থীদের এসব সমস্যার কথা চিন্তা করে দেশি লেখকবৃন্দের (তাহমিনা, মনিরুজ্জামান, কেতাব, নাসির, হাফিজুর, হারুনুর, জব্বার, এ জেড, জাকারিয়া, এস ইউ আহমেদ স্যার রচিত) গণিত বইয়ের সমন্বয়ে বুয়েট-গণিত বইটি রচিত হয়েছে। তাই আমরা মনে করি, ভর্তি পরীক্ষার জন্য বুয়েট-গণিত বইটির পাশাপাশি যেকোনো লেখকের একটি Text Book-ই যথেষ্ট।

১৯৯৪ সাল থেকে বর্তমান সাল পর্যন্ত বিগত সকল বর্ষের বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট প্রশ্নসমূহ অধ্যায়ভিত্তিক বণ্টন এবং প্রশ্নগুলো সহজ ও শর্টকাট নিয়মে সমাধান করা হয়েছে। বইটির প্রতিটি অধ্যায় নিম্নোক্তভাবে সাজানো হয়েছে-

১. এক নজরে সংশ্লিষ্ট অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি
২. এক নজরে সংশ্লিষ্ট অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি (ব্যাখ্যা ও উদাহরণসহ)
৩. সংশ্লিষ্ট অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে বিশেষ Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা (প্রতিটি Type Practice সংবলিত)
৪. অধ্যায়ভিত্তিক বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট-এর বিগত সালের প্রশ্নের সমাধান (Written & MCQ)
৫. ভর্তি পরীক্ষার জন্য সম্ভাব্য প্রশ্নাবলি Self Test (Written & MCQ)
৬. প্রশ্নব্যাংক- (বিগত ২৩ বছরের বুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও রুয়েট-এর প্রশ্নাবলি-সমাধানসহ)

উল্লেখ্য, বুয়েট-গণিত বইটির মতো এতো সুন্দর করে উপস্থাপন ও সাজানো-গোছানো গণিত বই বাংলাদেশে আজও প্রকাশিত হয়নি

যে সকল শিক্ষক ও বুয়েট ভর্তি কোচিং-এর পরিচালকবৃন্দ আমাদেরকে সার্বক্ষণিক সহায়তা করেছেন তাঁদের প্রতি কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করছি। বইটির নির্ভুল মুদ্রণে শতভাগ আন্তরিক ও সতর্ক থাকা সত্ত্বেও Equation জনিত মুদ্রণ কাজের সমস্যার কারণে কিছু ত্রুটি থাকতে পারে। এই অনিচ্ছাকৃত ত্রুটি পাঠকমহলকে ক্ষমাসুন্দর দৃষ্টিতে দেখতে সবিনয় অনুরোধ করছি। পরবর্তী সংস্করণে এসব ত্রুটিমুক্ত এবং বইটির আরও মানোন্নয়ন করার প্রতিশ্রুতি রইল। বইটির উৎকর্ষ সাধনে পাঠকমহলের যেকোনো পরামর্শ, উপদেশ ও গঠনমূলক সমালোচনা সাদরে গৃহীত হবে।

পরিশেষে উচ্চতর শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে ভর্তিতে সাফল্যের শতভাগ ফুল ফুটুক এবং সুন্দরের সবটুকু একাত্ম হোক তোমাদের প্রচেষ্টার সাথে- এটাই আমাদের প্রত্যাশা।

লেখকবৃন্দ

প্রকাশকের কথা

মানুষের মতো মানুষ হবে!
সন্তান একদিন ইঞ্জিনিয়ার হবে!!
স্বপ্ন পূরণের এক কঠিন ধাপে তীব্র প্রতিযোগিতামূলক ইঞ্জিনিয়ারিং ভর্তি পরীক্ষায় নিজেকে উত্তম প্রতিযোগী হিসেবে গড়ে তুলতে পাঠ সহায়ক হিসেবে উত্তম বইয়ের কোনো বিকল্প নেই।

দুঃখজনক হলেও একথা সত্য যে, বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট ভর্তি পরীক্ষার জন্য গণিত বিষয়ের কোনো পূর্ণাঙ্গ গাইড বই বাজারে নেই বিধায় ছাত্র-ছাত্রীরা ভর্তি পরীক্ষাসমূহে ভালো ফলাফল অর্জন করতে পারছে না। তাই কোমলমতি শিক্ষার্থীদের কথা চিন্তা করে সচেতন অভিভাবকদের প্রিয় সন্তানের স্বপ্ন পূরণে ইঞ্জিনিয়ারিং ভর্তির জন্য একটি ভালো বইয়ের অভাব পূরণের জন্য আমার এই ক্ষুদ্র প্রয়াসের বুয়েট গণিত বইটি প্রকাশিত হল, যা বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট ভর্তি পরীক্ষার জন্য এক মাইলফলক হিসেবে স্মরণীয় হয়ে থাকবে। আমার দৃঢ় বিশ্বাস বুয়েট-গণিত বইটি বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট-রুয়েট ভর্তি পরীক্ষার গণিত বিষয়ে শতভাগ সহায়ক ভূমিকা পালন করবে।

পরিমার্জিত, পরিপূর্ণ ও নির্ভুল বুয়েট গণিত বইটি শিক্ষার্থীদের হাতে তুলে দেওয়ার প্রয়াসে আমি বুয়েটের কিছু শুভানুধ্যায়ী শ্রদ্ধেয় শিক্ষক এবং বুয়েট ভর্তি কোচিং সেন্টারের অভিজ্ঞ শিক্ষকবৃন্দের পরামর্শ অনুযায়ী বইটি সম্পাদনা করেছি। শ্রদ্ধেয় শিক্ষকবৃন্দ তাদের অভিজ্ঞতার আলোকে বিভিন্ন মতামত ও সুপরামর্শ দিয়ে বইটির সার্বিক উন্নয়নে যে অবদান রেখেছেন সে জন্য আমি চিরকৃতজ্ঞ। বইটি সম্পর্কে আমি সবচেয়ে বেশি আশাবাদী এ কারণে- বুয়েটের অভিজ্ঞ শিক্ষকমণ্ডলী ও বুয়েট ভর্তি কোচিং সেন্টারের পরিচালক ও শিক্ষকবৃন্দের অভিমত, বুয়েট গণিত বইটি বুয়েট-কুয়েট-চুয়েট- রুয়েট ভর্তিচ্ছু ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য একটি চমৎকার ও নির্ভরযোগ্য বই। বুয়েট গণিত বইটি সকল ইঞ্জিনিয়ারিং ভর্তি পরীক্ষার গণিত বিষয়ের প্রায় সকল প্রশ্নের উত্তর প্রদানে ১০০% সক্ষম হবে।

পাঠকের হাতে নির্ভুলভাবে বইটি তুলে দেওয়ার যথাসাধ্য চেষ্টা করেছি। তবুও বইটিতে যদি কোনো ভুলভ্রান্তি থাকে তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করা হবে। বইটি প্রকাশের সময় আমাদের অজ্ঞাতসারে যদি কোনো ভুলভ্রান্তি থেকে থাকে তা পাঠকসমাজকে ক্ষমাসুন্দর দৃষ্টিতে দেখতে সবিনয় অনুরোধ করছি। বুয়েট গণিত বইটির উৎকর্ষ সাধনে আপনাদের যেকোনো পরামর্শ ও সুচিন্তিত মতামত সাদরে গৃহীত হবে। বইটি যদি শিক্ষার্থীদের কিঞ্চিৎ উপকার বয়ে আনে সেটাই হবে আমার এ ক্ষুদ্র প্রয়াসের পরম সার্থকতা।

অজয় সরকার

সূচিপত্র

বুয়েট গণিত: ১ম পত্র

অধ্যায়	পৃষ্ঠা নং
১ম অধ্যায়- ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক	০৯
A-ম্যাট্রিক্স	০৯
B-নির্ণায়ক	২৩
২য় অধ্যায়- ভেক্টর	৩৪
৩য় অধ্যায়- সরলরেখা	৫৮
স্থানাঙ্ক ও সঞ্চারপথ: [১ম অংশ (3.1-3.4)]	৫৮
সরলরেখার সমীকরণ: [২য় অংশ (3.5)]	৬৬
সরলরেখার সমীকরণ: [৩য় অংশ (3.6)]	৭২
সরলরেখার সমীকরণ: [৪র্থ অংশ (3.7)]	৭৬
৪র্থ অধ্যায়- বৃত্ত	৮৩
বৃত্ত (A)	৮৬
বৃত্ত (B)	৯৫
৫ম অধ্যায়- বিন্যাস ও সমাবেশ	১০৫
বিন্যাস	১০৫
সমাবেশ	১১৭
৬ষ্ঠ অধ্যায়- ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১২৯
৭ম অধ্যায়- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১৩৫
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (A)	১৩৫
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (B)	১৩৭
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (C)	১৩৯
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (D)	১৪১
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (E)	১৪৩
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (F)	১৪৬
সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (G)	১৪৮
৮ম অধ্যায়- ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র	১৬৭
৯ম অধ্যায়- অন্তরীকরণ	১৭৯
Limit [১ম অংশ]	১৭৯
অন্তরীকরণের সাধারণ সূত্র [২য় অংশ]	১৮৯
পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ [৩য় অংশ]	২০২
অন্তরীকরণের প্রয়োগ [৪র্থ অংশ]	২১১
১০ম অধ্যায়- যোগজীকরণ	২২৫
অনির্দিষ্ট যোগজীকরণ [১ম অংশ (1.1-1.4)]	২২৫
নির্দিষ্ট যোগজ: [২য় অংশ (1.5)]	২৫৪
নির্দিষ্ট যোগজের প্রয়োগ: [৩য় অংশ (1.6)]	২৬৯

বুয়েট গণিত: ২য় পত্র

অধ্যায়	পৃষ্ঠা নং
১ম অধ্যায়- বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা	২৭৮
২য় অধ্যায়- যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং	২৮৩
৩য় অধ্যায়- জটিল সংখ্যা	২৮৭
৪র্থ অধ্যায়- বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ	২৯৯
বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ (A)	৩০২
বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ (B)	৩০৬
৫ম অধ্যায়- দ্বিপদী বিস্তৃতি	৩১৫
৬ষ্ঠ অধ্যায়- কণিক	৩২৩
কণিক-A (পরাবৃত্ত)	৩২৩
কণিক-B (উপবৃত্ত)	৩৩১
কণিক-C (অধিবৃত্ত)	৩৪০
৭ম অধ্যায়- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ	৩৪৬
বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	৩৪৬
ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ	৩৫৭
৮ম অধ্যায়- স্থিতিবিদ্যা	৩৬৬
[১ম অংশ (A+B)] সমবিন্দু বল	৩৬৬
[১ম অংশ (A)]	৩৬৭
[১ম অংশ (B)]	৩৭৩
[২য় অংশ] সমান্তরাল বলজোট	৩৮৬
৯ম অধ্যায়- গতিবিদ্যা	৪০৪
সমতলে বস্তুকণার গতি	৪০৪
ত্বরণ	৪১৪
অভিকর্ষজ ত্বরণ	৪২২
প্রাস	৪২৮
বিবিধ অধ্যায়	৪৩৭
১০ম অধ্যায়	৪৩৮
A-বিস্তার পরিমাপ	৪৩৮
B-সম্ভাবনা	৪৪৫
আংশিক ভগ্নাংশ	৪৫৬
প্রশ্নব্যাংক	৪৫৭

সহায়ক গ্রন্থাবলি

কৃতজ্ঞতা স্বীকার ও রেফারেন্স বুক

- বুয়েট গণিত ১ম ও ২য় পত্রে নিম্নে উল্লেখিত লেখকগণের বইসমূহের তথ্য সংকলিত হয়েছে। এজন্য 'জয়কলি বুয়েট সিরিজ' পরিবার তথা জয়কলি পাবলিকেশন্স তাঁদের নিকট চিরকৃতজ্ঞ।
- ছাত্র-ছাত্রীদের সুবিধার কথা বিবেচনায় এবং বইটিতে স্থানাভাবের কারণে নিম্নোক্তভাবে সম্মানিত লেখকগণের মধ্য থেকে একজনের নাম রেফারেন্স হিসেবে সংক্ষিপ্তাকারে উল্লেখ করতে হয়েছে। এজন্য আমরা আন্তরিকভাবে দুঃখিত।
- আশা করি সম্মানিত লেখকগণ বিষয়টিকে ক্ষমাসুন্দর দৃষ্টিতে দেখবেন।

গণিত: ১ম পত্র

নং	সম্মানিত লেখকগণের নাম	রেফারেন্স
১	✍ হাবিবুর রহমান আকন্দ ✍ মোঃ গিয়াস উদ্দিন ✍ প্রবীর রায়	[Ref: গিয়াস]
২	✍ মোঃ নজরুল ইসলাম ✍ মোঃ কেতাব উদ্দীন	[Ref: কেতাব]
৩	✍ এস. ইউ. আহাম্মদ ✍ এম এ জব্বার	[Ref: জব্বার]
৪	✍ রফিকুল ইসলাম ✍ হাবিবুর রহমান ✍ কাজী কামরুজ্জামান ✍ মিজানুর রহমান সরকার ✍ কাজল কান্তি দাস ✍ ড.মো. শেখ ফরিদ	[Ref: রফিকুল]
৫	✍ অসীম কুমার সাহা ✍ মোঃ নুরুল ইসলাম ✍ প্রফেসর ড. বি. এম. ইকরামুল হক	[Ref: অসীম]
৬	✍ প্রফেসর ইলিয়াস হোসেন ✍ হাফিজুর রহমান ✍ মহিদুল ইসলাম ✍ মনিরুল ইসলাম	[Ref: হাফিজুর]
৭	✍ হারুনুর রশীদ	[Ref: হারুনুর]
৮	✍ আহসান উল্লাহ ✍ তাহমিনা বেগম	[Ref: তাহমিনা]
৯	✍ নাসির হোসেন ✍ জাকির হোসেন ✍ আমিনুল ইসলাম তিতাস	[Ref: নাসির]
১০	✍ ড.এ.জেড. খান	[Ref: এ.জেড]
১১	✍ জাকারিয়া তৌহিদ ✍ প্রকৌ. মোঃ মেহেদী হাসান ✍ এ.টি. এম আসাদুজ্জামান ✍ প্রকৌ. মু: রেজাউল করিম	[Ref: জাকারিয়া]
১২	✍ ধীরাজ মোহন মণ্ডল	[Ref: ধীরাজ]
১৩	✍ কালিপদ দাস	[Ref: কালিপদ]
১৪	✍ ড. পেয়ার আহম্মেদ	[Ref: পেয়ার]
১৫	✍ মোঃ মনিরুজ্জামান	[Ref: মনিরুজ্জামান]
১৬	✍ মকবুল হোসেন ✍ নুরুল আলম খান ✍ শাহজাহান ✍ কামাল হোসেন ✍ আমিরুল ইসলাম	[Ref: মকবুল]

গণিত: ২য় পত্র

নং	সম্মানিত লেখকগণের নাম	রেফারেন্স
১	✍ হাবিবুর রহমান আকন্দ ✍ মোঃ গিয়াস উদ্দিন ✍ প্রবীর রায়	[Ref: গিয়াস]
২	✍ মোঃ নজরুল ইসলাম ✍ মোঃ কেতাব উদ্দীন	[Ref: কেতাব]
৩	✍ এস. ইউ. আহাম্মদ ✍ এম এ জব্বার	[Ref: জব্বার]
৪	✍ রফিকুল ইসলাম ✍ হাবিবুর রহমান ✍ কাজী কামরুজ্জামান ✍ মিজানুর রহমান সরকার ✍ কাজল কান্তি দাস ✍ ড.মো. শেখ ফরিদ	[Ref: রফিকুল]
৫	✍ অসীম কুমার সাহা ✍ মোঃ নুরুল ইসলাম ✍ প্রফেসর ড. বি. এম. ইকরামুল হক	[Ref: অসীম]
৬	✍ প্রফেসর ইলিয়াস হোসেন ✍ হাফিজুর রহমান ✍ মাইদুল ইসলাম ✍ মনিরুল ইসলাম	[Ref: হাফিজুর]
৭	✍ হারুনুর রশীদ	[Ref: হারুনুর]
৮	✍ আহসান উল্লাহ ✍ তাহমিনা বেগম	[Ref: তাহমিনা]
৯	✍ নাসির হোসেন ✍ জাকির হোসেন ✍ আমিনুল ইসলাম তিতাস	[Ref: নাসির]
১০	✍ ড.এ.জেড. খান	[Ref: এ.জেড]
১১	✍ জাকারিয়া তৌহিদ ✍ প্রকৌ. মোঃ মেহেদী হাসান ✍ এ.টি. এম আসাদুজ্জামান ✍ প্রকৌ. মু: রেজাউল করিম	[Ref: জাকারিয়া]
১২	✍ ধীরাজ মোহন মণ্ডল	[Ref: ধীরাজ]
১৩	✍ কালিপদ দাস	[Ref: কালিপদ]
১৪	✍ ড. পেয়ার আহম্মেদ	[Ref: পেয়ার]
১৫	✍ মোঃ মনিরুজ্জামান	[Ref: মনিরুজ্জামান]
১৬	✍ মকবুল হোসেন ✍ নুরুল আলম খান ✍ শাহজাহান ✍ কামাল হোসেন ✍ আমিরুল ইসলাম	[Ref: মকবুল]

১ম অধ্যায়
প্রথম পত্র

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক (Matrix & Determinants)

A-ম্যাট্রিক্স

গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

তথ্য পরিবেশনে গণিতশাস্ত্র এক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করে সংক্ষেপে এবং সহজে তথ্য বর্ণনা করা যায়। ধরা যাক একটি দোকানে তিন প্রকারের ধারণক্ষমতাবিশিষ্ট বোতলে বিভিন্ন প্রকারের ঠান্ডা পানীয় বিক্রয় করা হয়। ঐ দোকানে বিভিন্ন আকারের বিভিন্ন পানীয় কোনো সপ্তাহের প্রথম দিনে মজুদ, তার হিসাব বিবরণ নিম্নে ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

১ লিটার ২লিটার ২.৫ লিটার

কোক, পেপসি, স্প্রাইট, ডাইস: $\begin{bmatrix} 142 & 128 & 115 \\ 130 & 116 & 112 \\ 136 & 120 & 114 \\ 140 & 125 & 110 \end{bmatrix}$, বিক্রয় $\begin{bmatrix} 138 & 120 & 109 \\ 130 & 112 & 110 \\ 132 & 115 & 106 \\ 135 & 120 & 107 \end{bmatrix}$

সপ্তাহান্তে মজুদ $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

আবিষ্কার: বৃটিশ গণিতবিদ ক্লে প্রথম ম্যাট্রিক্স আবিষ্কার করেন।

ম্যাট্রিক্স: কতগুলো সংখ্যাকে আয়তাকারে পূর্ণসংখ্যক সারি ও কলামে সাজিয়ে উভয় পাশে বন্ধনী (bracket) দ্বারা আবদ্ধ করলে যদি তা কতগুলো নির্দিষ্ট গাণিতিক প্রক্রিয়াবিধি সিদ্ধ করে তবে তাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়। সাধারণভাবে ম্যাট্রিক্স প্রকাশের জন্য [] ব্রাকেট ব্যবহার করা হয়। তবে || || এবং ( ) ব্রাকেটও ব্যবহার করা হয়। ম্যাট্রিক্স গঠনকারী পদ বা সংখ্যাগুলোকে ভুক্তি বলা হয়। ম্যাট্রিক্সের কোন মান নেই।

ম্যাট্রিক্সের মাত্রা: যদি mn সংখ্যক রাশিকে এমনভাবে আয়তাকারে সাজানো হয় যেন তাতে m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক কলাম থাকে তবে তাকে (m × n) পর্যায়ের ম্যাট্রিক্স বলে এবং তার মাত্রা (m × n) হবে। আবার কোন ম্যাট্রিক্সের n সংখ্যক সারি ও m সংখ্যক কলাম থাকলে তার মাত্রা হবে (n × m)।

মুখ্য কর্ণ ←, → গৌণ কর্ণ, → সারি

যেমন, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

↓ কলাম

ম্যাট্রিক্সের সারি 3 এবং কলাম 3। অতএব, এর মাত্রা বা ক্রম (3× 3) হবে।

বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স

সারি ম্যাট্রিক্স: যে ম্যাট্রিক্সের সারি এক তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বলে।
যেমন: $[1\ \ 2\ \ 3]_{1\times3}$

কলাম ম্যাট্রিক্স: যে ম্যাট্রিক্সের কলাম এক তাকে কলাম ম্যাট্রিক্স বলে।
যেমন: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times1}$

আয়তাকার ম্যাট্রিক্স: যে ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা এবং কলামের সংখ্যা সমান নয় তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times4}$

◆ **বর্গ ম্যাট্রিক্স:** যে ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$

◆ **কর্ণ ম্যাট্রিক্স:** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদানগুলো অশূন্য এবং বাকী উপাদানগুলো শূন্য হয় তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে। যদি $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $a_{ij} = 0$ যখন $i \neq j$। যেমন: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$

◆ **স্কেলার ম্যাট্রিক্স:** যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলো সমান হয় তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে। যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ স্কেলার ম্যাট্রিক্স হয় তবে $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ যদি } i \neq j \\ k \text{ যদি } i = j \end{cases}$

যেখানে k একটি স্কেলার সংখ্যা। যেমন: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

◆ **একক বা অভেদ ম্যাট্রিক্স:** যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলোর মান এক হয় তাকে একক বা অভেদ ম্যাট্রিক্স বলে। যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ একক বা অভেদ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ যদি } i \neq j \\ 1 \text{ যদি } i = j \end{cases}$। যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$

◆ **Singleton ম্যাট্রিক্স:** যে ম্যাট্রিক্সের একটিমাত্র উপাদান থাকে তাকে Singleton ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $[3]_{1\times1}$

◆ **উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স:** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের নিম্নস্থ উপাদানগুলো শূন্য তাকে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে। যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স হয় তবে $a_{ij} = 0$ যখন $i > j$।

যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$

◆ **নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স:** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের উপরস্থ উপাদানগুলো শূন্য তাকে নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে।
যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স হয় তবে $a_{ij} = 0$ যখন $i < j$

যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$

◆ **অনুভূমিক ম্যাট্রিক্স:** যে ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা কলামের সংখ্যার চেয়ে কম হয় তাকে অনুভূমিক ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}_{3\times4}$

◆ **উল্লম্ব ম্যাট্রিক্স:** যে ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা কলামের সংখ্যার চেয়ে বেশি হয় তাকে উল্লম্ব ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}_{4\times3}$

◆ **শুন্য ম্যাট্রিক্স:** যে ম্যাট্রিক্সের সকল উপাদান শুন্য তাকে শুন্য ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$

◆ **উপ-ম্যাট্রিক্স:** কোন ম্যাট্রিক্সের যেকোন সারি বা কলামের সংখ্যা বাদ দিলে নতুন যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তা প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ হলো $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স।

◆ **ম্যাট্রিক্সের ট্রেস:** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদানগুলোর যোগফলকে ম্যাট্রিক্সের ট্রেস বলে। কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর ট্রেস Tr(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন: $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore Tr(A) = 2 + 3 + 4 = 9$

ম্যাট্রিক্সের ট্রেস-এর বৈশিষ্ট্য:

যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ এবং k স্কেলার হয় তবে,

(i) $Tr(kA) = kTr(A)$ (ii) $Tr(A \pm B) = Tr(A) \pm Tr(B)$

(iii) $Tr(AB) = Tr(BA)$ (iv) $Tr(A) = Tr(A^T)$

(v) $Tr(I_n) = N$ (vi) $Tr(AB) \neq Tr(A).Tr(B)$

(vii) $Tr(A) = Tr(CAC^{-1})$

যেখানে C অব্যতিক্রমী n×n আকারের বর্গম্যাট্রিক্স।

◆ **সমতুল্য ম্যাট্রিক্স:** যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এবং $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ সমতুল্য ম্যাট্রিক্স হয় তবে m = p এবং n = q হবে।

যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ এবং $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ সমতুল্য ম্যাট্রিক্স।

◆ **সমান ম্যাট্রিক্স:** যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ এবং $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ সমান ম্যাট্রিক্স হয় তবে (i) m = p এবং n = q (ii) $a_{ij} = b_{ij}$ (সকল i, j- এর জন্য) হবে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ সমান ম্যাট্রিক্স হলে,

a = –1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 এবং f = 1 হবে।

◆ **সমঘাতী ম্যাট্রিক্স:** যদি কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর জন্য $A^2 = A$ হলে A-কে সমঘাতী ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন : $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ সমঘাতী ম্যাট্রিক্স কারণ $A^2 = A.A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

◆ **উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স:** যদি কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর জন্য $A^2 = I$ (যেখানে I অভেদ ম্যাট্রিক্স) হয় তবে A-কে উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স কারণ

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Note: উদঘাতিক ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $A = A^{-1}$

◆ **পর্যায়বৃত্তিক ম্যাট্রিক্স:** যদি কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর জন্য $A^{k+1} = A$ হয় তবে A-কে পর্যায়বৃত্তিক ম্যাট্রিক্স বলে যার মৌলিক পর্যায় k। যদি k = 1 হয় তবে A-কে সমঘাতি ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}_{2\times 2}$ পর্যায়বৃত্তিক ম্যাট্রিক্স যার মৌলিক পর্যায় 4 কারন $A^5 = A$।

◆ **শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স:** যদি কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A-এর জন্য $A^p = 0$ কিন্তু $A^{p-1} \neq 0$ হয় তবে A-কে p-ক্রমের শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স বলে। যেখানে p ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ 3-ক্রমের শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স কারণ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

◆ **বিম্ব ম্যাট্রিক্স:** কোন ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামের উপাদানগুলো বিনিময় কর নতুন যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ঐ ম্যাট্রিক্সের বিম্ব ম্যাট্রিক্স বলে। যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ হয় তবে তার বিম্ব ম্যাট্রিক্সকে A^T বা A' বা A^t দ্বারা প্রক করা হয়। সুতরাং $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ $\therefore A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}_{4\times 3}$

বিম্ব ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

(iii) $(kA)^T = kA^T$ (k যেকোন স্কেলার রাশি)

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

সাধারণ ভাবে $(A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_{n-1}A_n)' = A_n' A'_{n-1} \ldots\ldots A_3' A_2' A_1'$

◆ **প্রতিসম ম্যাট্রিক্স:** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের উপাদানগু বিনিময় করলেও ম্যাট্রিক্সের কোন পরিবর্তন হয় না তাকে প্রতিসম ম্যাট্রি বলে। যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় তবে, $A^T = A$ অর্থাৎ $a_{ij} =$

যেমন: $= \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ $\therefore A^T = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} = A$

Note: (i) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে সর্বোচ্চ বিভিন্ন উপাদান সং $\frac{n(n+1)}{2}$।

(ii) $A + A^T$ সর্বদাই প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি উপাদানসমূহ বাস্তব হয়।

◆ **বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স:** যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের উপাদনগু বিনিময় করার পর (–) চিহ্ন দিয়ে গুন করলেও ম্যাট্রিক্সের কোন পরিবর্তন না তাকে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স তবে, $A^T = -A$ অর্থাৎ $a_{ij} = -a_{ji}$।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 0 & -h & -g \\ h & 0 & -f \\ g & f & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Note: (i) যেকোন বিপ্রতিষম ম্যাট্রিক্সের কর্ন বরাবর সকল উপাদানসমূহ শূ হবে অর্থাৎ ট্রেস সর্বদাই শূন্য হবে।

(ii) $A - A^T$ সর্বদাই বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি উপাদানসমূহ বাস্তব হয়।

প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

(i) যদি A বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে AA' এবং $A'A$ সর্বদাই প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে

(ii) $(A^n)^T = (A^T)^n$ যেখানে $n \in N$

(iii) A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে (a) A^n বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি n বিজোড় হয় এবং (b) A^n প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি n = জোড় হয়।

(iv) যদি A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং B একই মাত্রার বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে – kA, A^T, A^{-1}, BAB^T এবং B^TAB সকলেই প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যেখানে $n \in N$ এবং k প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(v) যদি A এবং B উভয়ই একই মাত্রার প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় তবে

(a) $A \pm B$, $AB + BA$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

(b) $AB - BA$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

(c) AB প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যদি AB = BA হয়।

(vi) যদি A এবং B উভয়ই একই মাত্রার বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় তবে

(a) $A \neq B$, $AB - BA$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

(b) $AB + BA$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

(vii) যদি A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং C কলাম ম্যাট্রিক্স হয় তবে C^TAC শ ম্যাট্রিক্স হবে। যেখানে C^TAC সমতুল্য (conformable) ম্যাট্রিক্স।

লম্বিক ম্যাট্রিক্স: যদি কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিম্ব ম্যাট্রিক্সের সাথে ঐ ম্যাট্রিক্স গুন করলে যদি অভেদ ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তবে তাকে লম্বিক ম্যাট্রিক্স বলে।

যদি $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ লম্বিক ম্যাট্রিক্স হয় তবে $AA^T = I_n$ হবে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\therefore AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Note: (i) যদি $AA^T = I$ হয় তবে $A^{-1} = A$

(ii) A, B লম্বিক ম্যাট্রিক্স হলে AB এবং BA উভয়ই লম্বিক ম্যাট্রিক্স হবে।

(iii) যদি A লম্বিক ম্যাট্রিক্স হয় তবে A^T, A^{-1} উভয়ই লম্বিক ম্যাট্রিক হবে।

অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স: কোন A ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলো জটিল সংখ্যা হয় তবে তার উপাদানগুলোর অনুবন্ধী নিয়ে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তা A ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলে। ইহাকে $\bar{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2+5i & 3-i & 7 \\ -2i & 6+i & 7-5i \\ 1-i & 3 & 6i \end{bmatrix} \therefore \bar{A} = \begin{bmatrix} 2-5i & 3+i & 7 \\ 2i & 6-i & 7+5i \\ 1+i & 3 & -6i \end{bmatrix}$

Note: যদি A এর সকল উপাদান বাস্তব হয় তবে $\bar{A} = A$

অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

যদি A এবং B ম্যাট্রিক্সদ্বয় একই ক্রমের হয় তবে

(i) $\left(\overline{\bar{A}}\right) = A$ (ii) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$

(iii) $\overline{kA} = k\bar{A}$ (যেখানে k বাস্তব সংখ্যা) (iv) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

অনুবন্ধী বিম্ব ম্যাট্রিক্স: কোন ম্যাট্রিক্স A-এর উপাদানগুলো অনুবন্ধী করে তারপর সারি ও কলামের উপাদানগুলো বিনিময় করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে A ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী বিম্ব ম্যাট্রিক্স বলে। ইহাকে A^θ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2+4i & 3 & 5-9i \\ 4 & 5+2i & 3i \\ 2 & -5 & 4-i \end{bmatrix}$

$$\therefore A^\theta = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2-4i & 4 & 2 \\ 3 & 5-2i & -5 \\ 5+9i & -3i & 4+i \end{bmatrix}$$

অনুবন্ধী বিম্ব ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

যদি A এবং B ম্যাট্রিক্সদ্বয় একই ক্রমের হয় তবে

(i) $(\bar{A})^T = \bar{A}^T$ (ii) $(A^\theta)^\theta = A$ (iii) $(A+B)^\theta = A^\theta + B^\theta$

(iv) $(kA)^\theta = kA^\theta$ (যেখানে k বাস্তব সংখ্যা) (v) $(AB)^\theta = B^\theta A^\theta$

হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স: কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A^\theta = A$ অর্থাৎ $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ হয় সকল $1 \le i, j \le n$ এর জন্য।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3+i & 4+i \\ 3-i & 4 & 3+2i \\ 4-i & 3-2i & 6 \end{bmatrix} \therefore \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3-i & 4-i \\ 3+i & 4 & 3-2i \\ 4+i & 3+2i & 6 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^\theta = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3+i & 4+i \\ 3-i & 4 & 3+2i \\ 4-i & 3-2i & 6 \end{bmatrix} = A$$

Note: (i) হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ বরাবর সকল উপাদানসমূহ অবশ্যই বাস্তব হবে।

(ii) যেকোন বর্গ A ম্যাট্রিক্সের উপাদান সমূহ জটিল সংখ্যা হলে $A+A^\theta$ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।

বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স: কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A^\theta = -A$ অর্থাৎ $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ হয়, সকল $1 \le i, j \le n$ এর জন্য।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2i & -2-3i & -2+i \\ 2-3i & -i & 3i \\ 2+i & 3i & 0 \end{bmatrix} \therefore \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2i & 2-3i & 2+i \\ -2-3i & -i & 3i \\ -2+i & 3i & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^\theta = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} -2i & 2+3i & 2-i \\ -2+3i & i & -3i \\ -2-i & -3i & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2i & -2-3i & -2+i \\ 2-3i & -i & 3i \\ 2+i & 3i & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Note: (i) বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ বরাবর সকল উপাদান সমূহ অবশ্যই সম্পূর্ণ কাল্পনিক বা শূন্য হবে।

(ii) যেকোন বর্গ A ম্যাট্রিক্সের উপাদানসমূহ জটিল সংখ্যা হলে $A - A^\theta$ বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।

(iii) যেকোন বর্গ A ম্যাট্রিক্সের উপাদান সমূহ জটিল সংখ্যা হলে A ম্যাট্রিক্সকে একটি মাত্র উপায়ে হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স এবং বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের যোগফল আকারে প্রকাশ করা যাবে।

অর্থাৎ $A = \frac{1}{2}(A+A^\theta) + \frac{1}{2}(A-A^\theta)$

হারমিসিয়ান এবং বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

(i) যদি A বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে AA^θ এবং $A^\theta A$ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।

(ii) যদি A হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হয় তবে
   (a) iA বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।
   (b) $\bar{A}$ হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।
   (c) kA হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে। যেখানে $k \in R$

(iii) যদি A বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হয় তবে
   (a) iA হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।
   (b) $\bar{A}$ বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।
   (c) kA বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।

(iv) যদি A এবং B একই ক্রমের হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হয় তবে
   (a) k_1A+k_2B ম্যাট্রিক্সও হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে। যেখানে $k_1, k_2 \in R$
   (b) AB হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে যদি AB = BA হয়।
   (c) AB+BA হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।
   (d) AB − BA বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে।

(v) যদি A এবং B প্রত্যেকেই একই মাত্রার বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হয় তবে $k_1A + k_2B$ ম্যাট্রিক্সও বিপরীত হারমিসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে। [যেখানে $k_1, k_2 \in R$ এবং $i = \sqrt{-1}$]

♦ **ইউনিট্যারী ম্যাট্রিক্স:** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের সাথে তার অনুবন্ধী বিম্ব ম্যাট্রিক্স গুন করলে যদি গুণফল অভেদ ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তবে তাকে ইউনিট্যারী ম্যাট্রিক্স বলে। যদি A ইউনিট্যারী ম্যাট্রিক্স হয় তবে, $AA^\theta = I_n$

যেমন: $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$

$$A^\theta = \bar{A}^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Note: (i) $AA^\theta = I$ হলে, $A^{-1} = A^\theta$

(ii) A এবং B উভয়ই একই মাত্রার ইউনিট্যারী ম্যাট্রিক্স হলে AB ম্যাট্রিক্সও ইউনিট্যারী ম্যাট্রিক্স হবে।

(iii) A ইউনিট্যারী ম্যাট্রিক্স হলে A^{-1}, A^T উভয়ই ইউনিট্যারী ম্যাট্রিক্স হবে।

◆ **ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক:** যদি কোন বর্গ A ম্যাট্রিক্সের উপাদান গুলোর অবস্থান ঠিক রেখে নির্ণায়ক তৈরী করলে তাকে উক্ত A ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বা A ম্যাট্রিক্সের মান বলে। ইহাকে |A| বা det A দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের বৈশিষ্ট্য:

যদি A এবং B উভয়ই একই মাত্রার বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে

(i) $|A^T| = |A|$

(ii) $|AB| = |A|\,|B|$ এবং $|BA| = |B|\,|A|$

(iii) A লম্বিক ম্যাট্রিক্স হলে $|A| = \pm 1$

(iv) A বিজোড় ক্রমের বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে $|A| = 0$

(v) A জোড় ক্রমের বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে |A| পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

(vi) $|kA| = k^n|A|$ যেখানে k স্কেলার এবং A মেট্রিক্সের ক্রম n।

(vii) $|A^n| = |A|^n$ যেখানে $n \in N$

(viii) $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n)$ হলে $|A| = a_1.a_2.a_3 \ldots\ldots a_n$

◆ **ব্যতিক্রমী এবং অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স:** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A ব্যতিক্রমী হবে যদি $|A| = 0$ হয় এবং অব্যতিক্রমী হবে যদি $|A| \neq 0$ হয়।

যেমন: (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ এখানে $|A| = 0$ (ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স)

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ এখানে $|A| = -2 \neq 0$ (অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স)

◆ **অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স:** যদি কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ এবং C_{ij}, A ম্যাট্রিক্সের a_{ij} উপাদানের সহগুনক হয় তবে A ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলোর অনুরুপ সহগুনক নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সের বিম্ব ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বলে। ইহাকে adj(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ

$\text{adj}(A) = [C_{ij}]^T_{n\times n} = [C_{ji}]_{n\times n}$

$\therefore (\text{adj } A)_{ij} = C_{ji} = A$ ম্যাট্রিক্সের a_{ji} উপাদানের সহগুণক।

অর্থাৎ যদি $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ হয় তবে $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$

যেখানে C_{ij}, A ম্যাট্রিক্সের a_{ij} উপাদানের সহগুণক।

$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}.a_{32}$

$C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}a_{23} - a_{33}a_{21}$

$C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$

$C_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$

$C_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$

$C_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$

$C_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$

এবং $C_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

অ্যাডজয়েন্ট (Adjoint) ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

(i) যদি A, n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)\,A = |A|\,I_n$

(ii) যদি A, n ক্রমের ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = 0$ (শূন্য ম্যাট্রিক্স)

(iii) যদি A, n ক্রমের অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $|\text{adj}A| = |A|^{n-1}$

(iv) যদি A, n ক্রমের অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে

$$\underbrace{|\text{adj}(\text{adj}(\text{adj}(\ldots\ldots(\text{adj}A))))|}_{m \text{ সংখ্যক adj}} = |A|^{(n-1)^m}$$

(v) যদি A এবং B উভয়ই n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B).\,\text{adj}(A)$

(vi) যদি A, n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $(\text{adj}A)^T = \text{adj}(A^T)$

(vii) যদি A, n ক্রমের অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $\text{adj}(\text{adj}A) = |A|^{n-2}A$

(viii) যদি A, n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং k যেকোন স্কেলার সংখ্যা হয় তবে $\text{adj}(kA) = k^{n-1}(\text{adj}A)$

(ix) যদি A, n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $m \in N$ হয় তবে $(\text{adj }A^m) = (\text{adj}A)^m$

(x) যদি A এবং B উভয়ই n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $B = \text{adj}(A)$ তবে $|AB + kI_n| = (|A| + k)^n$ যেখানে k স্কেলার রাশি।

(xi) কর্ণ ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্সও কর্ণ ম্যাট্রিক্স হবে।

যদি $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হয় তবে $\text{adj}A = \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ca & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$

Note: $\text{adj}(I_n) = I_n$

◆ **বিপরীত ম্যাট্রিক্স:** যদি A, n ক্রমের অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং B, n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স যেন $AB = BA = I_n$ হয় তবে B ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলে। এক্ষেত্রে $B = A^{-1}$ হবে আবার, কোন অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্সকে ঐ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান দিয়ে ভাগ করলে উহার বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়। $\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|}$ যেখানে $|A| \neq 0$

বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য:

যদি A, n ক্রমের অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে,

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ যেখানে $k \in N$ (iv) $(A^{-1})^{-1} = A$

(v) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (vi) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$

(vii) $(ABC \ldots\ldots YZ)^{-1} = Z^{-1}Y^{-1} \ldots\ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ যখন A, B ... প্রত্যেকেই n ক্রমের অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স।

Note: (i) $I_n^{-1} = I_n$

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

এবং $\text{adj }A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{\text{adj }A}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

◆ **The Reflection ম্যাট্রিক্স (প্রতিবিম্ব ম্যাট্রিক্স):**

(i) x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি (প্রতিবিম্ব): x অক্ষের সাপেক্ষে P(x, y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি P′(x′, y′) হলে, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; এখানে, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি x অক্ষের সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করে

y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি (প্রতিবিম্ব): y অক্ষের সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি P′(x′,y′) হলে, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; এখানে $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি y অক্ষের সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করে।

মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি (প্রতিবিম্ব): মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি P′(x′,y′) হলে, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; এখানে $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করে।

y = x রেখার সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি (প্রতিবিম্ব): y = x রেখার সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি P′(x′,y′) হলে, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; এখানে $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি y = x রেখার সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করে।

y = x tanθ রেখার সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি (প্রতিবিম্ব): y = x tanθ রেখার সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি P′(x′,y′) হলে, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; এখানে $\begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি y = x tanθ রেখার সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর প্রতিচ্ছবি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করে।

যদি অক্ষরেখা OX, OY-এর সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাংক (x,y)। যদি অক্ষদ্বয়কে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে θ কোণে ঘুরানো হলে নতুন অক্ষরয় OX′, OY′-এর সাপেক্ষে P বিন্দুর নতুন স্থানাংক (x′,y′) হয় তবে $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ বিপরীতক্রমে $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

এখানে $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে θ কোণে আবর্তিত নতুন অক্ষের সাপেক্ষে P(x,y) বিন্দুর নতুন স্থানাংকে এবং $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি P(x,y) বিন্দুর নতুন স্থানাংক থেকে আদি স্থানাংকে যাওয়ার পদ্ধতি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করে।

আরো কিছু গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

(i) যদি A বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে A মেট্রিক্স এ n(n−1) সংখ্যক উপাদান শূন্য হবে।

(ii) যদি d_1, d_2, d_3 ...... d_n কর্ণ বরাবর উপাদান হয় তবে
$A = \text{diag}\{d_1, d_2, d_3, ... d_n\}$ এবং $|A| = d_1 d_2 d_3 ..... d_n$
$A^{-1} = \text{diag}\{d_1^{-1}, d_2^{-1}, d_3^{-1}, ... d_n^{-1}\}$

(iii) $\text{diag}\{a_1, a_2, a_3 ...... a_n\} \times \text{diag}\{b_1, b_2, b_3 ...... b_n\}$
$= \text{diag}\{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ..., a_nb_n\}$

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, যেখানে k∈N

যদি A এবং B উভয়ই n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে,
a. $|kA| = k^n|A|$, k স্কেলার রাশি
b. $|AB| = |A|\,|B|$
c. $|kAB| = k^n |A|\,|B|$, k স্কেলার রাশি
d. $|AB| = |BA|$
e. $|A^T| = |A| = |A^\theta|$
f. $|A^m| = |A|^m$, যেখানে m∈N

যদি A বিজোড় ক্রমের বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় তবে |A| = 0 এবং যদি A জোড় ক্রমের বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় তবে |A| পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে।

❖ যদি A উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স হয় তবে
a. $|A| = \neq 1$
b. $\frac{1}{2}(I + A)$ এবং $\frac{1}{2}(I - A)$ সমঘাতী ম্যাট্রিক্স হবে এবং $\frac{1}{2}(I + A)\frac{1}{2}(I - A) = 0$

❖ যদি A লম্বিক ম্যাট্রিক্স হয় তবে $|A| = \pm1$

❖ যদি A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় তবে $B = (I - A)^{-1}(I + A)$ বা $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ লম্বিক ম্যাট্রিক্স হবে।

❖ দুটি লম্বিক ম্যাট্রিক্সের যোগফল লম্বিক ম্যাট্রিক্স নয় কিন্তু দুটি প্রতিসম বা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল সর্বদা প্রতিসম বা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে।

❖ দুটি লম্বিক ম্যাট্রিক্সের গুণফল লম্বিক ম্যাট্রিক্স হবে কিন্তু দুটি প্রতিসম বা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের গুণফল প্রতিসম বা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স নাও হতে পারে।

❖ যদি $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হয় তবে $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

❖ যদি $|A| \neq 0$ তবে $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

❖ A এবং B এমন অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স যেন AB = C হয় তবে $|B| = \frac{|C|}{|A|}$

❖ AB = 0 হলে A = 0 অথবা B = 0 হতেও পারে আবার না হতেও পারে।

❖ যদি A, B এবং C অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয় তবে,
(a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (b) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

❖ যদি B অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং A যেকোন ম্যাট্রিক্স হয় তবে,
$|B^{-1}AB| = |A|$

❖ যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ হয় তবে, $A^m = 0$ সকল m ≥ 2 এর জন্য।
এই ক্ষেত্রে $(A + I)^n = I + nA$

❖ যদি P লম্বিক ম্যাট্রিক্স হয় তবে $\det(P) = \pm1$
(i) যদি P একটি রেখার সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবি প্রকাশ করে তবে det(P) = −1
(ii) যদি P একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনশীল হয় তবে det(P) = 1

Calculator Type
ম্যাট্রিক্স (Matrix)

■ প্রাথমিক আলোচনা:

➤ **Mode কে সব সময়- matrix / mat form এ রাখতে হবে।**

➤ [SHIFT] [4] ([mat]) চেপে ম্যাট্রিক্স এর কাজ শুরু করতে হবে।

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স যার dimension বা মাত্রা (m × n) = 2 × 2 (কলাম ২টি এবং সারি ২টি)।

** দুইটি ম্যাট্রিক্স এর মাত্রা সমান হলে, তাদের যোগ এবং বিয়োগ সম্ভব।

** ১ম ম্যাট্রিক্স এর কলাম (n) যদি ২য় ম্যাট্রিক্স এর সারির সমান হয় তবে তাদের গুণ সম্ভব।

মনে করি, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$

উপরের আলোচনার কারণে A ± C সম্ভব কিন্তু A ± B অসম্ভব কারণ এদের মাত্রা সমান নয়।

আবার, AB এবং AC সম্ভব [১ম টির কলাম = ২; ২য় টির সারি = ২]

কিন্তু BC অসম্ভব [১ম টির কলাম = ৩; ২য় টির সারি = ২]

➢ **Calculator এ ম্যাট্রিক্স যেভাবে প্রবেশ করানো হয়:**

Matrix নিয়ে কাজ করতে হলে, প্রথমে Matrix Calculator এ প্রবেশ করাতে হয়। ধরা যাক,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সকে Calculator প্রবেশ করাতে হবে।

ম্যাট্রিক্স এর মাত্রা $(m \times n) = (2 \times 3)$ এটি নিম্নরূপে ক্যালকুলেটরে Input দেয়া হয়।

MS Series:

[MODE] [MODE] [MODE] → Screen: EQN 1 | MAT 2 | VCT 3 → [2]

চেপে Matrix mode এ নিতে হয়।

বি.দ্র: একবার Matrix mode এ নিলে Matrix Operation করার সময় আবার Matrix mode এ নিতে হয় না।

এরপর ম্যাট্রিক্স কে প্রবেশ করাতে হবে নিম্নরূপে:

[SHIFT] [4] → Screen: DIM 1 | EDIT 2 | MAT 3 → [1] → A 1 | B 2 | C 3 → [1]

Screen

Screen এ আসবে	Input দিতে হবে	
Mat A (m × n) m ?	[2] [=]	[সারি = 2]
Mat A (m × n) n ?	[3] [=]	[কলাম = 3]

Screen এ আসবে	Input দিতে হবে
Mat A_{11}	[1] [=]
Mat A_{12}	[2] [=]
Mat A_{13}	[3] [=]
Mat A_{21}	[4] [=]
Mat A_{22}	[5] [=]
Mat A_{23}	[6] [=]

ES Series:

[MODE] → Screen: 1: COMP 2: COMPLX / 3: STAT 4: BASE N / 5: EQN 6: MATRIX / 7: TABLE 8: VECTOR → [6] [AC] [SHIFT] [4]

Screen

Screen: 1: DIM 2: Data / 3: MATA 4: / 5: ...... 6: / 7: 8: → [1] → Screen: Matrix ? / 1: MatA 2: Mat B / 3: MatC → [1]

Screen: Mat A(m × n) m×n ? / 1: 3×3 2: 3×2 / 3: 3×1 4: 2×3 / 5: 2×2 6: 2×1

যেহেতু A ম্যাট্রিক্সটি 2 × 3 আকারের তাই [4] চাপতে হবে।

$A \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ফাঁকা স্থানগুলো নিম্নরূপে পূরণ করতে হবে।

নিম্নরূপে পূরণ করতে হবে- 1 = 2 = 3 =
4 = 5 = 6 =

ম্যাট্রিক্স Operation:

Example- 01: যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে (A+B), A

AB, BA, A^{-1}, Det(A), B^T B^T নির্ণয় কর।

প্রথমে আগের নিয়ম অনুযায়ী A ও B ম্যাট্রিক্স ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হ

তারপর যথাক্রমে MatA + MatB, MatA – MatB, Mat A × Ma

Mat B × Mat A, Mat A^{-1}, Det Mat A বের করতে হবে।

➢ **A ম্যাট্রিক্স Calculator এ প্রবেশ করানো:**

Screen এ আসবে	Input দিতে হবে
Mat A (m×n) m ?	[2] [=]
Mat A (m×n) n ?	[2] [=]
Mat A_{11} ?	[2] [=]
Mat A_{12} ?	[0] [=]
Mat A_{21} ?	[0] [=]
Mat A_{22} ?	[-3] [=]

➢ **B ম্যাট্রিক্স Calculator এ প্রবেশ করানো: B এর জন্য**

[SHIFT] [4] → Screen: Dim 1 | Edit 2 | Mat 3 → [1] → A 1 | B 2 | C 3

Screen

Screen এ আসবে	Input দিতে হবে
Mat B (m×n) m ?	[2] [=]
Mat B (m×n) n ?	[2] [=]
Mat B_{11}	[3] [=]
Mat B_{12}	[0] [=]
Mat B_{21}	[5] [=]
Mat B_{22}	[1] [=]

Mat A + Mat B

[SHIFT] [4] → Screen: Dim 1 | Edit 2 | Mat 3 → [3] → Screen: A 1 | B 2 | C 3 → [1]

[SHIFT] [4] → Screen: Dim 1 | Edit 2 | Mat 3 → [3] → Screen: A 1 | B 2 | C 3 → [2]

➢ **সকল ফলাফল দেখতে:**

Screen: Mat Ans_{11} 5 → ডানদিকে Press → Screen: Mat Ans_{12} 0

ডানদিকে → Mat Ans_{11} 5 → ডানদিকে → Mat A_{22} –2

Mat A – Mat B

Similarly:

Mat A × Mat B

[SHIFT] [4] [Dim 1 | Edit 2 | Mat 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3] [1] [×]

[SHIFT] [4] [Dim 1 | Edit 2 | Mat 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3] [2] [=]

সকল ফলাফল দেখতে:

[Mat Ans_{11} 6] ডানদিকে [Mat Ans_{12} 0] ডানদিকে

[Mat Ans_{21} –15] ডানদিকে [Mat Ans_{22} –3]

Mat B × Mat A Similarly

Mat A^{-1}

[SHIFT] [4] [Dim 1 | Edit 2 | Mat 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3] [1]

Screen

[x^{-1}] [=]

ফলাফল: Mat Ans_{11} 0.5 ▸ Mat Ans_{12} 0

▸ Mat Ans_{21} 0 ▸ Mat Ans_{22} –0.333

Determinat of A

[SHIFT] [4] [Dim 1 | Edit 2 | Mat 3] ডানদিকে [Det Tm]

[1] [SHIFT] [4] [Dim 1 | Edit 2 | Mat 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3]

[1] [=]

Ans: –6

Transpose of B B^T

[SHIFT] [4] [Dim 1 | Edit 2 | Mat 3] ডানদিকে [Det 1 | Tm 2]

[2] [SHIFT] [4] [Dim 1 | Edit 2 | Mat 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3]

[2] [=]

ফলাফল: Mat Ans_{11} 3 ▸ Mat Ans_{12} 5

▸ Mat Ans_{12} 0 ▸ Mat Ans_{22} 1

ES Series:

[Mode] [1: COMP 2: COMPLX | 3: STAT 4: BASE-N | 5: EQN 6: MATRIX | 7: TABLE 8: VECTOR] [6] [AC] চাপলে

ক্যালকুলেটর Matrix mode এ আসবে।

এখন A matrix Calculator এ প্রবেশ করাতে হবে।

[SHIFT] [4] [1: Dim 2: Data | 3: MatA 4: MAtB | 5: MatC 6: MAt Am | 7: Det 8: Tm] [1]

[Matrix ? | 1: Mat A 2: Mat B | 3: Mat C] [1] [Mat A (m×n) m×n | 1: 3×3 2: 3×2 | 3: 3×1 4: 2×3 | 5: 2×2 6: 2×1]

যেহেতু A Matrix টি 2 × 2 আকারের তাই 5 Press করতে হবে।

$A\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ফাঁকা স্থান গুলো পূরণ করতে হবে এভাবে,

[2] [=] [0] [=] [0] [=] [3] [=]

B matrix কে যেভাবে input নিতে হবে

[SHIFT] [4] [1: Dim 2: Data | 3: MatA 4: MAtB | 5: ...... 6: ...... | 7: ...... 8: ......] [1] [Matrix ? | 1: Mat A 2: Mat B | 3: Mat C]

Screen

[2] [Mat B (m×n) m×n | 1: 3×3 2: 3×2 | 3: 3×1 4: 2×3 | 5: 2×2 6: 2×1] [5]

Screen

এরপর Input নিতে হবে এভাবে

[3] [=] [0] [=] [5] [=] [1] [=] [AC]

এখন, Mat A + Mat B

[SHIFT] [4] [3: Mat A 4: Mat B | 5: Mat C 6: Mat Am] [3] [+]

Screen

[SHIFT] [4] [3: Mat A 4: Mat B | 5: Mat C 6: Mat Ans] [4] [=]

ফলাফল: $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Mat A – Mat B ; Similiar

Mat A × Mat B

[SHIFT] [4] [3: Mat A 4: Mat B | 5: Mat C 6: Mat Ans] [3] [×]

Screen

SHIFT 4 [3: Mat A 4: Mat B / 5: Mat C 6: Mat Ans] 4 =

Screen

Ans. $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$

Mat B × Mat A : Similar

Mat A^{-1} নির্ণয়

SHIFT 4 [3: Mat A 4: Mat B / 5: Mat C 6: Mat Ans] 3 x^{-1} =

Screen

Ans. $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix}$

Determinant of A : (Det A) নির্ণয়:

SHIFT 4 [3: Mat A ...... / 5: Mat C ...... / 7: Det ......] 7 SHIFT 4

Screen

[3: Mat A 4: Mat B / 5: .... 6: ....] 3 =

Screen

Ans: –6

Transpose of B ; B^T :

SHIFT 4 [4: Mat B / 6: Mat Ans / 8: Trn] 8 SHIFT 4

Screen

[3: Mat A 4: Mat B / 5: Mat C 6: Mat Ans] 4 =

Screen

Ans: $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Example-02:

$[x \quad y]\begin{bmatrix} a & h \\ x & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এর গুণফল কত?

a. $[x^2a + xyh \quad xyh + y^2b]$ b. $[x^2a + 2yxh + y^2b]$

এই Type এর Math Solve করার জন্য x, y, a, h, b এর মান ধরে নিয়ে Calculator এ গুণ করতে হবে। তারপর প্রশ্নের Option গুলোকে x, y, a, h, b এর মান বসিয়ে যেই Option এর মান গুণকরলে মানের সমান হয় সেটাই হবে Correct Answer।

যেমন: x = 1
y = 2
a = 3
h = 4
b = 5 হলে, ম্যাট্রিক্সের গুণফল হল:

$[1 \quad 2]\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 39$

Option B হল $x^2a + 2xyh + y^2b$
$= (1) \times 2 + 2 \times 1 \times 2 \times 4 + 2^2 \times 5 = 39$

তাই Answer হবে B.

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: ম্যাট্রিক্সের যোগ বিয়োগ-

Ex-01 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -7 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ হলে 7A–5B নির্ণয় কর

Solⁿ: $7A-5B = \begin{bmatrix} 21 & 7 & -7 \\ 14 & 21 & 28 \\ -28 & 35 & 42 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -20 & 30 \\ 10 & 0 & -35 \\ 15 & 25 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 27 & -37 \\ 4 & 21 & 63 \\ -43 & 10 & 42 \end{bmatrix}$ **Ans.**

For practice

01. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ হলে 7A–5B = ?

এবং 3A+9B = ?

Ans. $\begin{bmatrix} -8 & 19 & -31 \\ 15 & -10 & -11 \\ -3 & -7 & -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 30 & -3 & 9 \\ 51 & 18 & 51 \\ 21 & -3 & 30 \end{bmatrix}$

Type-02: ম্যাট্রিক্সের গুণন

Ex-01 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 2 \quad -5 \quad 6]$ হলে প্র

কর যে, (AB)C = A(BC)

Solⁿ: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+12-3 \\ 16+30-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 13 \\ 40 \end{bmatrix}[1 \; 2 - 5 \; 6] = \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}[1 \; 2 - 5 \; 6] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 8 & -20 & 24 \\ 6 & 12 & -30 & 36 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+12-3 & 8+24-6 & -20-60+15 & 24+72-18 \\ 16+30-6 & 32+60-12 & -80-150+30 & 96+180-36 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$ ∴ L.H.S. = R.H.S **(Proved)**

For practice:

01. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে প্রম

কর যে, (A + B)C = AC + BC

Type-03 বিম্ব ম্যাট্রিক্স/Transpose of a matrix

Ex-01 $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর, $A' + B' = (A + B)'$

Sol^n: $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

এবং $(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

আবার, $A' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = (A + B)'$ **(Proved)**

For practice:

01. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর, $(AB)' = B'A'$

Type-04 Inverse Matrix

Ex-01 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ এর Inverse matrix নির্ণয় কর।

Sol^n: $A^{-1} = \dfrac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **Ans.**

Note: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ex-02 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ এর Inverse matrix বের কর-

এখানে, $|A| = 1(-2) + 2(-1) + 3.2 = 2$

$A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 56 = -2$ $\quad A_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$

$B_1 = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -1$ $\quad B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -6$

$C_1 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2$ $\quad C_2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2$

$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -4$

$B_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 5$

$C_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2$

সুতরাং A এর inverse matrix $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\text{Adj } A)$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -1 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **Ans.**

For practice:

01. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ হয় তবে A^{-1} নির্ণয় কর। **Ans.** $\dfrac{1}{-27}\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

02. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের কর।

Ans: $\begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 3 & \frac{-4}{5} & \frac{-14}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$

Type-05 : ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত

Ex-01 যদি $\begin{pmatrix} \alpha + 2 & 2 \\ 8 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয় তবে α এর মান-

Sol^n: শর্তমতে, $(\alpha + 2)(\alpha - 4) - 16 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 8 - 16 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 24 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 4\alpha - 24 = 0$

$\Rightarrow \alpha(\alpha - 6) + 4(\alpha - 6) = 0 \Rightarrow (\alpha - 6)(\alpha + 4) = 0$

$\therefore \alpha = -4, 6$ **Ans.**

For practice:

01. যদি $\begin{pmatrix} \alpha + 3 & 4 \\ 9 & \alpha - 7 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয় তবে α এর মান বের কর। **Ans:** $2 \pm \sqrt{61}$

Type-06 : বাস্তব প্রয়োগ সংক্রান্ত

Ex-01 একটি দোকানের পরপর তিন দিনে কোকাকোলা, আরসিকোলা ও স্প্রাইট বিক্রি নিম্নের তালিকায় দেয়া হল:

	বোতলের সংখ্যা		
	কোকাকোলা	আরসিকোলা	স্প্রাইট
১ম দিন	50	45	40
২য় দিন	45	50	45
৩য় দিন	48	55	30
প্রতি বোতলে লাভ	0.50	0.75	0.50

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে এ তিন দিনের মোট লাভ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, P ও Q যথাক্রমে বোতলের সংখ্যার ম্যাট্রিক্স ও লাভ ম্যাট্রিক্স। তাহলে,

$P = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix}$ $\quad Q = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix}$

$= PQ = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 40 \\ 45 & 50 & 45 \\ 48 & 55 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78.75 \\ 82.50 \\ 80.25 \end{bmatrix}$

$\therefore$ মোট লাভ = (78.75 + 82.50 + 80.25) টাকা

= 241.50 টাকা **Ans.**

For practice:

01. **A, B এবং C তিনজন ক্রেতা। একটি দোকান হতে A ক্রয় করল 12 ডজন নোটবুক, 6 ডজন কলম ও 10 ডজন পেন্সিল; B ক্রয় করল 20 ডজন নোটবুক, 10 ডজন কলম ও 12 ডজন পেন্সিল এবং C ক্রয় করল 10 ডজন নোটবুক 10 ডজন কলম এবং 25 ডজন পেন্সিল। প্রতি ডজন নোটবুক, কলম ও পেন্সিলের মূল্য যথাক্রমে 72 টাকা, 48 টাকা ও 18 টাকা। মেট্রিক্স গুণক দ্বারা প্রত্যেকের বিল বের কর।**

Ans: A এর বিল 1332 টাকা, D এর বিল 2190 এবং C এর বিল 1650 টাকা।

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-4&8&4\\-1&2&1\\-3&6&3\end{bmatrix}$ হয় তাহলে A ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। [17-18]

Sol^n ধরি, A = [x y z]

$\therefore \begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}[x\ y\ z]=\begin{bmatrix}-4&8&4\\-1&2&1\\-3&6&3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}4x&4y&4z\\x&y&z\\3x&3y&3z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&8&4\\-1&2&1\\-3&6&3\end{bmatrix}$

$\therefore 4x=-4,\ x=-1,\ 3x=-3$ অর্থাৎ $x=-1$

এবং $4y=8,\ y=2,\ 3y=6$ অর্থাৎ $y=2$

এবং $4z=4,\ z=1,\ 3z=3$ অর্থাৎ $z=1$

$\therefore$ নির্ণেয় ম্যাট্রিক্স $A=[-1\ 2\ 1]$ **Ans.**

02. যদি $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ এবং $AB=\begin{bmatrix}10&17\\4&7\end{bmatrix}$ হয় তবে B ম্যাট্রিক্স এর উপাদানসমূহ বের কর। [16-17]

Solve $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$

$|A|=4-6=-2$

$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}1&-3\\-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\1&-2\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}10&17\\4&7\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}(AB)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17\\4&7\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A^{-1}A)B=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\ \therefore B=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$ **Ans.**

03. ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর: $\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$ [15-16]

Solve $\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2x+3y\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$

$\therefore 2x+3y=4$ ----------- (i)

$x-y=7$ ------------ (ii)

(i) + (ii) × 3 $\Rightarrow 2x+3y+3x-3y=25\Rightarrow x=5$

Form (ii) $\Rightarrow y=x-7=5-7=-2$

$\therefore (x, y)=(5,-2)$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ এবং $A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$; θ এর মান নির্ণয় কর। [09-10]

Solve $A.A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta&-2\sin\theta\cos\theta\\2\sin\theta\cos\theta&\cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}$

$\therefore A^2=\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}$

দেওয়া আছে $A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$

$\therefore$ শর্তমতে $\cos2\theta=\frac{1}{2}$ এবং $\sin2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

অর্থাৎ $\cos2\theta=\cos\frac{\pi}{3}$ এবং $\sin2\theta=\sin\frac{\pi}{3}$

অর্থাৎ $2\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ এবং $2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3},\ 2n\pi+\pi-\frac{\pi}{3}$

সুতরাং উভয়ক্ষেত্রের জন্য $2\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta=n\pi+\frac{\pi}{6}$ যেখানে $n\in Z$ **Ans.**

02. যদি $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ হয়, মান নির্ণয় কর: $A^2-4A-5I$ [05-06]

Solve $A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+4+4&2+2+4&2+4+2\\2+2+4&4+1+4&4+2+2\\2+4+2&4+2+2&4+4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$

$\therefore A^2-4A-5I=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=O$ **Ans.**

03. যদি $A=\begin{pmatrix}3&-2\\1&-2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\end{pmatrix}$ এবং $C=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, (AB) C = A (BC). [04-05]

Solve $AB=\begin{bmatrix}3&-2\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3-0&6-2&9-10\\1-0&2-2&3-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4&-1\\1&0&-7\end{bmatrix}$

$BC=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-6+0\\0-3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}$

$L.S=(AB)C=\begin{bmatrix}3&4&-1\\1&0&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-12-0\\2-0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix}$

$R.S=A(BC)=\begin{bmatrix}3&-2\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12+6\\-4+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix}$

$\therefore$ L.S. = R.S. **(Showed)**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ও $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হলে B ম্যাট্রিক্সের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর। [09-10; BUET : 16-17]

Solve $A^{-1} = \frac{1}{4-(2\times 3)}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

তাহলে, $A^{-1}(AB) = (A^{-1}.A)B = B$

$\therefore B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6 & \frac{-17}{2}+\frac{21}{2} \\ 10-8 & 17-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ Ans.

02. I অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর- [03-04]

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}B = I;\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solve ধরি, $B = \begin{bmatrix} w & y \\ x & z \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4w+3y & 4x+3z \\ 2w+y & 2x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore 4w+3y=1$

$2w+y=0;\ 4x+3z=0;\ 2x+z=1$

অর্থাৎ $y=1,\ w=\frac{-1}{2},\ x=\frac{3}{2},\ z=-2$ (সমাধান করে)

$\therefore B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ Ans.

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. k এর কোন মানের জন্য $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ ইনভার্টিবল হবে না? [12-13]

A. 3 B. 2 C. $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

Ans C Solve $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ ইনভার্টিবল হবে না যদি এদের নির্ণায়ক = শূন্য হয়, $\therefore (k-3)(k-2)-4=0$

$\Rightarrow k^2-5k+6-4=0 \Rightarrow k^2-5k+2=0$

$\Rightarrow k = \frac{5\pm\sqrt{25-8}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

02. ধরি A হচ্ছে 3 × 3 ম্যাট্রিক্স এবং |A| = −7. তাহলে $|(2A)^{-1}|$ এর মান হবে- [12-13]

A. $-\frac{1}{14}$ B. $-\frac{1}{56}$ C. $-\frac{8}{7}$ D. $-\frac{7}{2}$

Ans B Solve $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|} = \frac{1}{2^3|A|} = \frac{1}{8(-7)} = -\frac{1}{56}$

03. তিনটি ম্যাট্রিক্স $[x\ \ y]\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এর মান কত? [12-13]

A. $[x^2a+xyh\ \ xyh+y^2b]$ B. $[x^2a+2xyh+y^2b]$

C. $\begin{bmatrix} x^2a+xyh \\ xyh+y^2b \end{bmatrix}$ D. $[2x^2a+xyh+2y^2b]$

Ans B Solve $[x\ \ y]\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [ax+hy\ \ hx+by]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= [ax^2+hxy+hxy+by^2] = [ax^2+2xyh+by^2]$

04. যদি $AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ হয়, তবে XA^2 হবে- [11-12]

A. $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ D. কোনটিই নয়

Ans D Solve $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\therefore A^2$ এর মাত্রা 2 × 2 কিন্তু X এর মাত্র 2 × 1

$\therefore$ X ও A^2 এর গুণ সম্ভব নয়।

05. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে 4×5, 5×4 এবং 4×2 হলে, $(A^T+B)C$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা হবে– [10-11]

A. 5×4 B. 4×2 C. 5×2 D. 2×5

Ans C Solve A^T এর মাত্রা 5 × 4

$\therefore (A^T+B)$ এর মাত্রা 5×4। $\therefore (A^T+B)C$ এর মাত্রা 5 × 2

06. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ এবং B = [1 2 3] হলে, AB ম্যাট্রিক্সটি হবে- [08-09]

A. [4 −2 9] B. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ D. [11]

Ans B Solve

$AB = \begin{bmatrix} 4\times 1 & 4\times 2 & 4\times 3 \\ -1\times 1 & -1\times 2 & -1\times 3 \\ 3\times 1 & 3\times 2 & 3\times 3 \end{bmatrix} \therefore AB = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. x এর কোন কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} 2-x & 13 \\ 5 & 10-x \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যতিক্রমী (singular) ম্যাট্রিক্স হবে? [16-17]

A. −15 ও −3 B. − 15 ও 3 C. 15 ও −3
D. 13 ও 5 E. 15 ও 3

Ans C Solve singular matrix এর determinent শূন্য হবে

$\therefore (2-x)(10-x) - 13\times 5 = 0 \Rightarrow 20-2x-10x+x^2-35=0$

$\Rightarrow x^2-12x-45=0 \therefore x=15$ or $x=-3$

02. যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ও $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ হয়, তবে $(BA)^{-1}$ এর মান কত? [15-16]

A. $\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -44 & 1 \\ 31 & -1 \end{pmatrix}$

D. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -31 & 1 \\ 44 & -1 \end{pmatrix}$ E. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -44 & 31 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ans B Solve $BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+5 & -6+7 \\ 6+25 & 9+35 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 31 & 44 \end{pmatrix},\ |BA| = 44-31 = 13$

$\therefore (BA)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$

03. যদি C = AB হয়; যেখানে $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ তবে, C- এর আকার হলো– [12-13]

A. $\begin{bmatrix} 9 & 14 & 10 \\ 7 & 10 & 14 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 10 \\ 9 & 8 & 9 \\ 12 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 6 & 10 & 10 \\ 6 & 9 & 11 \\ 8 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 \\ 8 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ E. $\begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 11 & 9 & 7 \\ 11 & 13 & 7 \end{bmatrix}$

Ans | D | Solve $C = AB = \begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 \\ 8 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ এবং $|A^2| = 1$ হয় তবে θ এর মান কত? [11-12]

A. θ = 0° B. θ = 45° C. θ = 0° and 45° D. None

Ans | C | Solve $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

$\therefore |A^2| = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$

$\therefore$ θ- এর সকল মানের জন্য $|A^2| = 1$ সত্য।

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $PQ = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ হয় তবে ম্যাট্রিক্স Q কত? [14-15]

A. $\begin{bmatrix} 2 \\ .5 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 16 & -2 \\ .5 & 3 \end{bmatrix}$ C. [.5 –2]

D. $\begin{bmatrix} -16 & 2 \\ 3 & .5 \end{bmatrix}$ E. None of these

Ans | A | Solve $P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, PQ = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore Q = P^{-1}(PQ)$

$= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

02. A^{-1} নির্ণয় কর। যেখানে $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ [13-14]

A. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ D. $\frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

E. None of these

Ans | E | Solve $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{-6-8} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

03. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$ x, y এবং z এর মান হবে [10-11]

A. 1, 2, 3 B. 3, 4, 3 C. 3, –3, 4

D. –1, 2, 3 E. None

Ans | B | Solve $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore x = 3, y = 4, z = 3$

04. x এর কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ম্যাট্রিক্স $B = \begin{pmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{pmatrix}$ এর বিপরীত হবে- [09-10]

A. 3/2 B. 1/2 C. 1/3 D. 1/5 E. 1/4

Ans | D | Solve $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{pmatrix}$

A, B- এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হবে যদি BA = AB = I হয়

$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{pmatrix} = I$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10x-2 & 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore 5x = 1$ এবং $10x - 2 = 0$ $\therefore$ উভয়ক্ষেত্রে $x = \frac{1}{5}$

SELF TEST [Written]

01. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$, C = [1 2 –5 6] হলে (AB)C নির্ণয় কর

Ans. $\begin{bmatrix} 13 & 26 & -65 & 78 \\ 40 & 80 & -200 & 240 \end{bmatrix}$

02. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ হলে, দেখাও যে, (AB)C = A(BC).

03. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ans. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & -11 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

04. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ কর, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

05. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ হলে, A এর Adjoint ম্যাট্রিক্স বের কর।

Ans: $\begin{bmatrix} -19 & 13 & -3 \\ 20 & -17 & 6 \\ -4 & 7 & -3 \end{bmatrix}$

SELF TEST: [MCQ]

01. $\begin{bmatrix} x^2-5x+y & 3 \\ 2 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) = ?

A. 3, 6 B. 2, 6 C. A ও B উভয়ই D. None

02. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে A^6 হবে-

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ D. None

03. $A = [1\ -2\ 3]$; $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ হয় AB = ?

A. $[2\ 6\ -3]$ B. $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ C. [5] D. None

04. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ হলে A^3 = ?

A. 32A B. 16A C. 13A D. None

05. $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ হলে A^{-1} = ?

A. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ D. None

06. $\begin{bmatrix} 50 & 51 & 52 \\ 71 & 72 & 73 \\ 97 & 98 & 99 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস কত?

A. 222 B. 221 C. 220 D. 212

07. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ এর transpose matrix কোনটি?

A. $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & c \\ e & h & i \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$ D. None

08. $\begin{bmatrix} x+y & z+3 \\ y-4 & z+w \end{bmatrix} = 0$ হলে x,y,z,w এর মান নির্ণয় কর।

A. 4, –4, –3, 3 B. –4, 4, –3, 3
C. 3, –3, –4, 4 D. –3, 3, –4, 4

09. যদি $\begin{bmatrix} 20 & 1 & 4 \\ 21 & 2 & 5 \\ 22 & 3 & 6 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, A = ?

A. $\begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 20 & 1 & -6 \\ 171 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} -11 & -2 & -1 \\ 20 & 1 & 6 \\ 17 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 20 & 1 & 6 \\ -17 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ D. None

10. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ হলে A × B এর ক্রম কি হবে?

A. 2 × 3 B. 3 × 1 C. 1 × 2 D. None

11. $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ হলে, A^{-1} = ?

A. $\frac{1}{qr-ps}\begin{bmatrix} s & -q \\ -r & r \end{bmatrix}$ B. $\frac{1}{ps-qr}\begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}$

C. $\frac{1}{qr-ps}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ D. A ও B

12. $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$; $A^2 = B$ যখন α = ?

A. ± 1 B. 4 C. A & B D. None

13. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ এবং $\lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 2b & 24 \end{bmatrix}$ হলে λ, a, b = ?

A. –6, –12, –8 B. –6, –4, 9
C. –6, –4, –9 D. –6, 12, 18

14. অফম বা শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্সের শর্ত কি?

A. $A^2 = I$ B. $A^2 = A$
C. $A^n = 0$ D. None

15. সমঘাতী ম্যাট্রিক্স এর শর্ত কি?

A. $A^2 = I$ B. $A^2 = 0$ C. $A^2 = A$ D. None

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, A^2 = ?

A. A B. 2A C. 3A D. I

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ হলে, A^{50} = ?

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 1 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ এবং $|A^3| = 125$ হলে, x = ?

A. 0 B. ± 4 C. ± 3 D. 18

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

18.C	17.D	16.C	15.C	14.C	13.C	12.A	11.B	10.D
09.D	08.B	07.A	06.B	05.D	04.B	03.C	02.A	01.C

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

1. যদি $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ হয় তবে মান বের কর?
(i) $|A|\ |adj(A)|$ (ii) $|adj(adj(adj(A)))|$
(iii) $|adj(3A)|$ (iv) $adj(adj\ (A))$
Ans:(i) 64 (ii) 216 (iii)11664(iv)16A

2. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = adj(A)$ হয় তবে $|AB + 2I|$ এর মান বের কর। Ans: 27

3. A এবং B ম্যাট্রিক্সদ্বয় $AB = B^{-1}$ সমীকরণ সিদ্ধ করে যেখানে $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$। যদি $\lambda A - 2B^{-1} + I = 0$ হয় তবে B^{-1} বের না করে λ -এর মান বের কর। Ans: $\lambda = -2$

4. যদি A,B এবং C তিনটি 3 ক্রমের অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স $A^2 = A^{-1}$, $B = A^8$ এবং $C = A^2$ সমীকরণত্রয় সিদ্ধ করে তবে, det (B – C) এর মান বের কর। Ans: 0

5. ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে $y = x.\tan\frac{\pi}{8}$ রেখার সাপেক্ষে $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি বের কর। Ans: (0, – 2)

6. A , 2 × 2 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স যার $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ এবং $A^2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$। যদি A ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলোর সমষ্টি এবং গুনফল যথাক্রমে S এবং P হয় তবে S+P-এর মান কত? Ans: 5

7. যদি P লম্বিক ম্যাট্রিক্স এবং $Q = PAP^T$ এবং $B = P^TQ^{100}P$ হয় তবে $B^{-1} = ?$ যেখানে A উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স। Ans: $B^{-1}=I$

8. যদি $A = [a_{ij}]_{4\times4}$ এবং $a_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ যখন } i = j \\ 0 \text{ যখন } i \neq j \end{cases}$ হয় তবে $\left\{\frac{\det adj\ (adj\ (A))}{8}\right\} = ?$ Ans: 2^{33}

9. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $\det(A^n - I) = 1 - \lambda^n$ $(n\in N)$ হয় তবে $\lambda = ?$ Ans: 2

10. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হয় তবে $f(A) = ?$ Ans: $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

11. $x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স সমীকরণের কতগুলো সমাধান পাওয়া যাবে? Ans: 4 টি

12. যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে $(A(adj\ A)\ A^{-1})A = ?$ Ans: 61

13. যদি $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $B_0 = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B_n = adj\ (B_{n-1})$, $n\in N$ এবং I , 3 ক্রমের অভেদ ম্যাট্রিক্স হয় তবে $\det(A_0 + A_0^2 B_0^2 + A_0^3 + A_0^4 B_0^4 + \ldots$ 12টি পদ পর্যন্ত$) = ?$ Ans: 0

14. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ $(n \geq 3)$ শর্ত সিদ্ধ করে এ
$A^{50} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 25 \\ 25 \end{bmatrix}$, $A^{50} u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A^{50} u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে ট্রেস $A^{50} = ?$
যেখানে $u = [u_1, u_2\ u_3]$ Ans:

15. যদি A সমঘাতী ম্যাট্রিক্স হয় তবে দেখাও যে, $(A+I)^n = I + (2^n - 1)A$ (সকল $n\in N$ -এর জন্য) যেখানে I অভেদ ম্যাট্রিক্স এবং I-এর ক্রম ও A-এর ক্রম একই।

16. যদি $A^n = 0$ হয় তবে $I - A + A^2 - A^3 + \ldots + (-1)^{n-1} A^{n-1} = ?$ Ans: (I+A)

17. যদি A এবং B একই n ক্রমের অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয় তবে দেখাও যে, $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1} A$

18. দেখাও যে, $\begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -C^{-1}\ BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$ যেখানে A,B, ম্যাট্রিক্সত্রয় অব্যতিক্রমী এবং O, শূন্য ম্যাট্রিক্স। $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ এর বিপরী ম্যাট্রিক্স বের কর।

Ans: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

19. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & a & -1 \\ 2 & 5 & c \\ b & 8 & 2 \end{bmatrix}$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং $B = \begin{bmatrix} d & 3 & a \\ b-a & c & -2b-c \\ -2 & 6 & -f \end{bmatrix}$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় তবে AB বের কর।

Ans: $\begin{bmatrix} -4 & 3 & -6 \\ -31 & 54 & -26 \\ -28 & 9 & -50 \end{bmatrix}$

20. যদি B ও C , n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় এবং যদি A = B + C, BC = CB, $C^2 = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $A^{P+1} = B^P\ [B + (P+1)\ C]$ যেখানে P যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

21. যদি তিনটি একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স A, B, C -এর জন্য $A^2 = A^{-1}$ এবং $B = A^{2^n}$ এবং $C = A^{2^{n-2}}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, det (B – C) = 0

22. যদি A এবং B দুটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয় যেন $A \neq I$, $B^3 = I$ এবং $AB = BA^2$, $A^k = I$ হয় (যেখানে I অভেদ ম্যাট্রিক্স) তবে k-এর সর্বনি মান বের কর। Ans:

23. যদি $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ হয় তবে $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n} = ?$ (যেখানে $\theta\in R$) Ans: শূন্য ম্যাট্রিক্স

24. যদি A অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স এবং (A – 2I) (A – 4I) = O হয় তবে $\frac{1}{6}A + \frac{4}{3}A^{-1} = ?$ Ans:

25. যদি A , 3 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় যেন |A| = 2,তবে $|(adj\ A^{-1})^{-1}| = ?$ Ans:

B-নির্ণায়ক

খ্রিস্টাব্দে গণিতবিদ লিবনিজ (Leibnitz) সরল সমীকরণমালার সমাধানে এক বিশেষ সম্পর্কের অবতারণা করেন। উনবিংশ শতাব্দীতে গাউস (Gauss) এবং কসি (Cauchy) এ সম্পর্কে আরও সুস্পষ্ট ধারণা দেন। সর্বপ্রথম কসি এ ধরনের গাণিতিক ফাংশনের নাম দেন নির্ণায়ক (Determinant).

- **নির্ণায়ক:** নির্ণায়ক হল বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকারের রাশি। কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ এর উপাদানগুলোকে একই রেখে এবং তাদের অবস্থানের পরিবর্তন না করে $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ আকারে লিখলে একে প্রদত্ত বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বা সংক্ষেপে শুধু নির্ণায়ক বলে।
  এখানে a_1, a_2, b_1, b_2 কে নির্ণায়কের উপাদান এবং a_1, b_2 হল নির্ণায়কটির প্রধান কর্ণ গঠনকারী উপাদান।
- নির্ণায়কের উপাদানগুলোর অনুভূমিক বিন্যাসকে সারি (row) এবং উলম্ব বিন্যাসকে স্তম্ভ বা (column) বলে।
- নির্ণায়কের সারি ও কলাম সংখ্যা অবশ্যই সমান হতে হবে।
- **নির্ণায়কের মাত্রা:** কোন নির্ণায়কের সারি ও কলাম সংখ্যা n হলে, তাকে n মাত্রার নির্ণায়ক বলা হয়।
- **নির্ণায়কের পদ:**
  তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এর উপাদান a_1, b_1, c_1 ইত্যাদি গুণফলকে নির্ণায়কের পদ (terms) বলা হয়।
- **মুখ্য কর্ণ ও মাধ্যমিক কর্ণ:** উপরের নির্ণায়ক লক্ষ্য করলে দেখা যায় a_1, b_2 ও c_3 উপাদানগুলো একটি কর্ণ এবং a_3, b_2 ও c_1 উপাদানগুলো অপর একটি কর্ণ গঠন করে। প্রথম কর্ণকে মুখ্য কর্ণ এবং দ্বিতীয় কর্ণকে মাধ্যমিক কর্ণ বলা হয়। মুখ্যকর্ণের উপাদানগুলোর গুণফল (a_1, b_2, c_3) কে মুখ্যপদ এবং মাধ্যমিক কর্ণের উপাদানগুলোর গুণফলকে (a_3, b_2, c_1) মাধ্যমিক পদ বলে।
- **অনুরাশি (Minor):** যদি একটি নির্ণায়কের যে কোনো উপাদানের মধ্য দিয়ে একটি খাড়া ও একটি অনুভূমিক সরলরেখা টানা যায়, তাহলে, বাকী উপাদানগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে ঐ উপাদানের অনুরাশি বলে।
  উদাহরণ: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কে a_1, b_1 ও c_1
  এর অণুরাশি যথাক্রমে $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ও $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$
- **সহগুণক (Co-factor):** নির্ণায়কের কোন উপাদানের অনুরাশির পূর্বে যথাযথ চিহ্ন বসালে তাকে ঐ উপাদানের সহগুণক বলে। যেমন: উপরোক্ত নির্ণায়কে a_1, b_1 ও c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে
  $+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ও $+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$
- **সহগুণকের চিহ্ন সনাক্তকরণ:** কোন নির্ণায়কের যে উপাদানের সহগুণক বের করতে হলে উক্ত উপাদানটি যত নং কলাম ও যত নং সারিতে আছে তাদের যোগফল জোড় সংখ্যা হলে, সহগুণকের চিহ্ন ধনাত্মক (+ve) হবে এবং যোগফল বিজোড় হলে, চিহ্ন ঋণাত্মক (–ve) হবে।

- **নির্ণায়কের বিস্তৃতি:** নির্ণায়কের বিস্তৃতি বুঝানোর জন্য তৃতীয় ক্রমের একটি নির্ণায়ক বিবেচনা করি।

$$D\ (ধরি) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়কটিকে প্রথম কলাম বরাবর বিস্তার করি। এ জন্য a_1 বরাবর কলাম ও সারি বাদ দিলে বাকি চারটি উপাদান নিয়ে একটি 2×2 ক্রমের নির্ণায়ক হয়, যা a_1 এর সাথে গুণ করি। এরপর প্রথম কলাম এর দ্বিতীয় উপাদন a_2 নিয়ে পূর্বের নিয়মে a_2 বরাবর কলাম ও সারি বাদ দিলে বাকি চারটি উপাদন দিয়ে একটি 2×2 ক্রমের নির্ণায়ক হয়, যার পূর্বে একটা ঋণাত্মক চিহ্ন দিয়ে a_2 এর সাথে গুণ করি এবং সব শেষে প্রথম কলামের শেষ বা তৃতীয় উপাদন a_3 নিয়ে পূর্বের নিয়মে প্রাপ্ত 2×2 ক্রমের নির্ণায়কের সাথে a_3 গুণ করি। প্রাপ্ত মানগুলিই হচ্ছে নির্ণায়কটির চূড়ান্ত বিস্তৃতি। নিচে তা দেখান হল:

$$D\ (ধরি) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \ ....(1)$$

- **নির্ণায়কের মৌলিক ধর্মসমূহ:**

01. যদি কোন নির্ণায়কের কোন সারির (কলামের) উপাদানগুলো শূন্য হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হয়। যেমন: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

02. নির্ণায়কের সারি এবং কলাম সমূহ পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয়না।
যেমন: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \therefore D = D'$

03. নির্ণায়কের পাশাপাশি দুইটি কলাম (সারি) পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তিত হয় কিন্তু সংখ্যামান অপরিবর্তিত থাকে।
যেমন: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং
$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

04. যদি কোন নির্ণায়কের দুইটি কলাম (সারি) অভিন্ন হয় তবে, নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।
যেমন: $D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ এবং $D' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

05. কোন নির্ণায়কের যে কোন সারি (কলাম)-এর উপাদানগুলোকে তাদের নিজ নিজ সহগুণক দ্বারা গুণ করে গুণফলগুলোর সমষ্টি নিলে নির্ণায়কের মান পাওয়া যায়।

06. যদি নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম)-এর উপাদানগুলোকে অপর একটি সারি (কলাম)-এর অনুরূপ উপাদানের সহগুণক দ্বারা গুণ করা হয় তাহলে, গুণফলগুলোর সমষ্টি শূন্য হবে।
যেমন: $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$,
$a_2B_1 + a_3B_2 + a_3B_3 = 0$ ইত্যাদি...............

07. নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম)-এর প্রত্যেকটি উপাদানকে কোন স্থির সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে, নির্ণায়কের মানকেও সেই স্থির সংখ্যা দ্বারা গুণ করা হয়।

যেমন: $D = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

08. নির্ণায়কের কোন সারি(কলাম)-এর উপাদানগুলো অন্য একটি সারি(কলাম)-এর অনুরূপ উপাদানগুলোর m গুণের সমান হলে, নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

09. যদি কোন নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম)-এর প্রতিটি উপাদান দুটি পদ নিয়ে গঠিত হয় তাহলে, নির্ণায়কটি অপর দুইটি নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যাবে।

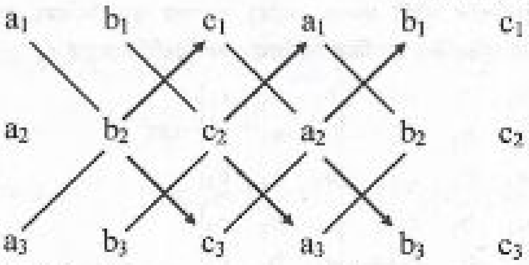
যেমন: $D = \begin{vmatrix} a_1+1 & b_1 & c_1 \\ a_2+1 & b_2 & c_2 \\ a_3+1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

10. নির্ণায়কের কোন সারি (কলাম)-এর প্রতিটি উপাদান অন্য একটি সারি (কলাম)-এর অনুরূপ উপাদানের একই গুণিতক দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে, নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ

01. **SARRUS** – এর সূত্র: তৃতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক সহজ পদ্ধতিতে বিস্তার করার জন্য পদ্ধতি আবিষ্কারকের নামানুসারে এর নামকরণ করা হয়েছে **'SARRUS'** এর পদ্ধতি।

পদ্ধতি: এ পদ্ধতির আওতায় যে নির্ণায়কটি বিস্তৃতির জন্য নেয়া হয়, পাশাপাশি দুইবার লিখা হয়। প্রথম সারির প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় উপাদান হতে শুরু করে চিত্রের নিয়মে তিনটি আড়া-আড়ি সরলরেখা টানতে হবে। রেখাগুলির সাথে ছেদকৃত উপাদানগুলির সমষ্টির সাথে তৃতীয় সারির প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় উপাদান হতে আড়া-আড়িভাবে অংকিত সরলরেখা সমূহের ছেদকৃত উপাদানগুলির গুণফলের সমষ্টি বিয়োগ করলে নির্ণেয় নির্ণায়কটির মান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ বর্ণনানুসারে নির্ণায়কটির মান হবে,



D (ধরি) $= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$

উদাহরণ: D (ধরি) $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ একে বিস্তার (সাধারণ ও সারাসের নিয়মানুসারে) কর।

সমাধান: সাধারণ নিয়ম অনুসারে,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

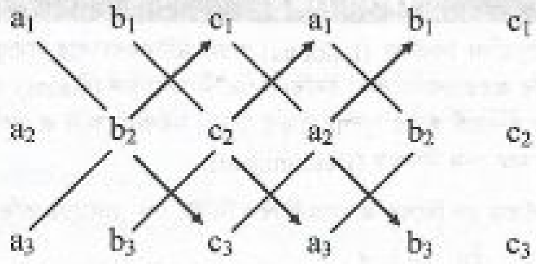
$= 1(5 \times 9 - 6 \times 8) - 4(9 \times 2 - 3 \times 8) + 7(6 \times 2 - 5 \times 3)$

$= 1(45 - 48) - 4(18 - 24) + 7(12 - 15)$

$= 1 \times (-3) - 4 \times (-6) + 7 \times (-3)$

$= -3 + 24 - 21 = 24 - 24 = 0$

সারাসের নিয়ম ব্যবহার করে:



$D = (1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8) - (7 \times 5 \times 3 + 8 \times 6 \times$
$+ 9 \times 4 \times 2)$

$= (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$

অতএব, উভয় নিয়মে $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Calculator Type
নির্ণায়ক (Determinant)

সহায়ক ক্যালকুলেটর (CASIO fx-991 MS/ES)

[উল্লেখিত প্রক্রিয়ায় মাত্র 30 সেকেন্ডেই অংকের উত্তর পাওয়া সম্ভব]

Linear equation বা সরল রৈখিক সমীকরণে দুইটি অজানা চলকের মান বের করার জন্য সাধারনত দুইটি সমীকরণের প্রয়োজন হয়। এবং তিনটি অজানা চলকের মান বের করার জন্য প্রয়োজন হয় তিনটি সমীকরণের। যেমন:

$4x + 8y = 20$ .... (i)

$2x + 6y = 10$ .... (ii)

এখানে অজানা চলক দুইটি এবং সমীকরণ দুইটি।

আবার, $2x + 3y + 4z = 12$ .... (iii)

$3x - 2y + 5z = 4$ .... (iv)

$-4x + 3y + 3z = 5$ .... (v)

এখানে, অজানা চলক ৩টি এবং সমীকরণ তিনটি

➤ **দ্বিঘাত সমীকরণ বা Quadratic equation:**

$2x^2 - 8x + 8 = 0$

অজানা রাশি 1 টি, সমীকরণে Degree 2 (সর্বোচ্চ ঘাত)

➤ **ত্রিঘাত সমীকরণ বা Cubic equation:**

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

অজানা রাশি 1 টি, সমীকরণে Degree 3 (সর্বোচ্চ ঘাত)

সমাধান: $4x + 8y = 20$ .... (i)

$2x + 6y = 10$ .... (ii)

সমীকরণদ্বয়কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং $a_2x + b_2y = c_2$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_1 = 4, b_1 = 8, c_1 = 20$ এবং

$a_2 = 2, b_2 = 6, c_2 = 10$ এখন

■ **Calculator এর সাহায্যে সমাধান নিম্নরূপ:**

MS/W Series:

প্রথমে mode কে equation আকারে নিতে হবে,

এর জন্য [MODE] [MODE] [MODE] [1] বাটন চাপলে

Calculator এর Screen [Unknowns 2 3] আসবে।

যেহেতু উপরের সমীকরণে অজানা রাশি দুইটি (x, y) একারণে [2] চাপতে হবে।

তারপর Screen a_1 ? মান চাইবে।

Screen	মান দিতে হবে
a_1 = ?	[4] তারপর [=] চাপতে হবে
b_1 = ?	[8] " " " "
c_1 = ?	[20] " " " "
a_2 = ?	[2] " " " "
b_2 = ?	[6] " " " "
c_2 = ?	[10] " " " "

সবশেষে x = 5 এবং y = 0 এর মান পাওয়া যাবে।

ES Series:

[MODE] ১ বার → Screen এ আসবে: 1 : COMP 2 : CMPLX 3 : STAT 4 : BASE-N 5 : EQN 6 : MATRIX 7 : TABLE 8 : VECTOR → [5] → Screen: 1 : $a_nx + b_ny = c_n$ 2 : $a_nx + b_ny = c_nz = dn$ 3 : $ax^2 + bx + c = 0$ 4 : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Press [1] → Screen: a b c ; $\frac{1}{2}$ [1 □ □ ; □ □ □] 0 → তারপর Press [4] [=] [8] [=] [209] [=] [2] [=] [6] [=] [109] [=]

Output [X = 5] [=] [Y = 0]

• দ্বিঘাত (Degree) সমীকরণ:

$2x^2 - 6x + 4 = 0$ কে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

a = 2, b = – 6, c = 4

MS Series:

[MODE] [MODE] [MODE] [1] [Unknown 2 3] (Press right) [Degree? 2 3] (Screen) [2]

Screen আসবে	মান দিতে হবে
a ?	[2] তারপর [=] Press
b ?	[–6] " " "
c ?	[4] " " "

Out put : $x_1 = 2$ এবং $x_2 = 1$

ES Series:

[MODE] ১ বার → Screen: 1 : COMP 2 : CMPLX 3 : STAT 4 : BASE-N 5 : EQN 6 : MATRIX 7 : TABLE 8 : VECTOR → [5] → Screen: 1 : $a_nx + b_ny + c_n$ 2 : .... 3 : $a_n^2 + b_n^2 + c = 0$ 4 : ....

[3] → a b c ; 1 □ □ ; 0

[2] [=] [–] [6] [=] [4] [=]

Output : $x_1 = 2$

$x_2 = 1$

➤ ত্রিঘাত (Degree 3) এর সমীকরণ:

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ যার Degree 3. এটি $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ আকারের। এদের তুলনা করে পাই,

a = 1, b = – 2, c = – 1, d = 2

MS Series এর বাটন চিত্র:

[MODE] [MODE] [MODE] [1] (Press right) [1] [=] [–2] [=] [–1] [=] [2] [=]

Output : $x_1 = -1,\ x_2 = 2;\ x_3 = 1$

ES Series এর বাটন চিত্র:

[MODE] [5] [4] [1] [=] [(–)] [2] [=] [(–)] [1] [=] [2] [=]

Output : $x_1 = -1,\ x_2 = 2;\ x_3 = 1$

Ex-01 $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ নির্ণয়কের মান নির্ণয় কর?

A. 0 B. x + y + z C. 4xyz D. xyz

এক্ষেত্রে, x, y, z এর মান ধরে নিয়ে Calculator এর সাহায্যে নির্ণয়কের মান নির্ণয় করা যায়।

ধরি, x = 1

y = 2

z = 3

তাহলে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Ex-02 x, y ও z এর মান বের কর:

$x + 2y - z = 5$.............(i)

$3x - y + 3z = 7$..........(ii)

$2x + 3y + z = 11$.......(iii)

∴ (x, y, z) = (2, 2, 1)

Mode (3 বার)→EQN→Unknowns(3)→a_1? → x এর সহগ→=→b_1? →y এর সহগ→=→c_1?→ z এর সহগ→=→ d_1? → (i) এর Constant মান→=→ a_2? → x এর সহগ→=→b_2? →y এর সহগ→=→c_2?→ z এর সহগ→=→ d_2? → (ii) এর Constant মান→=→ a_3? → x এর সহগ→=→b_3? →y এর সহগ→=→c_3?→ z এর সহগ→=→ d_3? → (iii) এর Constant মান। এর পর (=) বাটন চাপলে একের পর এক x =2; y = 2 এবং z =1 আসবে।

Ex-03 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 12 \\ x-8 & -x-3 & -x-10 \end{vmatrix} = 0$ হলে, x = ?

এক্ষেত্রে, Option এ যে মানগুলো দেওয়া থাকবে সেগুলো বসিয়ে যদি determination এর মান শূন্য হয় তাহলে ঐ Option টি উত্তর।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01

Ex:01 প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = -(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$

Sol^n: $L.S = \begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & by & ax+by \\ bx & cy & bx+cy \\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & by & 0 \\ bx & cy & 0 \\ ax^2+bxy & bxy+cy^2 & -(ax^2+2bxy+cy^2) \end{vmatrix}$ $[C_3' = C_3 - (C_1+C_2)]$

$= \frac{1}{xy}\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\}xy\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2) = R.S$ **(Proved)**

For practice:

প্রমাণ কর:

01. $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

02. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

Hints $C_1' = C_1 + C_2 + C_3$ দিয়ে a + b + c common নাও।

03. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+x_3$

04. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এই নির্ণায়কে প্রমাণ কর যে, $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$

যেখানে A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক।

Type-02

Ex-01 $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ 1+\omega+\omega^2 & \omega^2 & 1 \\ 1+\omega+\omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$ **Ans.**

For practice

01. $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix} = ?$ **Ans.** −4

Type-03

Ex-01 $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\begin{vmatrix} 9+x & 4 & 2 \\ 9+x & 2+x & 3 \\ 9+x & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$\Rightarrow (9+x)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (9+x)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ $[r_2' = r_2 - r_1,\ r_3' = r_3 - r_1]$

$\Rightarrow (9+x)\{(x+2)(x-2)+1\} = 0$

$\Rightarrow (9+x)(x^2-3) = 0 \quad \therefore x = -9, \pm\sqrt{3}$ **Ans.**

For practice:

01. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** x = a, b

Type-04 : ক্রেমারের নিয়ম

Ex-01

সমাধান কর: $x+y-z=3,\ 2x+3y+z=10,\ 3x-y-7z=1$

Sol^n: এখানে, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -20+17+11 = 8$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -60+71+13 = 24$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -71+51+28 = 8$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 13+28-33 = 8$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{24}{8} = 3;\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{8}{8} = 1$ এবং $z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{8} = 1$

Ans. $(x, y, z) = (3, 1, 1)$

For practice:

নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর:

01. $x+y+z=1$
$x+2y+z=2$
$x+y+2z=0$ **Ans.** $x=1;\ y=1;\ z=-1$

02. $2x+3y-2z=2$
$3x+4y-3z=2$
$5x+3y-2z=5$ **Ans.** $x=1;\ y=2;\ z=3$

Type-05

Ex-01 প্রমাণ কর :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = -4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$

Solⁿ: $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin A-\sin B & \sin B-\sin C & \sin C \\ \cos A-\cos B & \cos B-\cos C & \cos C \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= (\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) - (\cos A - \cos B).(\sin B - \sin C)$

$= \left(2.\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)\left(2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}\right)$

$-\left(2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\right)\left(2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}\right)$

$= 4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\left[\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{B+C}{2}\right]$

$= 4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}.\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{B+C}{2}\right)$

$= 4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-C}{2}$

$= -4\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2} = \text{R.H.S.}$ **(Proved)**

For practice:

01. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin^2\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin^2\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. কারণ প্রদর্শন করে এবং বিস্তারিত না করে সত্য অথবা মিথ্যা উত্তর কর। [02-03]

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$,

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

(iii) cofactor (সহগুণক) of 2 in $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ is (-2)

(iv) $\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x+y & x \\ x-y & 1 & 1 \\ x-y & 1 & y \end{vmatrix} = 0$

Solve

(i) মিথ্যা, প্রথম দুটি কলাম বিনিময় করা হয়েছে কিন্তু চিহ্ন পরিবর্তন করা হয়নি।	(ii) সত্য, সারি ও কলাম বিনিময় করা হয়েছে।
(iii) সত্য, 2 এর চিহ্ন $= (-1)^{1+2}$ এর চিহ্ন অর্থাৎ ঋণাত্মক।	(iv) সত্য, ১ম কলাম থেকে x−y কমন নিয়ে ১ম কলাম ও ২য় কলাম অভিন্ন হয়। **Ans.**

02. x এর সমাধান কর: $\begin{vmatrix} x+4 & 3 & 3 \\ 3 & x+4 & 5 \\ 5 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ [01-02]

Solve $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 3 \\ -x-1 & x+4 & 5 \\ 0 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \quad [c'_1 = c_1 - c_2]$

$\Rightarrow (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & x+4 & 5 \\ 0 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & x+7 & 8 \\ 0 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \quad [r_2' = r_2 + r_1]$

$\Rightarrow (x+1)[(x+7)(x+1) - 40] = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2+8x-33) = 0 \Rightarrow (x+1)(x+11)(x-3) = 0$

$\therefore x = -1, -11, 3$ ∴ নির্ণেয় সমাধান, $x = -1, -11, 3$ **Ans.**

03. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর : $x+2y-z=5,\ 3x-y+3z=7,\ 2x+3x+z=11$ [00-01]

Solve $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-9) - 2(3-6) - 1(9+2) = -15$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5(-1-9) - 2(7-33) - 1(21+11) = -30$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 1(7-33) - 5(3-6) - 1(33-14) = -30$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1(-11-21) - 2(33-14) + 5(9+2) = -15$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = 2,\ y = \frac{D_y}{D} = 2,\ z = \frac{D_z}{D} = 1$

$\therefore (x, y, z) = (2, 2, 1)$ **Ans.**

04. নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এ প্রমাণ কর যে, $a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0$

যেখানে A_1, B_1, C_1 যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক- [99-00]

Solve $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2$

$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2c_3 + a_3c_2$; $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$

$L.H.S = a_2(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(a_2c_3 - a_3c_2) + c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$
$= 0 = R.H.S$ **(Proved)**

05. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$ [97-98]

Solve

$$L.S = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 - b^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 - c^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 - c_2]$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 2b-2a & a^2-b^2 & 0 \\ 2c-2b & b^2-c^2 & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix} [r'_1 = r_1 - r_2; r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -2 & a+b & 0 \\ -2 & b+c & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)\{(b+c)-(a+b)\}$
$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$ **(Proved)**

06. সমাধান কর : $\begin{vmatrix} 3-2x & 6 & 6 \\ 4-x & 12 & 12 \\ 1-x & 13 & 14 \end{vmatrix} = 0$ [98-99]

Solve $\begin{vmatrix} 3-2x & 0 & 6 \\ 4-x & 0 & 12 \\ 1-x & -1 & 14 \end{vmatrix} = 0$ $[r'_2 = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow 36 - 24x - 24 + 6x = 0 \quad \therefore x = \frac{2}{3}$ **Ans.**

07. যদি $F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$, প্রমাণ কর । $F(x+h) - F(x)$ [95-96]

$$= \begin{vmatrix} f(x+h) - f(x) & \phi(x+h) \\ g(x+h) - g(x) & \Psi(x+h) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x+h) - \phi(x) \\ g(x) & \Psi(x+h) - \Psi(x) \end{vmatrix}$$

Solve

$$R.H.S = \begin{vmatrix} f(x+h) - f(x) & \phi(x+h) \\ g(x+h) - g(x) & \psi(x+h) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x+h) - \phi(x) \\ g(x) & \psi(x+h) - \psi(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(x+h) & \phi(x+h) \\ g(x+h) & \psi(x+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x+h) \\ g(x) & \psi(x+h) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x+h) \\ g(x) & \psi(x+h) \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f(x+h) & \phi(x+h) \\ g(x+h) & \psi(x+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f(x) & \phi(x) \\ g(x) & \psi(x) \end{vmatrix} = F(x+h) - F(x) = L.H…$$

$\therefore LS = RS$ **(prove…**

08. (বিস্তার না করে) নির্ণায়কটির মান নির্ণয় কর : [95-96]

$$\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix}$$

Solve $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a}+b & \frac{1}{b}+c & \frac{1}{c}+a \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+ab & 1+bc & 1+ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+ab & 1+bc & 1+ca \end{vmatrix} = 0$$ **A…**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান…

01. যদি $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ হয়, x এর মানসমূহ নির্ণয় কর । [04-0…

Solve $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 8x + 14) - 1(x - 3 + 1) - 1(1 + x - 5) = 0$
$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 8x + 14) - x + 2 - x + 4 = 0$
$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 8x + 14) - 2(x-3) = 0$
$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 8x + 12) = 0$
$\therefore (x-3)(x-2)(x-6) = 0 \therefore x = 3, 2, 6$ **Ans.**

02. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

[03-04,11-12]

Solve $L.S = \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & 2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & -2a \\ -b(1+a^2+b^2) & a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$[c'_1 = c_1 + b \times c_3, c_2' = c_2 - a \times c_3]$

$$= (1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2b \\ 0 & 1 & -2a \\ -b & a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$= (1+a^2+b^2)^2(1 - a^2 - b^2 + 2a^2 + 0 + 2b^2)$
$= (1+a^2+b^2)^3 = R.S$ **(Proved)**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ [15-16]

Solve $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6(10+9) = -6\times 19 = -114$

Ans.

02. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$ [12-13]

Solve $\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1-a+a^2 & -a & a^2 \\ 1-a+a^2 & 1 & -a \\ 1-a+a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1+a & -a-a^2 \\ 0 & a^2-1 & 1+a \end{vmatrix}$ $[r_2' = r_2 - r_1, r_3' = r_3 - r_2]$

$= (1-a+a^2)\begin{vmatrix} 1+a & -a(1+a) \\ (1+a)(a-1) & 1+a \end{vmatrix}$

$= (1+a)^2(1-a+a^2)\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1+a)^2(1-a+a^2)(1-a+a^2) = \{(1+a)(1-a+a^2)\}^2$

$= (1+a^3)^2$

Ans.

03. প্রমাণ কর যে $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ [11-12]

Solve L.H.S. $= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= (a+b+c)^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^3.1 = (a+b+c)^3 =$ R.H.S. **(Proved)**

04. প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ [10-11]

Solve L.S $= \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ (a-b)(a+b) & (b-c)(b+c) & c^2 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & c+x \\ 0 & 1 & c+y \\ a-c & b+c & c^2 \end{vmatrix}$ $[c'_1 = c_1 - c_2]$

$= (a-b)(b-c)(a-c)(c+y-c-x)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(x-y) =$ R.S. **(Proved)**

05. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^3 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$ [08-09]

Solve $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^3 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & a(a^2-1) \\ 1 & a^3-1 & a^3(a-1) \end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 - c_1, c_3' = c_3 - c_2]$

$= \begin{vmatrix} a-1 & a(a-1)(a+1) \\ (a-1)(a^2+a+1) & a^3(a-1) \end{vmatrix}$

$= a(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a^2+a+1 & a^2 \end{vmatrix}$

$= a(a-1)^2(a^2-a^3-a^2-a-a^2-a-1)$

$= -a(a-1)^2(a^3+a^2+2a+1)$ **Ans.**

06. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$ [07-08]

Solve $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p^2 & p^2(1-p^2) & p^4 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c'_1 = c_1 - c_2 \\ c'_2 = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= (1-p)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1+p & p^2(1+p) & p^4 \end{vmatrix}$

$= (1-p)^2\{p^2(1+p) - p(p+1)\}$ (১ম সারি বরাবর বিস্তার করে)

$= (1-p)^2 p(1+p)(p-1) = p(1-p)^2(p^2-1)$ **Ans.**

07. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2b & 3c \\ (a^2-3ac) & (4b^2-3ac) & (9c^2-2ab) \end{vmatrix}$ $(abc \neq 0)$ [06-07]

Solve $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-2b & 2b-3c & 3c \\ a^2-3ac-4b^2+3ac & 4b^2-3ac-9c^2+2ab & 9c^2-2ab \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

প্রথম সারির সাপেক্ষে বিস্তার করে

$= (a-2b)(4b^2-3ac-9c^2+2ab) - (2b-3c)(a^2-4b^2)$

$= (a-2b)(2b-3c)(a+2b+3c) - (2b-3c)(a^2-4b^2)$

$= (a-2b)(2b-3c)\{(a+2b+3c) - (a+2b)\}$

$= 3c(a-2b)(2b-3c)$ **Ans.**

08. নির্ণায়কটির মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix}$ **[05-06]**

Solve $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2-bc+ca & b^2-c^2-ca+ab & c^2-ab \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a-b)(b^2-c^2-ca+ab) - (b-c)(a^2-b^2-bc+ca)$

$= (a-b)(b-c)(b+c+a) - (b-c)(a-b)(a+b+c) = 0$

Ans.

09. x এর সমাধান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0\ (m \neq 0)$ **[04-05]**

Solve $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0\ (m \neq 0)$

$\Rightarrow m \begin{vmatrix} 0 & a-x & x \\ 0 & 0 & 1 \\ b-x & x-b & b \end{vmatrix} = 0\ [c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_2]$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & a-x & x \\ 0 & 0 & 1 \\ b-x & x-b & b \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (a-x)(b-x) = 0 \quad \therefore x = a, b$

Ans.

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & x \\ 1 & 3 & 1+x \end{vmatrix} = 10$ **হলে, x এর মান হবে- [13-14]**

A. 2 B. –2 C. 1 D. 5

Ans D Solve $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 4 & x \\ 1 & 3 & 1+x \end{vmatrix} = 10$

$\Rightarrow 2(4+4x-3x) - 3(1+x-x) + x(3-4) = 10$

$\Rightarrow 8 + 2x - 3 - x - 10 = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \quad \therefore x = 5$

02. ω যদি 1 এর একটি জটিল ঘনমূল হয়, তবে নিম্নের নির্ণায়কটির মান কত? $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$ **[10-11]**

A. 4 B. 2 C. 3 D. কোনটিই না

Ans D Solve $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$

$= 1(-\omega^3 - 1) + \omega(\omega^2 - \omega^2) + \omega^2(-\omega - \omega^4)$

$= -\omega^3 - 1 + 0 - \omega^3 - \omega^6 = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$

03. $\begin{vmatrix} \ln x & \ln y & \ln z \\ \ln 2x & \ln 2y & \ln 2z \\ \ln 3x & \ln 3y & \ln 3z \end{vmatrix}$ **এর মান :**

[09-10; KUET :07-08; RUET : 11-

A. $\log\frac{2}{3}$ B. 0 C. $\log\frac{3}{2}$ D. 1

Ans B Solve $\begin{vmatrix} \ln x & \ln y & \ln z \\ \ln 2x & \ln 2y & \ln 2z \\ \ln 3x & \ln 3y & \ln 3z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \ln x & \ln y & \ln z \\ \ln 2x - \ln x & \ln 2y - \ln y & \ln 2z - \ln z \\ \ln 3x - \ln 2x & \ln 3y - \ln 2y & \ln 3z - \ln 2z \end{vmatrix}$ $[r_2' = r_2 - r_1 ; r_3' = r_3 -$

$= \begin{vmatrix} \ln x & \ln y & \ln z \\ \ln 2 & \ln 2 & \ln 2 \\ \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{vmatrix}$

$= \ln 2 . \ln\frac{3}{2} \begin{vmatrix} \ln x & \ln y & \ln z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ [যেহেতু দুইটি সারি একই]

04. নিচের সমীকরণে x- এর মান হবে- $\begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 & 4 & x \\ 26 & 5 & 8 \\ 30 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ **[07-0**

A. 7 B. 6 C. 8 D. 9

Ans A Solve $\begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 & 4 & x \\ 26 & 5 & 8 \\ 30 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 22 & 4 & x \\ 26 & 5 & 8 \\ 30 & 6 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 22-1 & 4 & x \\ 26-2 & 5 & 8 \\ 30-3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 21 & 4 & x \\ 24 & 5 & 8 \\ 27 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 & x \\ 8 & 5 & 8 \\ 9 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 7(45-48) - 4(72-72) + x(48-45) = 0$

$\Rightarrow -21 + 0 + 3x = 0 \quad \therefore x = 7$

05. x -এর কোন কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত নির্ণায়কের মান শূন্য হবে?

$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$ **[05-06; CUET:09-10]**

A. $x = 0, -2$ B. $x = 1, 2$ C. $x = 0, 1$ D. $x = 0, 2$

Ans D Solve

$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (-5) \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

k-এর কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটের অসংখ্য সমাধান বিদ্যমান? [05-06]

$$x - y = 3$$
$$2x - 2y = k$$

A. $-\infty < k < \infty$ B. $k \neq 6$ C. $k = \frac{3}{2}$ D. $k = 6$

Ans D Solve $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{k}$ হতে $k = 6$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান কত? [17-18, 10-11, 08-09; RUET : 12-13]

A. $4xyz$ B. $\frac{1}{2}xyz$ C. $\frac{1}{7}xyz$
D. $11xyz$ E. $13xyz$

Ans A Solve $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x+z & x+z & z \\ y+z & z & y+z \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= 2\begin{vmatrix} y & x & y \\ 0 & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2]$

$= 2\begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 0 & x+z & z \\ y & z & z \end{vmatrix}$ $[c_3' = c_3 - c_1]$

$= 2\begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 0 & x & z \\ y & 0 & z \end{vmatrix}$ $[c_2' = c_2 - c_3]$

$= 2xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4xyz$

02. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & 205 & 1 & u \\ 3 & -1 & 97 & 4 \\ 0 & -7 & k & 7 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের "1" এর সহগুণক হলো−[14-15]

A. u B. k C. 0 D. −935 E. −297

Ans C Solve 1 এর (সারি + কলাম) $= (2+3) = 5 \rightarrow$ বিজোড়

$\therefore$ 1 এর সহগুণক $(-1) \times \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0$

03. $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? [09-10]

A. −2 B. 2 C. −1 D. 1 E. 0

Ans E Solve

$\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1 & b+c \\ 1+a+b+c & 1 & c+a \\ 1+a+b+c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= abc(1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$ [∵ দুইটি কলাম একই]

04. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? [06-07]

A. 1 B. ω C. ω^2 D. 0 E. −1

Ans D Solve $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ 1+\omega+\omega^2 & \omega^2 & 1 \\ 1+\omega+\omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$

05. $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$ এর মান হবে- [05-06]

A. 1 B. 0 C. −1 D. 2

Ans B Solve $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $[r_2' = r_2 - r_1, r_3' = r_3 - r_2]$

[দুইটি সারি একই]

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. x এর কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত নির্ণায়কের মান শূন্য হবে? [13-14]

$\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$

A. $-9, \pm\sqrt{3}$ B. $-9, \sqrt{3}$
C. $9, \sqrt{3}$ D. None

Ans A Solve $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & x+2 & 3 \\ x+9 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x+2 \end{vmatrix}$ $[r_2' = r_2 - r_1, r_3' = r_3 - r_1]$

$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x^2 - 4 + 1) = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x^2 - 3) = 0$

$\therefore x = -9, \pm\sqrt{3}$

02. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 6 & 12 \\ x-8 & -x-3 & -x-10 \end{vmatrix} = 0$ **হলে, x-এর মান কত হবে- [10-11]**

A. 4 B. −16/3

C. 17 D. None

Ans D Solve $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 6 & 12 \\ x-8 & -x-3 & -x-10 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 12 \\ x-8 & -4x+21 & -x-10 \end{vmatrix} = 0$ $[c_2' = c_2 - 3c_1]$

$\Rightarrow 2\begin{vmatrix} -6 & 12 \\ -4x+21 & -x-10 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 6x + 60 + 48x - 252 = 0 \Rightarrow 54x = 192 \therefore x = \frac{32}{9}$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. সমাধান কর (Solve): $ax + by = 0$, $by + cz = 0$, $cz + ax = 0$ [14-15]

A. $x = y = z = 0$ B. $x = 0, y = -b, z = c$

C. $x = y = z = \frac{a}{2}$ D. $x = a, y = -a, z = 0$

E. $x = 1, y = 1, z = -\frac{1}{c}$

Ans A Solve $ax + by = 0$ -------- (i)

$by + cz = 0$ -------- (ii)

$cz + ax = 0$ -------- (iii)

(i) − (ii) $\Rightarrow ax - cz = 0$ -------- (iv)

(iii) + (iv) $\Rightarrow 2ax = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \therefore y = 0, z = 0$

02. নিম্নের নির্ণায়কের (−2a) এর সহগুণক কত? [14-15]

$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

A. $(1-a^4) - b^2(4-b^2)$ B. $2a(1+a^2+b^2)$ C. $(1+a^2+b^2)^3$

D. $(1+a^2+b^2)$ E. $-2a(1+a^2+b^2)$

Ans E Solve

$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (−2a)-এর সহগুণক

$= -\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & -2b \\ 2ab & 2a \end{vmatrix} = -[2a(1+a^2-b^2) + 4ab^2]$

$= -2a(1+a^2-b^2+2b^2) = -2a(1+a^2+b^2)$

03. মান নির্ণয় কর $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & ab \\ 1 & ab & ab^2 \end{vmatrix}$ **[13-14]**

A. $a(1-b)^2$ B. $b(1-a)^2$ C. $-a(b-1)^2$

D. $-b(a-1)^2$ E. None

Ans C Solve $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & ab \\ 1 & ab & ab^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & a(b-1) \\ 1 & ab-1 & ab(b-1) \end{vmatrix}$ $[c'_2 = c_2 - c_1, c'_3 = c_3 - c_2]$

$= (b-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & a \\ 1 & ab-1 & ab \end{vmatrix} = (b-1)\{ab(a-1) - a(ab-1)\}$

$= (b-1)(-ab+a) = -a(b-1)^2$

SELF TEST [Written]

01. প্রমাণ কর- $\begin{bmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

02. দেখাও যে, $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

03. দেখাও যে, $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$

04. বিস্তার না করে দেখাও যে,

i. $\begin{vmatrix} a & x & b+c \\ b & x & c+a \\ c & x & a+b \end{vmatrix} = 0$ ii. $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

05. x এর মান বের কর-

i. $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ **Ans.** $-(a+b+c$

ii. $\begin{vmatrix} x^3 & 3 & 8 \\ x & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **Ans.** $2, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$

06. দেখাও যে, $\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ b & x+b & b \\ c & c & x+c \end{vmatrix} = x^2(x+a+b+c)$

07. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & \cos2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$

$= 2(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)(\sin\alpha - \sin\beta)$

08. ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর-

$x + y - z = 0$

$x + 2y + z = 1$

$2x - y + z = 2$

Ans: $x = 2/3, y = -1/9; z = 5/9$

SELF TEST [MCQ]

01. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = ?$

A. $a(a-1)^2(a^2-1)$ B. $a(a^4-1)$
C. $a(a-1)(a^2-2)$ D. $a^2(a-1)^2(a^2-1)$

02. $\begin{vmatrix} x+\omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1+x \\ 1 & x+\omega & \omega^2 \end{vmatrix} = 0$ হলে x এর মান কত?

A. 1 B. –1 C. 0 D. 2

03. $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = ?$

A. 4 abc B. 8 abc C. 2 abc D. 3 abc

04. $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix} = ?$

A. 5 B. 6 C. 7 D. –6

05. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = ?$

A. $4a^2b^2c^2$ B. $2a^2b^2c^2$ C. $a^2b^2c^2$ D. $8a^2b^2c^2$

06. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়ক 2 এর অনুরাশি কত?

A. 6 B. –6 C. 7 D. 8

07. $\begin{vmatrix} 0 & b-a & c-a \\ a-b & 0 & c-b \\ a-c & b-c & 0 \end{vmatrix}$ – কত?

A. 4abc B. $4a^2b^2c^2$ C. (a–b) (b–c) (c–a) D. 0

08. $\begin{vmatrix} a & b & -c \\ a & b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$ এর মান কত?

A. 0 B. ab + bc + ca C. 2abc D. None

09. $\begin{vmatrix} 1+x & x & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ হলে x এর মান কত?

A. $\frac{5}{3}$ B. $-\frac{31}{10}$ C. $\frac{3}{37}$ D. None

10. যদি $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$ হয়, তবে $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = ?$

A. 15 B. 45 C. 405 D. –405

11. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = ?$

A. $\begin{vmatrix} y & b & q \\ z & a & p \\ x & c & r \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$ C. both A & B D. None

12. $\begin{vmatrix} x+a & y+a & z+a \\ x+b & y+b & z+b \\ x+c & y+c & z+c \end{vmatrix}$ এর মান কত?

A. 0 B. 1 C. –1 D. None

13. $\begin{vmatrix} 0 & x & 16 \\ x & 5 & 7 \\ 0 & 9 & x \end{vmatrix} = 0$ সমীকরণের মূলগুলো হল–

A. 12, –12 B. 0, ± 12 C. 0, 12, 16 D. 0, 9, 16

14. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$

A. $(a-b)^2$ B. $(a-b)^3$ C. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ D. B & C

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	
04. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

14.D	13.B	12.A	11.C	10.B	09.D	08.A
07.D	06.B	05.A	04.B	03.B	02.C	01.A

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

01. মান বের কর:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ \cdots & & & & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Ans: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

02. মান বের কর:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Ans: n + 1

03. মান বের কর:

$$\begin{vmatrix} a & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{x} & a & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & a & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} & a & x \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \frac{1}{x} & a & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \frac{1}{x} & a \end{vmatrix}_{n\times n} \quad [a > 2]$$

Ans: $\frac{1}{\sqrt{a^2-4}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{n+1}\right]$

২য় অধ্যায়
প্রথম পত্র

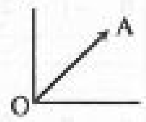
ভেক্টর (Vector)

ভেক্টরের প্রকারভেদ, গুরুত্বপূর্ণ তথ্য এবং সূত্রাবলি

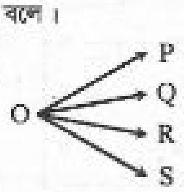
- **শূন্য ভেক্টর:** যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের আদি বিন্দু এবং শেষ বিন্দু সমাপতিত হয় অর্থাৎ একই এবং দিক অনির্ণেয়।
- **একক ভেক্টর:** যে ভেক্টরের মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে। কোন ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করলে একক ভেক্টর পাওয়া যায়। কোন ভেক্টর $\vec{a}$ দ্বারা প্রকাশ করা হলে ঐ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

- **স্থানীয় ভেক্টর (Localized vector):** যে ভেক্টরের আদিবিন্দু নির্দিষ্ট তাকে স্থানীয় ভেক্টর বলে।
- **স্বাধীন ভেক্টর:** যে ভেক্টরের আদিবিন্দু নির্দিষ্ট থাকে না তাকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।
- **সম-আদি ভেক্টরসমূহ:** যে ভেক্টরসমূহের আদি বিন্দু একই তাদেরকে সমআদি ভেক্টর বলে।
- **সমান ভেক্টর:** দুইটি স্বাধীন ভেক্টরদ্বয় সমান হবে যদি এবং কেবল যদি তাদের মান এবং দিক একই হয়। এইক্ষেত্রে তাদের আদিবিন্দুর অবস্থান একই নাও হতে পারে। যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সমান ভেক্টর হয় তবে $\vec{a} = \vec{b}$ লিখা যায়।
- **সমরৈখিক বা সমান্তরাল ভেক্টর:** কতিপয় ভেক্টর একই রেখা বরাবর ক্রিয়াশীল অথবা তাদের ক্রিয়ারেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল হয় তবে তাদেরকে সমরৈখিক বা সমান্তরাল ভেক্টর বলে। $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুইটি সমরৈখিক বা সমান্তরাল হলে $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে λ যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি এবং $\lambda \neq 0$।
- **সমতলীয় ভেক্টর:** কতিপয় ভেক্টর একই সমতলে অবস্থান করলে বা একই সমতলের সমান্তরাল সমতলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে। যেকোন দুটি ভেক্টর সর্বদাই সমতলীয়।
- **অবস্থান ভেক্টর:** প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে। চিত্রে O হচ্ছে মূলবিন্দু এবং A যেকোন বিন্দু। $\vec{OA}$ ভেক্টরটি O বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে। সুতরাং $\vec{OA}$ একটি অবস্থান ভেক্টর।



- **সমবিন্দু ভেক্টর (Co-initial vectors):** যে ভেক্টরসমূহের আদি বিন্দু একই তাদেরকে সমবিন্দু ভেক্টর বলে।



এখানে $\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}$ এবং $\vec{OS}$ ভেক্টরসমূহ O বিন্দুতে সমবিন্দু ভেক্টর।

- **ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি:**

(i) $\vec{AB}$ = B-এর অবস্থান ভেক্টর − A-এর অবস্থান ভেক্টর $= \vec{OB} - \vec{OA}$

(ii) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (বিনিময় বিধি)

(iii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (সংযোজন বিধি)

(iv) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(v) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(vi) $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

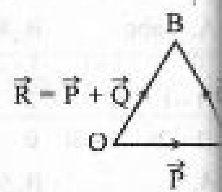
(vii) $\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

(viii) $\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$

(ix) $\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$

(x) **ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি:** যদি কোন ত্রিভুজের সন্নিহিত দুইটি বাহু ক্রমে দুইটি একজাতীয় ভেক্টরকে নির্দেশ করে, তবে ত্রিভুজের তৃতীয় বিপরীতক্রমে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

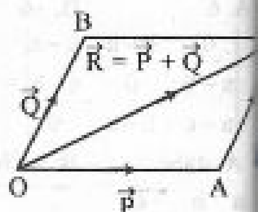
চিত্রে OAB ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু OA এবং AB একজাতীয় দুইটি ভেক্টর $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ কে একইক্রমে নির্দেশ করে। সুতরাং ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি সূত্রানুসারে তাদের লব্ধি বা যোগফল তৃতীয় বাহু দ্বারা বিপরীতক্রমে অর্থাৎ OB দ্বারা সূচিত হবে।



সুতরাং $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \Rightarrow \vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$

(xi) **ভেক্টরের সামান্তরিকের বিধি:** যদি কোন একটি কণার উপর একই ক্রিয়ারত দুইটি ভেক্টর একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দিকে সূচিত হয়, তাহলে এদের লব্ধির মান ও দিক ঐ সামান্তরিকের বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সূচিত হবে।

ব্যাখ্যা: চিত্রে O বিন্দুতে $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OB} = \vec{Q}$ দুইটি ভেক্টর ক্রিয়া করছে। OACB সামান্তরিকটি আঁকা হল, তাহলে OC কর্ণটি ভেক্টর দুইটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

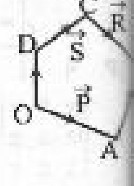


দুইটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হয় এই মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান, আর দুইটি ভেক্টর প বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হয় এবং এ ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান।

(xii) **ভেক্টরের বহুভুজ বিধি:** দুইয়ের বেশি ভেক্টরের যোগের ক্ষেত্রে ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে দ্বিতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবি তৃতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু,এভাবে সব ভেক্টরগুলি সাজিয়ে প্রথম ভে পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করে একটি বহুভুজ তৈরী ক প্রথম ভেক্টরটির পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টরটির শীর্ষবিন্দুর সংযোগ রে বিপরীতক্রমে লব্ধির মান, দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যা: চিত্রে OABCD পঞ্চভুজের OA, AB, BC, CD বাহু চারটি একই ক্রমে $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ ভেক্টর চারটি নির্দেশ করে। বহুভুজের বিধি অনুসারে OD বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর চারটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে অর্থাৎ $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{OD}$

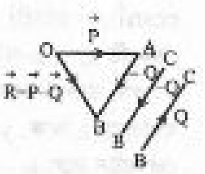
বা $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} = \vec{OD}$



ভেক্টরের বিয়োগ বিধি: দুইটি ভেক্টরের বিয়োগের ক্ষেত্রে যে ভেক্টরকে বিয়োগ করতে হবে তার ঋণাত্মক ভেক্টরকে প্রথম ভেক্টরের সাথে যোগ করলেই বিয়োগফল পাওয়া যায়। অর্থাৎ $\vec{A}$, $\vec{B}$ ভেক্টর হলে $\vec{A}-\vec{B}$ বলতে $\vec{A}+(-\vec{B})$ কে বুঝায়। দুইটি ভেক্টরের বিয়োগের ক্ষেত্রে ১ম ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে যে ভেক্টরটি বিয়োগ করতে হবে তার ঋণাত্মক ভেক্টরের পাদবিন্দু স্থাপন করে ১ম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে ঋণাত্মক ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে রেখাংশ পাওয়া যায় তা বিয়োগফলের মান নির্দেশ করে। বিয়োগফলের দিক হয় ১ম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে ঋণাত্মক ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর দিকে।

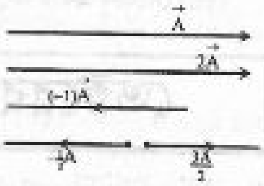
চিত্রে $\vec{OA}=\vec{P}$ এবং $\vec{BC}=\vec{Q}\ \therefore \vec{CB}=-\vec{Q}$

$\vec{P}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু A তে, $-\vec{Q}$ ভেক্টরের পাদবিন্দু C স্থাপন করে AB অংকন করা হয় যেন ভেক্টর দুটির দিক পরিবর্তন না হয়। আবার $\vec{P}$ ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং $\vec{Q}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করে যে OB রেখাংশ পাওয়া যায়, তাই হচ্ছে $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল $\vec{P}-\vec{Q}$। বিয়োগফলের মান হবে OB রেখাংশের দৈর্ঘ্য এবং দিক হচ্ছে O বিন্দু থেকে B বিন্দুর দিকে।



ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক: $\vec{A}$ একটি অশূন্য ভেক্টর এবং k একটি অশূন্য বাস্তব ও স্কেলার সংখ্যা হলে $k\vec{A}$ হচ্ছে $\vec{A}$ ভেক্টরের একটি স্কেলার গুণিতক যার দৈর্ঘ্য হচ্ছে $\vec{A}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের $|k|$ গুন এবং ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

চিত্রে ভেক্টরগুলি $\vec{A}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক। দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল অথবা একই রেখায় হলে তারা একে অপরের স্কেলার গুণিতক হয়।



তিনটি ভেক্টরের সমতলীয় হবার শর্ত:

(i) যদি দুইটি অসমরেখ ভেক্টর $\vec{a},\vec{b}$ এর সাথে যেকোন ভেক্টর $\vec{r}$ একই সমতলে থাকে তবে $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}$ অনন্য আকারে প্রকাশ করা যাবে যেখানে x এবং y যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

(ii) যদি $x_1\vec{a}+y_1\vec{b}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$ এবং $\vec{a}$, $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় অসমরেখ হয় তবে $x_1=x_2$, $y_1=y_2$

(iii) যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হয় তবে যেকোন একটি ভেক্টরকে অপর দুটি ভেক্টরের রৈখিক সমবেশ আকারে প্রকাশ করা যাবে।

(iv) যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টরত্রয় অসমতলীয় হয় তবে যেকোন ভেক্টর $\vec{r}$ কে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টরত্রয়ের রৈখিক সমবেশ আকারে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ যেখানে x, y, z-এর কমপক্ষে একটি অশূন্য স্কেলার রাশি।

একগুচ্ছ ভেক্টরের রৈখিকভাবে স্বাধীন অথবা অধীন হওয়ার শর্ত:

(i) n সংখ্যক ভেক্টরসমূহ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$, ---- $\vec{a_n}$ রৈখিকভাবে অধীন হবে যদি $x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+x_3\vec{a_3}+\ldots+x_n\vec{a_n}=0$ হয়। যেখানে, $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ যেকোন স্কেলার রাশি যাদের সকলেই শূন্য নয়।

(ii) n সংখ্যক ভেক্টরসমূহ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \ldots \vec{a_n}$ রৈখিকভাবে স্বাধীন এবং $x_1\vec{a}+x_2\vec{a}+\ldots+x_n\vec{a_n}=0$ হয় তবে $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ হবে।

(iii) যদি দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$ সমরেখ হয় (রৈখিকভাবে অধীন) তবে $x\vec{a}+y\vec{b}=0$ হয়। যেখানে x, y যেকোন স্কেলার রাশি এবং $x\neq 0, y\neq 0$।

(iv) যদি দুইটি ভেক্টর $\vec{a},\vec{b}$ অসমরেখ (রৈখিকভাবে স্বাধীন) এবং $x\vec{a}+y\vec{b}=0$ হয় তবে $x=0, y=0$ হবে।

(v) যদি তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ সমতলীয় হয় (রৈখিকভাবে অধীন) তবে $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0$ হবে। যেখানে x, y, z যেকোন স্কেলার রাশি এবং কমপক্ষে যেকোন দুটি স্কেলারের মান অশূন্য।

(vi) যদি তিনটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ অসমতলীয় (রৈখিকভাবে স্বাধীন) এবং $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0$ হয় তবে $x=y=z=0$ হবে।

(vii) যদি $x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}=y_1\vec{a}+y_2\vec{b}+y_3\vec{c}$ এবং $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ অসমতলীয় হয় তবে $x_1=y_1$, $x_2=y_2$ এবং $x_3=y_3$ হবে।

(viii) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$। $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0$ এবং $x+y+z=0$ হয়। যেখানে x, y, z যেকোন স্কেলার রাশি এবং কমপক্ষে যেকোন দুটি স্কেলার রাশির মান অশূন্য।

(ix) চারটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$। $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ বিন্দু চারটি সমতলীয় হবে যদি এবং কেবল যদি $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+t\vec{d}=0$ এবং $x+y+z+t=0$ যেখানে x, y, z, t যেকোন স্কেলার রাশি এবং কমপক্ষে দুটি স্কেলার রাশির মান অশূন্য।

(x) যদি $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ এবং $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় রৈখিকভাবে অধীন (সমতলীয়) ভেক্টর হয় তবে

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \text{ হবে।}$$

(xi) ধরি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ অসমতলীয় ভেক্টর। তবে $x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c}$, $x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c}$ এবং $x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হবে যদি এবং কেবল যদি $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0$ হয়।

ত্রিভুজ সংক্রান্ত কিছু গুরুত্বপূর্ণ বিন্দুসমূহের অবস্থান ভেক্টর:

যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ যথাক্রমে ΔABC-এর A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হয় তবে

(i) ΔABC-এর (G) ভরকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর হবে, $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(ii) ΔABC-এর (I) অন্তঃকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর হবে, $\dfrac{(BC)\vec{a}+(CA)\vec{b}+(AB)\vec{c}}{BC+CA+AB}$

(iii) ΔABC-এর (H) লম্ববিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে, $\dfrac{\vec{a}(\tan A)+\vec{b}(\tan B)+\vec{c}(\tan C)}{\tan A+\tan B+\tan C}$

(iv) ΔABC-এর (O) পরিকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর হবে, $\dfrac{\vec{a}(\sin 2A)+\vec{b}(\sin 2B)+\vec{c}(\sin 2C)}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$

একগুচ্ছ অবস্থান ভেক্টরের ভরকেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র:

(i) ধরি n সংখ্যক বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$, ------ $\vec{a_n}$। যদি $\vec{\bar{a}}$ ভরকেন্দ্র বা ভারকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর হয় তবে

$$\vec{\bar{a}}=\frac{\vec{a_1}+\vec{a_2}+\vec{a_3}+\ldots+\vec{a_n}}{n}$$

(ii) ধরি, m_1, m_2, m_3, -----, m_n যেকোন স্কেলার রাশি যথাক্রমে $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$, ... $\vec{a_n}$ অবস্থানে ভেক্টরের সাথে সংশ্লিষ্ট। যদি $m_1\vec{a_1}, m_2\vec{a_2}, m_3\vec{a_3}$ ......$m_n\vec{a_n}$ ভেক্টরগুচ্ছের ভরকেন্দ্র বা ভারকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{x}$ হয় তবে

$$\vec{x} = \frac{m_1\vec{a_1} + m_2\vec{a_2} + m_3\vec{a_3} + ... + m_n\vec{a_n}}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n}$$

(iii) যদি $m_1, m_2, m_3.....,m_n$ ভর প্রকাশ করে তবে $\vec{x}$, ভরকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর এবং যদি $m_1, m_2, m_3 .... ,m_n$ওজন প্রকাশ করে তবে $\vec{x}$ ভারকেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর প্রকাশ করে।

☛ **দুইটি অবস্থান ভেক্টরের বিভক্তিকরণ বিধি:**

(i) ধরি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$। AB রেখার উপর P এমন একটি বিন্দু যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$। যদি P বিন্দুটি, AB রেখাকে m:n অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে

$A(\vec{a})\ m\ P(\vec{r})\ n\ B(\vec{b})$ তবে $\vec{r} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m + n}$

(ii) যদি P বিন্দুটি,AB রেখাকে λ : 1 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তবে $\vec{r} = \dfrac{\lambda\vec{b} + \vec{a}}{\lambda + 1}$ $A(\vec{a})\ \lambda\ P(\vec{r})\ 1\ B(\vec{b})$

(iii) যদি P বিন্দুটি, AB রেখাকে μ : (1 – μ) অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তবে $\vec{r} = \mu\vec{b} + (1 - \mu)\vec{a}$ $A(\vec{a})\ \mu\ P(\vec{r})\ 1-\mu\ B(\vec{b})$

(iv) যদি P বিন্দুটি, AB রেখার মধ্য বিন্দু হয় তবে $\vec{r} = \dfrac{\vec{b} + \vec{a}}{2}$

$A(\vec{a})\ 1\ P(\vec{r})\ 1\ B(\vec{b})$

(v) যদি P বিন্দুটি, AB রেখাকে m:n অনুপাতে B বিন্দুর দিকে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত করে তবে , $\vec{r} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$, m > n $A(\vec{a})\quad B(\vec{b})\quad P(\vec{r})$ AP : BP = m : n

(vi) যদি P বিন্দুটি , AB রেখাকে m:n অনুপাতে A বিন্দুর দিকে বহিস্থভাবে বিভক্ত করে তবে $\vec{r} = \dfrac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n - m}$, m < n

$P(\vec{r})\quad A(\vec{a})\quad B(\vec{b})$
AP : BP = m : n

(vii) যদি P বিন্দুটি AB রেখাকে λ : 1 অনুপাতে B বিন্দুর দিকে বহিস্থভাবে বিভক্ত করে তবে $\vec{r} = \dfrac{\lambda\vec{b} - \vec{a}}{\lambda - 1}$, λ > 1

$A(\vec{a})\quad B(\vec{b})\quad P(\vec{r})$
AP : BP = λ : 1

(viii) যদি P বিন্দুটি,AB রেখাকে λ : 1 অনুপাতে A বিন্দুর দিকে বহিস্থভাবে বিভক্ত করে তবে $\vec{r} = \dfrac{\vec{a} - \lambda\vec{b}}{1 - \lambda}$, λ < 1

$P(\vec{r})\quad A(\vec{a})\quad B(\vec{b})$
AP : BP = λ : 1

(ix) যদি P বিন্দুটি, AB রেখাকে (λ + 1) : λ অনুপাতে B বিন্দুর দিকে বহিস্থভাবে বিভক্ত করে তবে, $\vec{r} = (1 + \lambda)\vec{b} - \lambda\vec{a}$

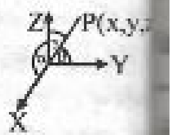
$A(\vec{a})\quad B(\vec{b})\quad P(\vec{r})$
AP : BP = (1 + λ) : λ

(x) যদি P বিন্দুটি, AB রেখাকে λ : (1 + λ) অনুপাতে A বিন্দুর দিকে বহিস্থঃভাবে বিভক্ত করে তবে, $\vec{r} = (1 + \lambda)\vec{a} - \lambda\vec{b}$

$P(\vec{r})\quad A(\vec{a})\quad B(\vec{b})$
AP : BP = λ:(1 + λ)

☛ **অবস্থান ভেক্টর সংক্রান্ত আরও কিছু তথ্যাবলী:**

O মূলবিন্দু এবং P বিন্দুর স্থানাংক = (x, y,z) হলে $\vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ বরাবর একক ভেক্টর $\dfrac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\hat{k} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ যেখানে $\vec{OP}$ ভেক্টরটি x, y, z-অক্ষের সাথে যথাক্রমে α, β, γ কোন উৎপন্ন করে। cosα, cosβ, cosγ কে যথাক্রমে x অক্ষ, y অক্ষ, z অক্ষ বরাবর দিক কোসাইন বলে।



জেনে রাখা ভাল

(i) দুইটি সমরৈখিক ভেক্টরদ্বয় সর্বদাই রৈখিকভাবে অধীন।
(ii) দুইটি অসমরৈখিক ভেক্টরদ্বয় সর্বদাই রৈখিকভাবে স্বাধীন।
(iii) একটি স্থানে তিনটি অসমতলীয় ভেক্টরত্রয় সর্বদাই রৈখিকভাবে স্বা
(iv) একটি স্থানে তিনটি সমতলীয় ভেক্টরত্রয় সর্বদাই রৈখিকভাবে অধীন
(v) একটি স্থানে চারটি অসমতলীয় ভেক্টরসমূহ সর্বদাই রৈখিকভাবে অ
(vi) $\vec{0}$ ভেক্টর ধারণকারী ভেক্টরগুচ্ছ রৈখিকভাবে অধীন।
(vii) যেকোন একটি অশূন্য ভেক্টর রৈখিকভাবে স্বাধীন।

ভেক্টরের ডট বা স্কেলার গুণ

(i) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \pi$

যেখানে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অর্ন্তভুক্ত কোণ θ

(a) $\vec{a}.\vec{b} > 0$ হবে যদি θ সুক্ষকোণ হয়।

(b) $\vec{a}.\vec{b} = 0$ হবে যদি $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(c) $\vec{a}.\vec{b} < 0$ হবে যদি θ স্থূলকোণ হয়।

(d) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ হবে যদি θ = 0 হয়। অর্থাৎ $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্ব সমান্তরাল হয়। এইক্ষেত্রে $\vec{a}.\vec{b}$ এর সর্বাধিক মান পাওয়া যাবে।

(e) $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ হবে যদি θ = π হয় অর্থাৎ $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ বিসদৃশ সমান্তরাল হয়। এইক্ষেত্রে $\vec{a}.\vec{b}$ এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে

(f) $-|\vec{a}||\vec{b}| \le \vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$

(g) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

(h) $\hat{a}$ এবং $\hat{b}$ একক ভেক্টর হয় তবে $-1 \le \hat{a}.\hat{b} \le 1$

(i) $(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$ বা $\vec{a}.(\vec{a}.\vec{b})$ আকারে প্রকাশ করা অর্থহীন।

(ii) যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ হয় তবে

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \le 1$$

$\vec{a}.\vec{b} = 0$ হলে অর্থাৎ $\vec{a} \perp \vec{b}$ হলে $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

$\vec{a}.\vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$ হলে অর্থাৎ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ হলে $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$|\vec{a}|^2 = \vec{a}.\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + b^2 + 2(\vec{a}.\vec{b})$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 + b^2 - 2(\vec{a}.\vec{b})$

$\hat{a}$ এবং $\hat{b}$ দুইটি একক ভেক্টর এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে

$|\hat{a} + \hat{b}| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ এবং $|\hat{a} - \hat{b}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$

$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(\vec{a}.\vec{b}) + 2(\vec{b}.\vec{c}) + 2(\vec{c}.\vec{a})$

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2\{|\vec{a}| + |\vec{b}|\}^2$

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4(\vec{a}.\vec{b})$

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

যদি $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে

$\cos\theta = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \hat{a}.\vec{b}$

$\vec{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\hat{b}$

$\vec{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ ভেক্টর $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = (\hat{a}.\vec{b})\hat{a}$

$\vec{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{a}$ ভেক্টরের উপাংশ ভেক্টর $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = (\vec{a}.\hat{b})\hat{b}$

$\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব দিক বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ ভেক্টর

$= \vec{b} - (\hat{a}.\vec{b})\hat{a} = \vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

$\vec{b}$ ভেক্টরের লম্ব দিক বরাবর $\vec{a}$ ভেক্টরের উপাংশ ভেক্টর

$= \vec{a} - (\vec{a}.\hat{b})\hat{b} = \vec{a} - \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

$\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব দিক বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ

$= |\vec{b} - (\hat{a}.\vec{b})\hat{a}| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)^2}$

$\vec{b}$ ভেক্টরের লম্ব দিক বরাবর $\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ

$= |\vec{a} - (\vec{a}.\hat{b})\hat{b}| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)^2}$

$\frac{\vec{b}\text{-এর দিকে } \vec{a} \text{ ভেক্টরের অভিক্ষেপ}}{\vec{a}\text{-এর দিকে } \vec{b} \text{ ভেক্টরের অভিক্ষেপ}} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরের x অক্ষ বরাবর লম্ব অভিক্ষেপ x, y অক্ষ বরাবর অভিক্ষেপ y এবং z অক্ষ বরাবর লম্ব অভিক্ষেপ z হবে।

অর্থাৎ $\vec{r}.\hat{i} = x$, $\vec{r}.\hat{j} = y$ এবং $\vec{r}.\hat{k} = z$

(k) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরের x অক্ষ বরাবর উপাংশ $x\hat{i}$, y অক্ষ বরাবর উপাংশ $y\hat{j}$ এবং z অক্ষ বরাবর উপাংশ $z\hat{k}$।

অর্থাৎ $(\vec{r}.\hat{i})\hat{i} = x\hat{i}$, $(\vec{r}.\hat{j})\hat{j} = y\hat{j}$ এবং $(\vec{r}.\hat{k})\hat{k} = z\hat{k}$

(iv) $\vec{r}$ যেকোনো অশূন্য ভেক্টর হলে $\vec{r} = (\vec{r}.\hat{i})\hat{i} + (\vec{r}.\hat{j})\hat{j} + (\vec{r}.\hat{k})\hat{k}$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

(v) যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে থাকে তবে $\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{c} \end{vmatrix} = 0$ হবে।

(vi) যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় অসমতলীয় এবং $\vec{r}$ অন্য যেকোনো ভেক্টর হয় তবে

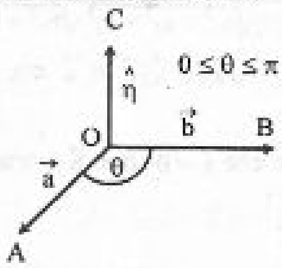
$$\begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{r}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{a} & \vec{c}.\vec{a} \\ \vec{r}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{c}.\vec{b} \\ \vec{r}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} & \vec{c}.\vec{c} \end{vmatrix} = 0$$

(vii) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$; $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

ভেক্টরের ক্রস বা ভেক্টর গুণন

(i) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{\eta}$, $0 \le \theta \le \pi$

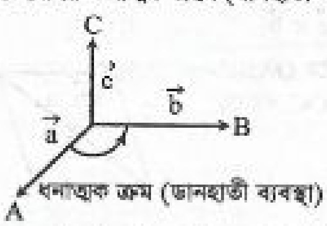
যেখানে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ



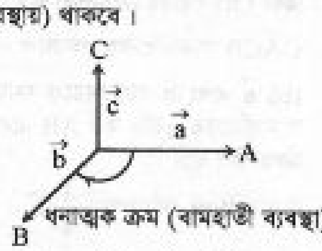
এবং $\hat{\eta}$ হলো $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয়ের উপর লম্ব এমন একটি একক ভেক্টর যেন $\vec{a}, \vec{b}, \hat{\eta}$ ভেক্টরত্রয় ধনাত্মক ক্রমে থাকে।

(a) যদি C বিন্দু হতে পর্যবেক্ষণ করা হয় যে, OA হতে OB এর অভিমুখে 180° থেকে বেশি নয় কোণে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরানো হয় তবে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় ধনাত্মক ক্রমে (ডানহাতী ব্যবস্থায়) থাকবে।

(b) যদি C বিন্দু হতে পর্যবেক্ষণ করা হয় যে, OA হতে OB এর অভিমুখে 180° থেকে বেশি নয় কোণে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরানো হয় তবে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় ঋনাত্মক ক্রমে (বামহাতী ব্যবস্থায়) থাকবে।



ধনাত্মক ক্রম (ডানহাতী ব্যবস্থা)



ধনাত্মক ক্রম (বামহাতী ব্যবস্থা)

(c) যদি $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ অথবা $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$ অথবা $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ হয় তবে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় ধনাত্মক ক্রমে (ডানহাতী ব্যবস্থায়) আছে অন্যথায় $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় ধনাত্মক ক্রমে (বামহাতী ব্যবস্থায়) আছে।

(ii) $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}|\hat{\eta}$ অর্থাৎ $\hat{\eta} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টর।

(iii) যেহেতু $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব সুতরাং $\vec{a}.(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}.(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

(iv) যদি কোন ভেক্টর c-এর মান λ এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব হয় তবে $\vec{c} = \pm \lambda \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

(v) যদি কোন ভেক্টর c-এর মান λ এবং ABC সমতলের উপর লম্ব হয় তবে

$$\vec{c} = \pm \lambda \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

(vi) কোন সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সংখ্যা সর্বদাই দুই হবে।

(vii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

(viii) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

(ix) যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ হয় তবে,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\hat{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\hat{k}$$

(x) যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হয় তবে,

$$\sin\theta = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

(xi) যদি $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ বা $\vec{b} = \mu\vec{a}$ বা $\vec{a} \| \vec{b}$ বা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় সমরেখ হয় তবে $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

(xii) যদি $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ হয় তবে $\vec{a} = 0$ অথবা $\vec{b} = 0$ অথবা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল বা সমরেখ।

(xiii) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

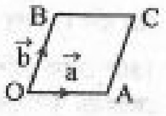
(xiv) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2b^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} \end{vmatrix}$

(xv) যদি $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ হয় তবে $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

(xvi) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

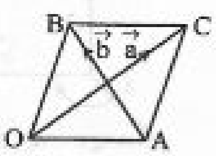
এবং $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$

(xvii) (a) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়কে যথাক্রমে OABC সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু OA এবং OB বরাবর ক্রিয়াশীল ধরে



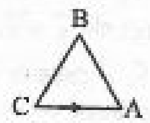
OACB সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

(b) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়কে যথাক্রমে OABC সামন্তরিকের দুইটি কর্ণ AB এবং OC বরাবর ক্রিয়াশীল ধরে।



সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

(c) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়কে যথাক্রমে ΔABC এর CA এবং CB বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল ধরে ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$



(d) যদি ΔABC-এর A, B, C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে ... $\vec{c}$ হয় তবে ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$

(xviii) ধরি, তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$। যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ সমরেখ হয় তবে $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$

(xix) যদি $\vec{c} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$ হয় তবে $\vec{c} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ যখন $\vec{c} \neq \vec{a}$ এবং ...

তিনটি ভেক্টরের ডট গুণন (জেনে রাখা ভালো)

(i) তিনটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -এর স্কেলার ট্রিপল গুণন $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

(ii) যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}, \vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j}$ ... হয় তবে $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}).\vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$ সামান্তরিকার ঘনবস্তুর আয়তন

যার সন্নিহিত বাহুত্রয় $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$।

(iii) $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}] = [\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}] = [\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}] = 1$

(iv) স্কেলার ট্রিপল গুণন, ডট এবং ক্রস গুণনের অবস্থানের উপর অনির্ভর...

(v) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b}) = [\vec{c}$ ...
$= (\vec{c} \times \vec{a}).\vec{b} = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c})$ ...

(vi) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a}.(\vec{c} \times \vec{b}) = -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$
$= -(\vec{c} \times \vec{b}).\vec{a} = -[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}] = -(\vec{b} \times \vec{a}).\vec{c} = -\vec{b}.(\vec{a} \times \vec{c}) = -[\vec{b}$ ...

(vii) যদি $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] > 0$ হয় তবে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় ধনাত্মক ক্রমে বা (ডানহাতী ব্যবস্থায়) থাকবে।

(viii) যদি $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] < 0$ হয় তবে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় ঋণাত্মক ক্র... (বামহাতী ব্যবস্থায়) থাকবে।

(ix) যদি $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$ হয় তবে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয়ে সমতলীয় হবে... যেকোনো দুইটি ভেক্টর সমান বা সমান্তরাল বা সমরেখ হয়।

যেমন: $[\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}] = [\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{a}] = [\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{a}] = [\vec{b}$ ...
$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{a}] = [\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}]$
$= [\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{c}] = [\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{c}\ \vec{c}\ \vec{b}] = [\vec{c}\ \vec{c}\ \vec{c}]$
$= [\vec{c}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{c}] = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{c}] = [\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c}] = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{a}]$
$= [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{a}] = [\vec{a}\ \lambda\vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{b}] = [\lambda\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{b}]$
$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{b}] = [\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{a}] = [\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}] = [\vec{b}\ \vec{a}\ \lambda\vec{a}]$
$= [\vec{b}\ \lambda\vec{a}\ \vec{a}] = [\vec{b}\ \lambda\vec{b}\ \vec{a}] = [\lambda\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{a}] = [\vec{b}\ \vec{a}\ \lambda\vec{b}]$
$= [\lambda\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\lambda\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{a}] = [\vec{a}\ \lambda\vec{a}\ \vec{a}] = [\vec{a}\ \vec{a}\ \lambda\vec{a}]$
$= [\lambda\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \lambda\vec{b}\ \vec{b}] = [\vec{b}\ \vec{b}\ \lambda\vec{b}] = [\vec{a}\ \mu\vec{a}\ \lambda\vec{a}]$
$= [\mu\vec{a}\ \vec{a}\ \lambda\vec{a}] = [\mu\vec{a}\ \lambda\vec{a}\ \vec{a}] = [\vec{b}\ \mu\vec{b}\ \lambda\vec{b}] = [\mu\vec{b}\ \vec{b}\ \lambda\vec{b}]$
$= [\mu\vec{b}\ \lambda\vec{b}\ \vec{b}] = [\vec{a}\ \vec{b}\ \mu\vec{a} + \lambda\vec{b}] = [\vec{a}\ \mu\vec{a} + \lambda\vec{b}\ \vec{b}]$
$= [\mu\vec{a} + \lambda\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{b}] = 0$

যদি $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ এবং $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ অশূন্য ভেক্টর হয় তবে $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$

চারটি বিন্দু A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ।

যদি A, B, C, D বিন্দু চতুষ্টয় সমতলীয় হয় তবে $\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right] = 0$

$[\vec{a} + \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}] = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}] + [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]$

যদি $\vec{a} = a_1\vec{l} + a_2\vec{m} + a_3\vec{n}$, $\vec{b} = b_1\vec{l} + b_2\vec{m} + b_3\vec{n}$

$\vec{c} = c_1\vec{l} + c_2\vec{m} + c_3\vec{n}$ হয় তবে $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{l}\ \vec{m}\ \vec{n}]$

যেখানে $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ ভেক্টরত্রয় অসমতলীয় ।

একটি চতুস্তলকের তিনটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হলে চতুস্তলকের আয়তন $= \frac{1}{6}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

ত্রিভুজাকার ভূমিবিশিষ্ট একটি প্রিজমের তিনটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হলে প্রিজমের আয়তন $= \frac{1}{2}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{c}.\vec{a} & \vec{c}.\vec{b} & \vec{c}.\vec{c} \end{vmatrix}$$

তিনটি ভেক্টরের ক্রস গুণন (অজানাকে রাখা জানো)

তিনটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এর ভেক্টর ট্রিপল গুণন $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ এবং $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় । অর্থাৎ $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতল গঠন করে $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ভেক্টর ঐ সমতলে অবস্থিত ।

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় । অর্থাৎ $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতল গঠন করে $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ভেক্টর ঐ সমতলে অবস্থিত ।

$\vec{a}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় অসমরেখ অর্থাৎ $\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c}) \neq 0$ হলে,
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$\vec{a}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় সমরেখ অর্থাৎ $\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c}) = 0$ হলে,
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

$\hat{i}\times(\hat{j}\times\hat{k}) = \hat{k}\times(\hat{i}\times\hat{j}) = \hat{j}\times(\hat{k}\times\hat{i}) = 0$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ভেক্টর $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর লম্ব এবং $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে সমতলীয় ।

একটি ভেক্টরের মান λ । যদি ভেক্টরটি $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর লম্ব এবং $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে সমতলীয় হয় তবে ভেক্টরটি হবে, $\pm\lambda\frac{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})|}$

$\vec{r}$ যেকোনো অশূন্য ভেক্টর হলে,
$\hat{i}\times(\vec{r}\times\hat{i}) + \hat{j}\times(\vec{r}\times\hat{j}) + \hat{k}\times(\vec{r}\times\hat{k}) = 2\vec{r}$

$\vec{a}$ ভেক্টরের লম্বদিকে $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ ভেক্টর হবে, $\frac{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})}{|\vec{a}|^2}$

চারটি ভেক্টরের ডট গুণন (অজানাকে জানো)

(i) চারটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$-এর স্কেলার গুণন $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$

(iii) $|\hat{i}\times\vec{a}|^2 + |\hat{j}\times\vec{a}|^2 + |\hat{k}\times\vec{a}|^2 = 2|\vec{a}|^2$

চারটি ভেক্টরের ক্রস গুণন(অজানাকে জানো)

(i) চারটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$-এর ভেক্টর গুণন $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{d}$

(iii) যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এবং $\vec{d}$ ভেক্টর চতুষ্টয় সমতলীয় হয় তবে
(a) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = 0$
(b) $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) \neq 0$

(iv) যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় অসমতলীয় হয় তবে যেকোনো অশূন্য ভেক্টর

$$\vec{r} = \frac{[\vec{r}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{a} + [\vec{a}\ \vec{r}\ \vec{c}]\vec{b} + [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{r}]\vec{c}}{[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]}$$

- **ভেক্টর সমূহের বিপরীতকরণ(Reciprocal System)[জেনে রাখা ভালো]**

(i) যদি $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ অসমতলীয় ভেক্টরসমূহ যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ অসমতলীয় ভেক্টরসমূহের বিপরীত ভেক্টর হয় তবে $\vec{a}' = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]}$, $\vec{b}' = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]}$ এবং $\vec{c}' = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]}$

(ii) $\vec{a}.\vec{a}' = \vec{b}.\vec{b}' = \vec{c}.\vec{c}' = 1$

(iii) $\vec{a}.\vec{b}' = \vec{b}.\vec{c}' = \vec{c}.\vec{a}' = \vec{a}.\vec{c}' = \vec{b}.\vec{a}' = \vec{c}.\vec{b}' = 0$

(iv) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}][\vec{a}'\ \vec{b}'\ \vec{c}'] = 1$

(v) $\hat{i} = \hat{i}', \hat{j} = \hat{j}', \hat{k} = \hat{k}'$

ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রয়োগ

সরলরেখা (জেনে রাখা ভালো)

(i) $A(\vec{a})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, $(\vec{r} - \vec{a})\times\vec{b} = 0$ বা $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ .... (1)
যেখানে λ কোনো স্কেলার রাশি ।

(a) যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ এবং $\vec{b} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ হয় তবে (1) নং সরলরেখার সমতুল্য কার্তেসীয় আকার,
$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

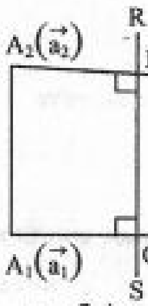
(b) যদি সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হয় তবে তার সমীকরণ, $\vec{r} = \lambda\vec{b}$ যেখানে λ অশূন্য স্কেলার রাশি ।

(ii) $A(\vec{a})$ এবং $B(\vec{b})$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,
$(\vec{r}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{a})=0$ বা $\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$
বা $\vec{r}=(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}$ যেখানে λ অশূন্য স্কেলার রাশি .... (2)

(a) যদি $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$ এবং $\vec{b}=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}$ হয় তবে (2) নং সরলরেখার সমতুল্য কার্তেসীয় আকার, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

(iii) যদি $\vec{r}=\vec{a_1}+\mu\vec{b_1}$ এবং $\vec{r}=\vec{a_2}+\lambda\vec{b_2}$ ভেক্টর সমীকরণ বিশিষ্ট সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হয় তবে $\cos\theta=\frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$, $0\le\theta\le\pi$

(iv) দুইটি তীর্যক সরলরেখা (Skew lines) $\vec{r}=\vec{a_1}+\lambda\vec{b_1}$ এবং $\vec{r}=\vec{a_2}+\mu\vec{b_2}$ -এর মধ্যকার সর্বনিম্ন দূরত্ব, $d=\frac{(\vec{a_2}-\vec{a_1}).(\vec{b_1}\times\vec{b_2})}{|\vec{b_1}\times\vec{b_2}|}$



$$\hat{\eta}=\frac{\vec{b_1}\times\vec{b_2}}{|\vec{b_1}\times\vec{b_2}|}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\hat{PQ}=\frac{\vec{PQ}}{|\vec{PQ}|}$$

এখানে তীর্যক সরলরেখাদ্বয়ের সর্বনিম্ন দূরত্ব (Shortest distance)
$=PQ=\vec{A_1A_2}$ ভেক্টরের $\vec{PQ}$ ভেক্টর বরাবর লম্ব-অভিক্ষেপ $=\vec{A_1A_2}.\hat{PQ}$
নোট: দুইটি অসমান্তরাল সরলরেখা ছেদ করবে যদি তাদের মধ্যকার সর্বনিম্ন দূরত্ব শূন্য হয়।

(v) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত অন্তঃস্থকোণের সমদ্বিখণ্ডক বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{c}=\dfrac{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}{\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|}$

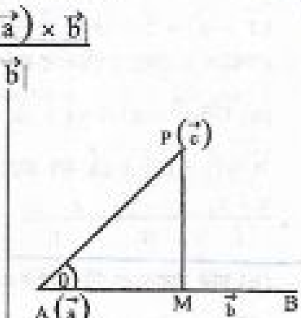
(vi) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত বহিঃস্থকোণের সমদ্বিখণ্ডক বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{c}=\dfrac{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\sim\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}}{\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\sim\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|}$

(vii) $P(\vec{c})$ বিন্দু হতে, $A(\vec{a})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

$\sin\theta=\frac{PM}{AP}\Rightarrow PM=AC\sin\theta$

$\therefore|\vec{PM}|=\left|\vec{AC}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$

$=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$



(viii) $P(\vec{c})$ বিন্দু হতে, $A(\vec{a})$ এবং $B(\vec{b})$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল... লম্ব দূরত্ব $=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{a})|}{|\vec{b}-\vec{a}|}$

(ix) $\vec{A}(\vec{a})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ, $(\vec{r}-\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})=0$ বা $\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}\times\vec{c})$...
যেখানে, λ যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

(x) $\vec{A}(\vec{a})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত ... কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, $(\vec{r}-\vec{a})\times(\hat{b}+\hat{c})$...
বা, $\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\hat{b}+\hat{c})$ বা $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)$ ......(4)
যেখানে λ যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

(xi) $\vec{A}(\vec{a})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AB}=\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের অ... বহিঃস্থঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,
$(\vec{r}-\vec{a})\times\mu(\hat{c}\sim\hat{b})=0$ বা $\vec{r}=\vec{a}+\mu(\hat{c}\sim\hat{b})$
বা $\vec{r}=\vec{a}+\mu\left(\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\sim\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$.........(5)
যেখানে μ যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

সমতল (অজানাকে জানো)

(i) $A(\vec{a})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ অসমরেখ ভেক্টরদ্বয়ের প্রত্যেকের ... সমান্তরাল সমতলের সমীকরণ $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{c})=0$ বা $[\vec{r}$ ... $=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ বা $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$, যেখানে μ এবং λ যেকোন ... স্কেলার রাশি।

(ii) তিনটি অসমরেখ $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ বিন্দুগামী সমতলের সমী... $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})=0$ বা $\vec{r}.(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{a}\times$ ... $=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ বা $\vec{r}=(1-\mu-\lambda)\vec{a}+\mu\vec{b}+\lambda\vec{c}$, যেখানে μ এ... যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

(iii) $\vec{A}(\vec{a})$ এবং $\vec{B}(\vec{b})$ বিন্দুদ্বয়গামী এবং $\vec{c}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সম... সমীকরণ, $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}=0$ বা $\vec{r}.(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})=[\vec{a}$ ...
বা $\vec{r}=(1-\mu)\vec{a}+\mu\vec{b}+\lambda\vec{c}$, যেখানে μ এবং λ যেকোন অশূন্য ... রাশি।

(iv) $\vec{A}(\vec{a})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{n}$ ভেক্টরের উপর লম্ব সমতলের সমীকরণ
$\vec{r}.\vec{n}=\vec{a}.\vec{n}$

(v) মূলবিন্দু হতে কোন সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব p এবং এই সমতলের ... লম্ব একক ভেক্টর $\hat{n}$ হলে সমতলটির সমীকরণ, $\vec{r}.\hat{n}=p$। যদি মূল... সমতলটির উপর অবস্থিত হয় তবে $p=0$ অর্থাৎ $\vec{r}.\hat{n}=0$ অর্থাৎ $\vec{r}.\vec{n}=$

$\vec{C}(\vec{c})$ বিন্দুগামী এবং $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ সরলরেখা ধারণকারী সমতলের সমীকরণ $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}=0$

বা $\vec{r}.(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b})=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ সরলরেখা এবং $\vec{c}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সমতলের সমীকরণ,

$(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{c})=0$ বা $[\vec{r}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ সরলরেখা ধারণকারী এবং $\vec{r}.\vec{c} = p$ সমতলের উপর লম্ব সমতলের সমীকরণ, $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{c})=0$ বা $[\vec{r}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ এবং $\vec{r} = \vec{a'} + \mu\vec{b'}$ সমতলীয় সরলরেখাদ্বয় ধারণকারী সমতলের সমীকরণ $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{b}\times\vec{b'})=0$ বা $[\vec{r}\,\vec{b}\,\vec{b'}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{b'}]$

$\vec{r}.\vec{n_1} = q_1$ এবং $\vec{r}.\vec{n_2} = q_2$ সমতলদ্বয়ের ছেদরেখাগামী যেকোন সমতলের সমীকরণ, $(\vec{r}.\vec{n_1}-q_1)+\lambda(\vec{r}.\vec{n_2}-q_2)=0$ যেখানে λ যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

$\vec{r}.\vec{n_1} = q_1$ এবং $\vec{r}.\vec{n_2} = q_2$ সমতলদ্বয়ের ছেদরেখার সমীকরণ,

$\vec{r} = l_1\vec{n_1} + l_2\vec{n_2} + \lambda(\vec{n_1}\times\vec{n_2})$ যেখানে, λ যেকোন অশুন্য স্কেলার রাশি

এবং $l_1 = \dfrac{q_1 n_2^2 - q_2(\vec{n_1}.\vec{n_2})}{n_1^2 n_2^2 - |\vec{n_1}.\vec{n_2}|^2}$; $l_2 = \dfrac{q_2 n_1^2 - q_1(\vec{n_1}.\vec{n_2})}{n_1^2 n_2^2 - |\vec{n_1}.\vec{n_2}|^2}$

$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ এবং $\vec{r} = \vec{a_2} + t\vec{b_2}$ সরলরেখাদ্বয় সমতলীয় এবং ছেদ করবে যদি এবং কেবল যদি $[\vec{a_1}\vec{b_1}\vec{b_2}] = [\vec{a_2}\vec{b_1}\vec{b_2}]$ হয়।

মূলবিন্দু হতে $\vec{A}(\vec{a}), \vec{B}(\vec{b}), \vec{C}(\vec{c})$ বিন্দুত্রয়গামী সমতলের উপর লম্ব

দূরত্ব $= \dfrac{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]}{|\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}|}$

$\vec{r}.\vec{n_1} = q_1$ এবং $\vec{r}.\vec{n_2} = q_2$ সমতলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\theta = \cos^{-1}\left\{\dfrac{\vec{n_1}.\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}\right\}$

$\vec{r}.\vec{n} = q$ সমতল এবং $\vec{r} = a + \lambda\vec{b}$ সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\theta = \sin^{-1}\left\{\dfrac{\vec{n}.\vec{b}}{|\vec{n}|\,|\vec{b}|}\right\}$

x অক্ষ, y অক্ষ, z অক্ষ দ্বারা $\vec{r}.\vec{n} = q$ সমতলের ছেদিত অংশ যথাক্রমে $\dfrac{q}{\hat{i}.\vec{n}}, \dfrac{q}{\hat{j}.\vec{n}}, \dfrac{q}{\hat{k}.\vec{n}}$

$\vec{A}(\vec{a})$ বিন্দু হতে $\vec{r}.\vec{n} = q$ সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{q-\vec{a}.\vec{n}}{|\vec{n}|}$ এবং

লম্ব দূরত্ব ভেক্টর $= \left\{\dfrac{q-\vec{a}.\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right\}\vec{n}$

$\vec{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল বরাবর $\vec{A}(\vec{a})$ বিন্দু হতে $\vec{r}.\vec{n} = q$

সমতলের দূরত্ব $= \left(\dfrac{q-\vec{a}.\vec{n}}{\vec{b}.\vec{n}}\right)|\vec{b}|$

(xix) $\vec{r}.\vec{n_1} = q_1$ এবং $\vec{r}.\vec{n_2} = q_2$ সমতলদ্বয়ের অন্তঃস্থকোণের সমদ্বিখণ্ডক সমতলের সমীকরণ, $\vec{r}.\left(\dfrac{\vec{n_1}}{|\vec{n_1}|}-\dfrac{\vec{n_2}}{|\vec{n_2}|}\right)=\dfrac{q_1}{|\vec{n_1}|}-\dfrac{q_2}{|\vec{n_2}|}$ এবং বহিস্থঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক সমতলের সমীকরণ, $\vec{r}.\left(\dfrac{\vec{n_1}}{|\vec{n_1}|}+\dfrac{\vec{n_2}}{|\vec{n_2}|}\right)=\dfrac{q_1}{|\vec{n_1}|}+\dfrac{q_2}{|\vec{n_2}|}$

(xx) $\vec{r}.\vec{n} = q$ সমতলের উপর $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ সরলরেখার অভিক্ষেপ রেখার সমীকরণ $\vec{r} = \left\{\vec{a}+\dfrac{(q-\vec{a}.\vec{n})\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\right\}+\mu\left\{\vec{b}-\dfrac{(\vec{b}.\vec{n})\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\right\}$

যেখানে μ যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

(xxi) $\vec{r}.\vec{n} = q$ সমতলের সাপেক্ষে $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ সরলরেখার প্রতিবিম্ব রেখার সমীকরণ $\vec{r} = \left\{\vec{a}+\dfrac{2(q-\vec{a}.\vec{n})\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\right\}+t\left\{\vec{b}-\dfrac{2(\vec{b}.\vec{n})\vec{n}}{\vec{n}.\vec{n}}\right\}$

যেখানে t যেকোন অশূন্য স্কেলার রাশি।

গোলক (অজানাকে জানো)

(i) $\vec{C}(\vec{c})$ কেন্দ্র বিশিষ্ট এবং a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের ভেক্টর সমীকরণ, $|\vec{r}-\vec{c}| = a$ বা, $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c} + |\vec{c}|^2 - a^2 = 0$

বা, $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c} + k = 0$ যেখানে, $k = |\vec{c}|^2 - a^2$

বিশেষ ক্ষেত্র:

(a) যদি মূলবিন্দু গোলকটির তলের উপর অবস্থান করে তবে গোলকের ভেক্টর সমীকরণ $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c} = 0$ অর্থাৎ $k = |\vec{c}|^2 - a^2 = 0$ হবে।

(b) যদি মূলবিন্দু গোলকটির কেন্দ্র হয় তবে গোলকের ভেক্টর সমীকরণ, $|\vec{r}| = |\vec{a}|$

(ii) $A(\vec{c})$ এবং $A(\vec{b})$ বিন্দুদ্বয়কে গোলকের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে গোলকের ভেক্টর সমীকরণ $(\vec{r}-\vec{a}).(\vec{r}-\vec{b}) = 0$ যার কেন্দ্র $= \left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \dfrac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$

(iii) $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c_1} + k_1 = 0$ এবং $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c_2} + k_2 = 0$ গোলকদ্বয়ের ছেদগামী যেকোন গোলকের ভেক্টর সমীকরণ,

$\left\{|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c_1} + k_1\right\} + \lambda\left\{|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c_2} + k_2\right\} = 0$

বা, $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\dfrac{(\vec{c_1}+\lambda\vec{c_2})}{1+\lambda} + \dfrac{k_1+\lambda k_2}{1+\lambda} = 0$ যেখানে λ যেকোন স্কেলার রাশি।

(iv) $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c_1} + k_1 = 0$ এবং $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c_2} + k_2 = 0$ গোলকদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করবে যদি এবং কেবল যদি $2\vec{c_1}.\vec{c_2} = k_1 + k_2$

বা, $2\vec{c_1}.\vec{c_2} = |\vec{c_1}|^2 - a_1^2 + |\vec{c_2}|^2 - a_2^2 = |\vec{c_1}|^2 + |\vec{c_2}|^2 - (a_1^2 + a_2^2)$

(v) $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c} + k = 0$ গোলকের $A(\vec{a})$ বিন্দুতে স্পর্শকের ভেক্টর সমীকরণ, $\vec{r}.\vec{a} - \vec{c}.(\vec{r}+\vec{a}) + k = 0$

(vi) $\vec{r}.\vec{n} = q$ সমতলটি $|\vec{r}|^2 - 2\vec{r}.\vec{c} + k = 0$ গোলককে স্পর্শ করবে যদি এবং কেবল যদি $\left\{\frac{q - c.n}{|\vec{n}|}\right\}^2 = c^2 - k$ হয়।

(vii) $\vec{r}.\vec{n} = q$ সমতল দ্বারা $|\vec{r}| = a$ গোলকের ছেদিতাংশে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $R = \sqrt{a^2 - \left(\frac{q}{|\vec{n}|}\right)^2}$ এবং গোলকের কেন্দ্র থেকে সমতলের উপর লম্বদূরত্ব হবে, $\frac{q}{|\vec{n}|}$

Calculator Type
ভেক্টর(Vector)

■ **প্রাথমিক আলোচনা:**

$\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ একটি ভেক্টর যার মাত্রা বা dimension হল 3।

$\vec{P}$ ভেক্টরকে

$\vec{P} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$ এর সাথে তুলনা করে পাই

$A_1 = 1$
$A_2 = 2$
$A_3 = 3$

আবার, আরেকটি ভেক্টর কল্পনা করা যাক,

$\vec{Q} = 3\hat{i} - 8\hat{j}$ যার মাত্রা বা dimension হল 2.

এই ভেক্টরকে, $Q = A_1\hat{i} + A_2\hat{j}$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $A_1 = 3$, $A_2 = -8$

➤ **ভেক্টরকে যেভাবে Calculator-এ প্রবেশ করানো হয়:**

Vector এর Operation অনেকটা ম্যাট্রিক্স এর মত।

মনে করি, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টরটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। এর জন্য Calculator কে প্রথমে Vector mode নিতে হবে। তারপর dimension বা মাত্রা (m) এর মান 3 বসাতে হবে। এরপর $A_1 = 2, A_2 = 3, A_3 = 5$ বসাতে হবে।

➤ **MS Series এর বাটন ও Screen চিত্র:**

[MODE] [MODE] [MODE]

EQN	Mat	VCT
1	2	3

Screen [3]

[SHIFT] [5]

Dim	Edit	VCT
1	2	3

Screen [1]

A	B	C
1	2	3

Screen [1]

Screen আসবে	Input দিতে হবে
Vct A (m) m?	[3] [=]
Vct A¹	[2] [=]
Vct A²	[3] [=]
Vct A³	[5] [=]

Calculator এ $\vec{A}$ ভেক্টরটির প্রবেশ সম্পন্ন হল।

Vector টির Component বা উপাদান ঠিক আছে কিনা তা দে[খার] জন্য বাটন চিত্র নিম্নরূপ:



তবে [AC] চাপলে Calculator Screen Clear হবে কিন্তু Ve[ctor] mode অপরিবর্তিত থাকবে।

ES Series:

[MODE]

1: COMP	2: COMPLX
3: SYAT	4: SASEN
5: EQN	6: MATRIX
7: TABLE	8: VECTOR

Screen [8]

[AC] [SHIFT] [5]

1: Dim	2: Data
3: Vct A	4: Vct B
5: Vct C	6: Vct Ans

Screen [1]

Vector ?	
1: Vct A	2: Vct B
3: Vct C	

Screen [1]

Vct A (m)	m ?
1: 3	2 : 2

Screen

A
[0 0 0]
Screen [2] [=] [3] [=] [5]

Vector টির Input ES Series বাটনের চিত্র সম্পন্ন হল।

■ **ভেক্টর অপারেশন:**

Example: 1 $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে-

1. $|\vec{A}| = ?$ $|\vec{B}| = ?$
2. $\vec{A}.\vec{B} = ?$
3. $\vec{A} \times \vec{B} = ?$
4. $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিলম্ব কত?

Calculator কে vector mode এ নিয়ে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দুটিকে প্র[বেশ] করাতে হবে। প্রবেশের পর [AC] চাপা যাবে না। চাপলে ডাটা মুছে যা[বে]। এরপর উপরের operation গুলো সম্পন্ন করতে হবে।

MS Series:

Vector mode:

[MODE] [MODE] [MODE]

EQN	Mat	VCT
1	2	3

Screen

Input A:

[SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [1] [A 1 | B 2 | C 3] [1]

[Vct A(m) m?] [3] [=]

[Vct A¹] [1] [=]

[Vct A²] [−2] [=]

[Vct A³] [3] [=]

Input B:

[SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [1] [A 1 | B 2 | C 3] [2]

Vct B (m) m ? [3] [=]

[Vct B1 0] [2] [=]

[Vct B2 0] [1] [=]

[Vct B3 0] [−1] [=]

$|\vec{A}|$/abs of $\vec{A}$ নির্ণয়

[SHIFT] [)] [SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [3]

[A 1 | B 2 | C 3 | Ans 4] [1] [=]

Ans: 3.741657387

$|\vec{B}|$/abs of $\vec{B}$ নির্ণয়

[SHIFT] [)] [SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [3]

[A 1 | B 2 | C 3 | Ans 4] [2] [=]

Ans: 2.449489743

$\vec{A}.\vec{B}$ নির্ণয়

[SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3 | Ans 4] [1] [×]

[SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3 | Ans 4] [2] [=]

Ans: $-\hat{i}+7\hat{j}+5k$

• **Component or উপাদান গুলো দেখতে বাটন চিত্র:**



➤ $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয়:

আমরা জানি, $\vec{B}$ এর উপর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$

বাটন চিত্র:

[(] [SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3 | Ans 4]

[1] [SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3]



[Dot 1] Screen

[1] [SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [3] [A 1 | B 2 | C 3 | Ans 4] [2]

[)] [÷] [SHIFT] [)] [SHIFT] [5] [Dim 1 | Edit 2 | Vct 3] [3]

[A 1 | B 2 | C 3 | Ans 4] [2] [=]

Ans: −1.224744871

ES Series:

Vector mode: এর বাটন চিত্র:

[MODE] [------------ 7. Table 8. Vector] [8] [AC]

Sereen

➤ **Input এর বাটন চিত্র:**

[SHIFT] [5] [1. Dim 2. Data | 3. Vct A 4. Vct B] [1]

Screen

[Vector ? | 1. Vct A 2. Vct B | 3. Vct C] [2] [Vct B (m) m ? | 1: 3 2 : 2] [1]

Screen Screen

[B | [0 0 0]] [2] [=] [1] [=] [−] [1] [=]

Screen

$|\vec{A}|$/abs of $\vec{A}$ নির্ণয়

[AC] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [1. Dim 2. Data | 3. Vct A 4. Vct B] [3] [=]

Ans: 3.741657387

$|\vec{B}|$ নির্ণয়:

[AC] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [1. Dim 2. Data 3. Vct A 4. Vct B] [4] [=]

Ans: 2.449489743

$|\vec{A}.\vec{B}|$ নির্ণয়:

[AC] [SHIFT] [5] [1: Dim 2: Data 3: Vct A 4: Vct B] [3] [SHIFT] [5]

[5: Vct C 6: Vct Ans 7: Dot] [7] [SHIFT] [5] [1: Dim 2: Data 3: Vct A 4: Vct B]

[4] [=]

Ans: –3

$\vec{A}\times\vec{B}$ নির্ণয়:

[AC] [SHIFT] [5] [1: Dim 2: Data 3: Vct A 4: Vct B] [3] [×] [SHIFT]

[5] [1: Dim 2: Data 3: Vct A 4: Vct B] [4] [=]

Ans: $-\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}$

➤ **$\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ:**

আমরা জানি, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$

➤ **বাটন চিত্র: (ES এর জন্য)**

[AC] [(] [SHIFT] [5] [1. Dim 2. Data 3. Mat A 4. Mat B] [3] [SHIFT]

[2] [5. Vct 6 6. Vct Ans 7. Dot] [7] [SHIFT] [5]

[1. Dim 2. Data 3. Mat A 4. Mat B] [4] [)] [÷] [SHIFT] [hyp]

[SHIFT] [5] [1. Dim 2. Data 3. Vct A 4. Vct B] [4] [=]

Ans: –1.224744881.

➤ **বাটন চিত্র: (MS এর জন্য)**

[(] [SHIFT] [5] [3] [1] [SHIFT] [5] [▶] (ডানদিকে) [1] [SHIFT] [5]

[3] [2] [)] [÷] [(] [SHIFT] [)] [SHIFT] [5] [3] [2] [)] [=]

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: স্কেলার ও ভেক্টর গুণন সংক্রান্ত সমস্যাবলি

Ex-01 $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ হলে $\vec{B}=\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত [কোণ] নির্ণয় কর।

Sol^n: $\cos\theta=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\dfrac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+16+9}}=\dfrac{-13}{\sqrt{14}\sqrt{26}}$

$\therefore\ \theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{-13}{2\sqrt{91}}\right)=132.95°$

Ex-02 a এর মান কত হলে, $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ পরস্পর [লম্ব] হবে?

Sol^n: দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে তাদের ডট গুণন শূন্য হয়।

$\therefore\ (a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}).(2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k})=0$

$\Rightarrow 2a^2+2a-4=0\quad\Rightarrow a^2+a-2=0$

$\Rightarrow (a+2)(a-1)=0\quad\therefore a=-2,1$

For practice:

01. $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\vec{B}=m\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$, m এর মান কত হলে [$\vec{A}$ ও] $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হবে। **Ans.** m

02. $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}+10\hat{j}+11\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুটির অন্ত[র্ভুক্ত] কোণ নির্ণয় কর। **Ans.** 73.

03. দেখাও যে, $\vec{A}=2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\vec{B}=6\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ পরস্প[র] উপর লম্ব।

Type-02: উপাংশ ও অভিক্ষেপ নির্ণয়-

Ex-01 $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ হলে $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ [এর] অভিক্ষেপ এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টর এর অভিক্ষেপ $|\vec{a}|\cos\theta=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$=\dfrac{(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{-9}{\sqrt{6}}$ An[s]

$\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$ ভেক্টর এর অভিক্ষেপ $=|\vec{b}|\cos\theta$

$=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}}=\dfrac{-9}{\sqrt{14}}$ An[s]

Ex-02 $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ এবং $\vec{b}=2\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ দুটি ভেক্টর হলে, $\vec{a}$ ভে[ক্টর] বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\vec{a}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b}$ ভেক্টরের উপাংশ $=(\vec{b}.\hat{a})\hat{a}$

$=\left(\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\hat{a}=\dfrac{(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}).(2\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{4+9+36}}\hat{a}$

$=\dfrac{28}{7}\times\dfrac{2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}}{7}=\dfrac{4}{7}(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})$ An[s]

For practice:

$\vec{A} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ও $\vec{B} = \sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{A}$ ভেক্টরের উপর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)$

$\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = 5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$

Type-03: একক ভেক্টর সংক্রান্ত

P(1,1,1) এবং Q(3,2,−1) দুইটি বিন্দু হলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর এবং এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\overrightarrow{OP} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\overrightarrow{OQ} = 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ যখন O মূলবিন্দু

$\therefore \overrightarrow{PQ} = (3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}$ বরাবর একক ভেক্টর $= \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{3}$ Ans.

দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Solⁿ: নির্ণেয় লম্ব একক ভেক্টর $\hat{c}$ হলে, $\hat{c} = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k} = 5(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$$

$\therefore |\vec{A}\times\vec{B}| = 35$

নির্ণেয় ভেক্টর $\hat{c} = \pm\frac{5(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})}{35} = \pm\frac{1}{7}(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$ Ans.

$\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে এমন একটি একক ভেক্টর $\hat{c}$ নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরের সাথে একই তলে অবস্থান করে এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব।

Solⁿ: $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরের সাথে একই সমতলে থাকে যে কোন ভেক্টর হচ্ছে,

$\alpha(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+\beta(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

$= (\alpha+\beta)\hat{i}+(\alpha-\beta)\hat{j}+(\beta-\alpha)\hat{k}$

এই ভেক্টরটি $\vec{a}$ এর উপর লম্ব হবে যদি, $\alpha+\beta+\alpha-\beta-\beta+\alpha = 0$ হয়।

$\therefore \beta = 3\alpha$

$\therefore$ লম্ব ভেক্টরটি হচ্ছে $4\alpha\hat{i}-2\alpha\hat{j}+2\alpha\hat{k}$

$\therefore$ লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{c} = \pm\frac{2\alpha(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{16\alpha^2+4\alpha^2+4\alpha^2}}$

$\therefore \hat{c} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ Ans.

Ex-04 XY তলের সমান্তরাল কিন্তু $\vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, XY তলের সমান্তরাল যেকোন একটি ভেক্টর $\vec{b} = x\hat{i}+y\hat{j}$

শর্তমতে, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow 2x+2y = 0 \Rightarrow y = -x$

নির্ণেয় একক ভেক্টর $\hat{b} = \pm\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \pm\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$= \pm\frac{x\hat{i}-x\hat{j}}{\sqrt{2}x} = \pm\frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}$ Ans.

Ex-05 $\vec{A} = 3\hat{i}+4\hat{j}$ ও $\vec{B} = 12\hat{i}+5\hat{j}$ হয় তবে $|\vec{B}|$ এর সমমানের কিন্তু $\vec{A}$ এর সমান্তরাল ভেক্টরটি নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\vec{A}$ এর সমান্তরাল ভেক্টর $\vec{C} = K.\vec{A}$ $\therefore \vec{C} = K(3\hat{i}+4\hat{j})$

আবার $|\vec{B}| = |\vec{C}| \Rightarrow \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{(3k)^2+(4k)^2} \Rightarrow 13 = 5K$

$\therefore K = \frac{13}{5}$ $\therefore \vec{C} = \frac{13}{5}(3\hat{i}+4\hat{j})$ $\therefore \vec{C} = \frac{39}{5}\hat{i}+\frac{52}{5}\hat{j}$ Ans.

Ex-06 $\vec{A} = 3\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i}-\hat{j}+m\hat{k}$, m এর মান কত হলে $\vec{A}\parallel\vec{B}$?

Solⁿ: $\vec{A}\parallel\vec{B}$ হলে $\vec{A}\times\vec{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (-3m+6)\hat{i}-(3m-6)\hat{j}+(-3+3)\hat{k} = 0$

সহগ সমীকৃত করে পাই, $-3m+6 = 0$, $3m-6 = 0$ $\therefore m = 2$ Ans.

Shortcut Approach:

- দ্বিমাত্রিক-এর ক্ষেত্রে দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের সমীকরণের x ও y এর সহগের অনুপাত সমান হয় (ঢাল সমান)। তেমনি ত্রিমাত্রিক এর ক্ষেত্রেও x, y, z এর সহগের অনুপাত একই হবে।

$\frac{3}{1} = \frac{-3}{-1} = \frac{6}{m}$ $\therefore m = 2$ Ans.

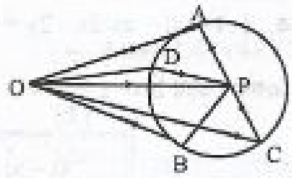
For practice:

01. YZ তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। Ans. $\pm\frac{1}{5}(4\hat{j}+3\hat{k})$
02. একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এর সমতলের উপর লম্ব। Ans. $\pm\frac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$
03. $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{c} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ হলে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর সাথে সমতলীয় এবং $\vec{c}$ এর উপর লম্ব। Ans. $\pm\left(\frac{\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{2}}\right)$
04. $\vec{A} = 4\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i}+7\hat{j}+3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি এদের লব্ধি বরাবর একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর। Ans. $\pm\left(\frac{6\hat{i}+4\hat{j}+8\hat{k}}{2\sqrt{29}}\right)$

Type-04: ভেক্টরের জ্যামিতিক প্রয়োগ

Ex-01 দেখাও যে, (4, –1, 2), (0, –2, 3), (2, 0 , 1) এবং (1, –5, –1) বিন্দুগুলো (2, –3, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট গোলকের উপর অবস্থিত।

Solⁿ: O মূলবিন্দু হলে,



$\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = -2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\overrightarrow{OC} = 2\hat{i} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OD} = \hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ $\qquad \therefore \overrightarrow{PB} = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PC} = 3\hat{j}$ $\qquad \therefore \overrightarrow{PD} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore PA = \sqrt{4+4+1} = 3$ $\qquad \therefore PB = 3$

$\therefore PC = 3$ $\qquad \therefore PD = 3$

যেহেতু PA = PB = PC = PD অর্থাৎ বিন্দুত্রয় হতে P এর দূরত্ব একই। সুতরাং তারা গোলকের উপর অবস্থিত। **(Showed)**

Ex-02 $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ দুটি সন্নিহিত বাহু বিশিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Solⁿ: নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$$

∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{16+36+64} = 2\sqrt{29}$ বর্গ একক **Ans.**

Ex-03 ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(3, –1, –2), B(1, 1, –3) এবং C(4, –3, 1) হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\therefore \vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ $\qquad \therefore \vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore \vec{C} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ $\qquad \therefore \overrightarrow{AB} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

এখন, $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16+25+4} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ বর্গ একক **Ans.**

For practice:

01. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ **Ans.** $5\sqrt{3}$ বর্গ একক

02. তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$। দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

Type-05: সমতলীয় ভেক্টর সংক্রান্ত সমস্যাবলি

Ex-01 ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যেন $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}, \hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে।

Solⁿ: ভেক্টর তিনটি একই সমতলে থাকলে, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(-2a + 12) - 1(3a - 4) - 1(-9 + 2) = 0$

$\Rightarrow -7a + 35 = 0 \therefore a = 5$ **Ans**

For practice:

01. দেখাও যে, $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}; \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}; \vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ তিনটি একই সমতলে থাকে।

02. কোন ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}; 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য কোণত্রয়ের পরিমাপ নির্ণয় কর।

Ans. $\sqrt{14}, \sqrt{6}, \sqrt{26}, \cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{156}}, \cos^{-1}\frac{17}{\sqrt{364}}, \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{84}}\right)$

Type-06: বিবিধ সমস্যাবলি

Ex-01 দেখাও যে, $\vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}.\vec{b})}{a^2}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ এর উপর লম্ব

Solⁿ: প্রদত্ত ভেক্টর ও $\vec{a}$ এর ডট গুণফল $= \vec{a}.\left\{\vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}.\vec{b})}{a^2}\right\}$

$= \vec{a}.\vec{b} - \frac{\vec{a}.\vec{a}(\vec{a}.\vec{b})}{a^2} = \vec{a}.\vec{b} - \frac{a^2(\vec{a}.\vec{b})}{a^2} = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b} = 0$

∴ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

Ex-02 যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ একক ভেক্টর হয় যাতে $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ হয়, $\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$ এর মান কত?

Solⁿ: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) = 0$

$\Rightarrow 2(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) = -(1+1+1)$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a} = -\frac{3}{2}$ **A**

Ex-03 ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}), \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{2}\{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB})\} = \frac{1}{2}(0+0+0)$ =

(Pro

For practice:

01. দেওয়া আছে যে, – a + 2b = 2c; 5a – 2b = 3d; a, b কে c এবং মাধ্যমে প্রকাশ কর। **Ans.** $a = \frac{2c + 3d}{4}, b = \frac{10c}{}$

02. OPQ ত্রিভুজে, $\overrightarrow{OP} = a$ এবং $\overrightarrow{OQ} = b$; PQ রেখার উপর R এমন বিন্দু যেন $\overrightarrow{PR} = 2.\overrightarrow{RQ}$ দেখাও যে, $\overrightarrow{PR} = \frac{2}{3}(b - a)$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি a + b + c = 0 এবং |a| = 3, |b| = 5, |c| = 7 হয়, তাহলে a এবং b এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [17-18]

Sol $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$\Rightarrow \vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$ [ধরি, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ]

$\therefore \vec{c}.\vec{c}=\left[-(\vec{a}+\vec{b})\right].\left[-(\vec{a}+\vec{b})\right]$

$=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2+2\vec{a}.\vec{b}=a^2+b^2+2ab\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{c^2-a^2-b^2}{2ab}=\dfrac{7^2-3^2-5^2}{2\times3\times5}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=\cos 60^\circ \quad \therefore \theta=60^\circ$

$\therefore \vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 60° **Ans.**

02. ভেক্টর পদ্ধতিতে $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এর ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [17-18]

Sol $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ বিন্দুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\vec{r}=t(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+(1-t)(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

$\Rightarrow x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=(2+t)\hat{i}+(2-t)\hat{j}+(2t-1)\hat{k}$

$\therefore x=2+t \quad \Rightarrow \dfrac{x-2}{1}=t$

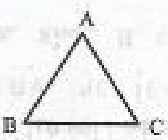
এবং $y=2-t \quad \Rightarrow \dfrac{y-2}{-1}=t$

এবং $z=2t-1 \quad \Rightarrow \dfrac{z+1}{2}=t$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}=t$ **Ans.**

03. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A (1, 2, 3), B (2, 3, 1) এবং C (3, 1, 2) হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [16-17]

Solve ধরি O মূলবিন্দু।



$\therefore \overrightarrow{OA}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{OB}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{OC}=3\hat{j}+\hat{j}+2\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore \Delta ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-1&-1&2\\1&-2&1\end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+9+9}=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ বর্গ একক। **Ans.**

04. $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{B}=3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{C}=5\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{D}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ **$\overrightarrow{AB}$ এর উপর $\overrightarrow{BC}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [15-16]**

Solve $\overrightarrow{AB}=2\hat{i}+2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{BC}=2\hat{i}-2\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AB}$এর উপর $\overrightarrow{BC}$এর অভিক্ষেপ: $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\dfrac{4-4}{\sqrt{4+4}}\right)=0$ **Ans.**

05. $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ **এবং** $\vec{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ **হলে দেখাও যে,** $\vec{A}+\vec{B}$ **এবং** $\vec{A}-\vec{B}$ **ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [BUET:11-12, 07-08;RUET 08-09]**

Solve $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

$\therefore \vec{A}+\vec{B}=4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}=-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

এখন, $(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})=(4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}).(-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$

$=-8+3+5=0$

$\therefore \vec{A}+\vec{B}, \vec{A}-\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

06. $\overrightarrow{AB}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ **এবং** $\overrightarrow{AC}=5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ **হলে AB ও AC-কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [04-05]**

Solve $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&2&-1\\5&-1&2\end{vmatrix}=3\hat{i}-11\hat{j}-13\hat{k}$

$\therefore$ AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+(-11)^2+(-13)^2}=\sqrt{299}$ বর্গএকক **Ans.**

07. P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (1, 1, 1) এবং (3, 2, –1) হলে, $\overrightarrow{PQ}$ বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [03-04]

Solve $\overrightarrow{OP}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\overrightarrow{OQ}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore \widehat{PQ}=\dfrac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{2}{3}\hat{i}+\dfrac{1}{3}\hat{j}-\dfrac{2}{3}\hat{k}$ **Ans.**

08. $\bar{a}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ **এবং** $\bar{b}=\hat{j}-\hat{i}-2\hat{k}$ **ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ নির্ণয় কর। [02-03]**

Solve $\cos\theta=\dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\dfrac{-1+2+2}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=\cos^{-1}\dfrac{1}{2}=60^\circ$ **Ans.**

09. যদি $(a\underline{i}+b\underline{j}+\underline{k})\times(2\underline{i}+2\underline{j}+3\underline{k})=\underline{i}-\underline{j}$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। [01-02]

Solve $\begin{vmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\a&b&1\\2&2&3\end{vmatrix}=\underline{i}(3b-2)-\underline{j}(3a-2)+\underline{k}(2a-2b)=\underline{i}-\underline{j}$

উভয় পক্ষে, $\underline{i}$ ও $\underline{j}$ এর সহগ সমীকৃত করলে,

$3b-2=1, 3a-2=1, 2a-2b=0$

$\Rightarrow b=1, a=1, a=b$ প্রাপ্ত ফলগুলো সংগত $\therefore a=1, b=1$ **Ans.**

10. যদি $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\bar{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ হয় তবে $|\bar{a} \times \bar{b}|$ এর মান নির্ণয় কর। [00-01]

Solve Here, $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(2+6) - \hat{j}(1-9) + \hat{k}(-2-6) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$

$\therefore |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{8^2 + 8^2 + (-8)^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\vec{B} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [05-06]

Solve $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ

$A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{12-6+2}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{8}{7}$ **Ans.**

02. $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [04-05]

Solve $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} = \vec{a}$ (ধরি) $\therefore |\vec{a}| = 3$

x অক্ষ বরাবর ভেক্টর $\vec{b} = \hat{i}$ $\therefore |\vec{b}| = 1$

আবার $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} = \frac{2}{3}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ **Ans.**

03. যদি $\bar{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\bar{b} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হয় তাহলে $\bar{b}$ ভেক্টরের উপর $\bar{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ বের কর। [03-04]

Solve $\bar{b}$ ভেক্টরের উপর $\bar{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$a\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}+3-2}{\sqrt{3+9+4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যেন 2i + j − k, 3i − 2j + 4k, i −3j + ak ভেক্টর তিনটি একই সমতলে থাকে। [07-08]

Solve $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4a + 24 - 3a + 4 + 7 = 0$

$\therefore a = 5$ **Ans.**

02. ভেক্টর পদ্ধতিতে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যার শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে A (1, 3, 2), B (2, −1, 1) এবং C (−1, 2, 3) [04-05, 03-04]

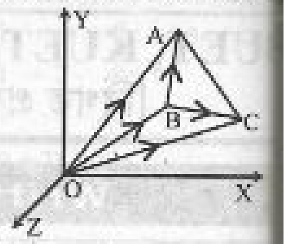
Solve $\vec{OA} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{OC} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = -3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$



$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}|-5\hat{i} + \hat{j} -$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গএকক A

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধ

01. $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব এমন একটি ভেক্টর নির্ণয় কর। [12-13]

Solve $\vec{c} = (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore \hat{\eta} = \pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-5)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$ A

02. দেখাও যে, $\vec{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর পরস্পর লম্ব। [10-11, 05-06, 03-04]

Solve $\vec{A}.\vec{B} = (8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}).(4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) = (32 - 2 - 30)$

$\therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব **(Show**

03. দেখাও যে, $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি প লম্ব। [07-08]

Solve $\vec{A}.\vec{B} = (9\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}).(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 36 - 6 - 30 = 0$ $\therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব। **(Prov**

04. A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ও $4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. $\vec{AB}$ এর মান এবং $\vec{AB}$ বরাবর একক ভেক্টরের নির্ণয় কর। [06-07]

Solve $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76}$

$\vec{AB}$ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{(2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{76}}$ A

$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\vec{I} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরসমূহ দ্বারা একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি করা কি সম্ভব? [04-05]

Solve $|\vec{A}|^2 = 9 + 4 + 1 = 14$

$|\vec{B}|^2 = 1 + 9 + 25 = 35$

$|\vec{I}|^2 = 4 + 1 + 16 = 21$

এখন, $|\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{I}|^2 = 35$ ∴ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করা সম্ভব। **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\vec{P} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান হবে- [13-14]

A. $\cos^{-1}\frac{21}{8}$ B. $\cos^{-1}\frac{8}{21}$ C. $\sin^{-1}\frac{21}{8}$ D. $\tan^{-1}\frac{8}{21}$

Ans | B | Solve $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left\{\frac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).(3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (2)^2}\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2}}\right\}$

$= \cos^{-1}\left(\frac{6+6-4}{\sqrt{9}.\sqrt{49}}\right) = \cos^{-1}\frac{8}{21}$

02. $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ কত? [13-14]

A. $\frac{8}{7}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{11}{3}$

Ans | B | Solve $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$= \frac{(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{12 - 6 + 2}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$

03. $\vec{A} = 8\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ হয়, তাহলে $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ হবে- [12-13]

A. $\frac{30\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{35}{10\sqrt{2}}$ C. $\frac{30}{10\sqrt{2}}$ D. $\frac{35\sqrt{2}}{10}$

Ans | D | Solve $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$= \frac{(8\times3) + (-1\times4) + (-3\times-5)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \frac{24 - 4 + 15}{\sqrt{50}} = \frac{35}{\sqrt{50}}$

$= \frac{35\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{50}} = \frac{35\sqrt{2}}{10}$

04. যদি A = 2i − j + 3k, B = 3i + 4j − 5k হয়, তাহলে B ভেক্টরের উপর A ভেক্টরের অভিক্ষেপ হচ্ছে- [10-11]

A. $\frac{-13\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{13}{7}$ C. $\frac{-13}{10\sqrt{7}}$ D. $\frac{7}{5\sqrt{2}}$

Ans | A | Solve $A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(2\times3) + 4(-1) + (-5)\times3}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2}}$

$= -\frac{13\sqrt{2}}{10}$

05. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টরটি হবে- [10-11]

A. $4\hat{i} - 3\hat{k}$ B. $\frac{1}{5}(4\hat{i} - 3\hat{k})$ C. $\frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$ D. $\hat{j}$

Ans | B | Solve যেহেতু XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব সুতরাং $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে।

ধরি ভেক্টরটি $x\hat{i} + z\hat{k}$

∴ $(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(x\hat{i} + z\hat{k}) \Rightarrow z = -\frac{3}{4}x$

∴ লম্ব একক ভেক্টর $= \frac{x\hat{i} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{x\hat{i} - \frac{3x}{4}\hat{k}}{\sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2}} = \frac{1}{5}(4\hat{i} - 3\hat{k})$

06. একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল বের কর। [09-10]

A. 17.748 sq. units B. 13.379 sq. units
C. 17.2916 sq. units D. None of the above

Ans | C | Solve সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

∴ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 11\hat{j} - 13\hat{k}$

∴ $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + (-11)^2 + (-13)^2} = 17.2916$ sq. unit.

07. $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ হবে [08-09]

A. 0 B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

Ans | D | Solve $\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$

$\Rightarrow |B|\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$

08. যদি $\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} + \hat{j}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ হয়, তবে AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে- [07-08]

A. $8\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{6}$ D. $6\sqrt{5}$

Ans | B | Solve সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(5-0) - \hat{j}(10-0) + \hat{k}(-2-3) = 5\hat{i} - 10\hat{j} - 5\hat{k}$

∴ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{5^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

09. m এর কোন মানের জন্য $2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $m\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টর দুটি লম্ব হবে? [06-07]

A. –18 B. 18 C. 9 D. –9

Ans C Solve $2m+6-24=0 \therefore m=9$

10. $2\hat{i}-3\hat{k}, \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ হবে: [05-06]

A. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{39}}$ B. $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{12}}$ C. $\cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{39}}$ D. $\sin^{-1}\frac{1}{13}$

Ans C Solve $\theta=\cos^{-1}\frac{(2\hat{i}-3\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{13}\sqrt{3}}$

$=\cos^{-1}\frac{2-3}{\sqrt{39}}=\cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{39}}$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 'a' এর কোন মানের জন্য $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}, \vec{B}=3\hat{i}+4\hat{j}+a\hat{k}$ ও $\vec{C}=a\hat{i}+7\hat{j}+9\hat{k}$ সমতলীয় হবে? [17-18]

A. 2 B. –2 C. 3 D. –5 E. 5

Ans E Solve $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}, \vec{B}=3\hat{i}+4\hat{j}+a\hat{k}$ এবং $\vec{C}=a\hat{i}+7\hat{j}+9\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হলে $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=0$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}2&3&4\\3&4&a\\a&7&9\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3(a^2-10a+25)=0\Rightarrow(a-5)^2=0 \therefore a=5$

02. "a" এর মান কত হলে $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে? [14-15]

A. 3,1 B. 2,4 C. –2,1 D. 3,2 E. 1,5

Ans C Solve লম্ব হলে, $2a^2+2a-4=0$

$\Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow a=1,-2$

03. যদি $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}-5\hat{k}$ হয় তাহলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ হবে : [09-10]

A. $\frac{19}{\sqrt{27}}$ B. $\frac{19}{29}$ C. $\frac{19}{\sqrt{29}}$ D. $\frac{25}{\sqrt{29}}$ E. $\frac{25}{\sqrt{27}}$

Ans C Solve $\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$

$\Rightarrow B\cos\theta=\frac{\vec{A}\vec{B}}{|\vec{A}|}=\frac{2-3+20}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{19}{\sqrt{29}}$

04. যদি A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 3, –6) এবং (2, 2, 1) হয় এবং O মূলবিন্দু হয়, তবে $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কোনটি? [07-08]

A. $\cos^{-1}\frac{16}{21}$ B. $\cos^{-1}\frac{3}{7}$ C. $\cos^{-1}\frac{4}{21}$

D. $\cos^{-1}\frac{8}{21}$ E. $\cos^{-1}\frac{5}{21}$

Ans C Solve $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=2\times2+3\times2-6\times1=4$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|OA||OB|}=\frac{4}{\sqrt{(4+9+36)}\times\sqrt{(4+4+1)}}=\frac{4}{21}$

$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$

05. যদি $\vec{u}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{v}=\lambda\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পর... হয়, তবে λ এর মান কোনটি? [06-07]

A. –3 B. 2 C. $\frac{13}{4}$ D. 1 E. –2

Ans C Solve $4\lambda-4-9=0\Rightarrow\lambda=\frac{13}{4}$

06. $\vec{A}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত... মান- [05-06]

A. 45° B. 0° C. 90° D. 180°

Ans C Solve $\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{-1-1+2}{AB}=0 \therefore \theta=90°$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. a, b ও c এর মান কত হলে $\vec{V}=(x+y+az)\hat{i}+(bx+3y-$ ... $(3x+cy+z)\hat{k}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হবে? [15-16]

A. (3, 1, 1) B. (3, –1, –1) C. (–3, 1, –1) D. (3, 1, ...

Ans D Solve $\nabla\times\vec{V}=0$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x+y+az&bx+3y-z&3x+cy+z\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\hat{i}(c+1)-\hat{j}(3-a)+\hat{k}(b-1)=0 \quad \therefore c=-1; a=3; b$ ...

02. $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় কোন সামান্তরিকের দুটি ... বাহু নির্দেশ করলে, তার ক্ষেত্রফল হবে? [15-16]

A. $3\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$

Ans B Solve $\begin{vmatrix}i&j&k\\2&-1&1\\1&3&-2\end{vmatrix}=i(2-3)-j(-4-1)+k(6+$ ...

$=-i+5j+7k$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\sqrt{(-1)^2+5^2+7^2}=\sqrt{1+25+49}=\sqrt{75}=5$ ...

03. ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যেন $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+a\hat{j}+5\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। [14-15]

A. 0 B. –4 C. –6 D. None

Ans B Solve ভেক্টর তিনটি একই সমতলে থাকলে- $\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&-3\\3&a&5\end{vmatrix}$ ...

$\Rightarrow 2(10+3a)+1(5+9)+1(a-6)=0$

$\Rightarrow 20+6a+14+a-6=0 \Rightarrow 7a=-28 \Rightarrow a=-4$

04. যদি $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ এবং $\vec{B}=m\hat{j}+3\hat{j}+4\hat{k}$ হয়, তবে ... কোন মানের জন্য $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হবে। [12-13]

A. 9 B. –9 C. 15 D. None

Ans D Solve $\vec{A}.\vec{B}=0 \therefore a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

$\Rightarrow 2m+9-24=0 \Rightarrow 2m=15 \therefore m=\frac{15}{2}$

$\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [11-12]

A. $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ B. $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ D. None

Ans A Solve $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\frac{1}{2}$

দুটি ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টর কত? [10-11]

A. $\frac{1}{\sqrt{134}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k})$ B. $\frac{1}{\sqrt{19}}(3\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$

C. $\frac{1}{\sqrt{51}}(\hat{i} + 7\hat{j} + \hat{k})$ D. None of these

Ans D Solve $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$

$|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{230}$

∴ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm \frac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{230}}(10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k})$

$2\hat{i} + a\hat{j} - \hat{k}$ এবং $a\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে 'a' এর মান– [10-11]

A. 3 B. –3 C. 9 D. None

Ans A Solve $2a + a - 9 = 0 \Rightarrow a = 3$

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} + 11\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টর কোনটি? [14-15]

A. $\frac{1}{\sqrt{29}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ B. $\frac{4}{\sqrt{29}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

C. $\frac{4}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ D. $\frac{1}{\sqrt{29}}(-4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$

E. $\frac{1}{\sqrt{29}}(-4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

Ans D Solve $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$

$\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{-32\hat{i} + 24\hat{j} + 16\hat{k}}{8\sqrt{29}} = \frac{8(-4\hat{i} + 24\hat{j} + 16\hat{k})}{8\sqrt{29}}$

$= \frac{-4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{29}}$

$\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর হলে নিচের কোনটি অর্থবহ নহে–[14-15]

A. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ B. $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ C. $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$

D. $\vec{A} + (\vec{B} \times \vec{C})$ E. $\vec{A}.\vec{B} + \vec{B}.\vec{C}$

Ans C Solve $\vec{B}.\vec{C}$ = স্কেলার রাশি। তাই এর সাথে $\vec{A}$ এর ডট গুণন সম্ভব নয়।

03. একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের পরিমাণ- [13-14]

A. $3\sqrt{10}$ sq. unit B. $10\sqrt{3}$ sq. unit C. $5\sqrt{10}$ sq. unit

D. $10\sqrt{5}$ sq. unit E. None

Ans B Solve সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2i - 14j - 10k$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{3}$ বর্গ একক

04. ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। [13-14]

$\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$.

A. 0° B. 45° C. 95° D. 90° E. None

Ans D Solve $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

$= \frac{(i - j + k).(-i + j + 2k)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + 2^2}} = \frac{-1 - 1 + 2}{\sqrt{3}.\sqrt{6}} = 0$

$\therefore \theta = \cos^{-1}0 = 90°$

05. ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর: $A = \sqrt{2}\cos\alpha\,\hat{i} - \sqrt{2}\sin\alpha\,\hat{j}$; $B = -\sqrt{2}\cos\alpha\,\hat{j} + \sqrt{2}\sin\alpha\,\hat{k}$ $(0 < \alpha < \pi/2)$ [12-13]

A. $\pi/2 - 2\alpha$ B. $\pi - 2\alpha$ C. $\pi - \alpha$

D. $\cos^{-1}(\sin\alpha\cos\alpha)$ E. None

Ans D Solve $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha.0 + (-\sqrt{2}).(-\sqrt{2})\sin\alpha\cos\alpha + 0}{\sqrt{2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}.\sqrt{2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}}$

$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \sin\alpha\cos\alpha \therefore \theta = \cos^{-1}(\sin\alpha.\cos\alpha)$

06. $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} - 8\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 8\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ হলে $|3\vec{A} + 2\vec{B}|$ এর মান কত? [11-12]

A. 359 B. 720 C. 719 D. 358 E. None

Ans E Solve $3\vec{A} + 2\vec{B} = 19\hat{i} - 13\hat{j} - 30\hat{k}$

$\therefore |3\vec{A} + 2\vec{B}| = \sqrt{19^2 + 13^2 + 30^2} = \sqrt{1430}$

07. $2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান কোনটি? [10-11]

A. 3/2 B. 2/3 C. 5/2 D. 2/5 E. 5/3

Ans C Solve $(2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2 - 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$

08. একটি কণার উপর $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ মানের দুইটি ধ্রুব বল কাজ করার ফলে কণাটি $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ বিন্দু থেকে $5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ বিন্দুতে সরণ হলে সম্পন্ন কাজের পরিমাণ কত? [09-10]

A. 23 B. 30 C. 15 D. 18 E. 40

Ans Blank Solve $\Sigma\vec{F} = 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{S} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore W = (\Sigma\vec{F}).\vec{S} = 28 + 4 + 16 = 48$

SELF TEST [MCQ]

01. 10 একক ভেক্টরের বিপরীত পার্শ্বে $60°$ ও $45°$ কোণে আনত দুইটি রেখা বরাবর এর অংশকদ্বয়–

A. $10(\sqrt{3}-1), 5\sqrt{3(3}-1)$ B. $10(\sqrt{3}-1), 5\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$

C. $10(\sqrt{2}-1); 5\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ D. None

02. (2, 3, 1) ও (3, 1, –2) ভেক্টরের স্কেলার গুণফল–

A. 1 B. 2

C. 7 D. 6

03. $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরটি z অক্ষের সাথে যে কোণ তৈরি করে তা–

A. $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$ B. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

C. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ D. None

04. $\vec{U}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{V}=2p\hat{i}+t\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে p এর মান কত হবে?

A. $-\frac{1}{4}(t+6)$ B. $-\frac{1}{4}(t+10)$

C. $-\frac{1}{4}(t+12)$ D. None

05. $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ–

A. 30° B. 120°

C. 60° D. 45°

06. $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $\vec{A}\times\vec{B}$ ধরে মধ্যবর্তী কোণ কত?

A. $\cos^{-1}\sqrt{133}\sqrt{7}$ B. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$

C. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$ D. None

07. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ হলে, $(\vec{a}.\vec{b})+(\vec{b}.\vec{c})+(\vec{c}.\vec{a})$ এর মান–

A. 10 B. –1

C. 1 D. 0

08. মূলবিন্দু O সাপেক্ষে A(2, –1, 7), B(–4 , 5, 0) হলে $|\overrightarrow{AB}|=$?

A. $\sqrt{120}$ B. $\sqrt{121}$

C. $\sqrt{125}$ D. $\sqrt{119}$

09. $6\hat{i}+7\hat{j}-6\hat{k}$ বরাবর $2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এর অংশক–

A. $\frac{8}{121}(6\hat{i}+7\hat{j}-6\hat{k})$ B. $\frac{8}{121}(6\hat{i}+8\hat{j}-6\hat{k})$

C. $\frac{8}{121}(-6\hat{i}-7\hat{j}+6\hat{k})$ D. None

10. $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দুটির লম্ব একক ভেক্টর–

A. $\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(4\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$ B. $\pm\frac{1}{3\sqrt{2}(4\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})}$

C. $\frac{1}{5\sqrt{2}}(4\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$ D. None

11. m এর মান কত হলে $2\hat{i}-3\hat{j}$ এবং $m\hat{i}-6\hat{j}$ সমান্তরাল হবে?

A. 2 B. 3

C. 4 D. 5

12. $\vec{A}=2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ ও $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এ… সমান্তরাল ভেক্টর–

A. $\frac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k})$ B. $\frac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+6\hat{j}+10\hat{k})$

C. $\frac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+7\hat{j}+9\hat{k})$ D. $\frac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$

13. যদি $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ হয় $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, |\vec{c}|=7$ হয় তখন a… এর মধ্যবর্তী কোণ–

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$ D. None

14. $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপর লম্ব এবং ভেক্টরটি… 5 হলে ভেক্টরটি হয়?

A. $\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ B. $\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

C. $\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$ D. None

15. একটি ভেক্টরের মান কখনোই হতে পারে না–

A. Positive B. Negative

C. Zero D. both A, B

16. $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে, $|\overrightarrow{AB}|$=

A. $\sqrt{76}$ B. $2\sqrt{19}$

C. $4\sqrt{19}$ D. both A and B

17. যদি $\vec{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর হয় এবং $(\hat{a}+\hat{b})$ ও একটি একক ভে… তবে $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ হল–

A. শূন্য ভেক্টর B. স্কেলার

C. $\vec{a}$ এর সমান্তরাল D. $\vec{a}$ এর উপর লম্ব

18. $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ একক ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হয় তবে, $\left|\frac{\vec{a}-\ldots}{2}\right|$

A. $\sin\frac{\theta}{2}$ B. $\sin\theta$

C. $2\sin\theta$ D. $\sin 2\theta$

19. $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=$?

A. $a^2b^2-(\vec{a}.\vec{b})^2$ B. $\vec{a}^2.\vec{b}^2$

C. $(\vec{a}.\vec{b})^2$ D. a^2b^2

20. $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ ক…

A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{14}}$

C. $\frac{3}{\sqrt{14}}$ D. None

$\vec{A} = 5\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = 10\hat{i} + m\hat{j} + 2\hat{k}$, m এর মান কত হলে $\vec{A} \parallel \vec{B}$ হবে?

A. অসম্ভব B. 12

C. 3 D. −12

$\vec{A} = 3\hat{k}$ ভেক্টরটি y অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হল–

A. 0° B. 90°

C. অনির্ণেয় D. 180°

$\hat{a} = 5\hat{j} - 2\hat{k}$ এর দিকে একক ভেক্টরের দৈর্ঘ্য কত?

A. অনির্ণেয় B. $\sqrt{65}$

C. 1 D. 65

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ তিনটি ভেক্টর হলে ($\vec{a}.\vec{b} = 0$ ও $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$)

A. $\vec{a}^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$ B. $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

C. $\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2$ D. None

$(\vec{A}.\vec{B})^2 + |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = ?$

A. $\frac{A^2B^2 \sin 2\theta}{2}$ B. AB sin 2θ

C. A^2B^2 D. $A^2B^2 \tan^2\theta$

$\vec{a} = \vec{b}$ হলে, $(\vec{a} + \vec{b}) . (\vec{a} - \vec{b}) = ?$

A. + ve B. − ve

C. 0 D. None

$\vec{a} \times \vec{b}$ এবং $\vec{b} \times \vec{a}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

A. 0° B. 45°

C. 120° D. 180°

$\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরের ক্ষেত্রে যদি $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ হয় তবে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ–

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$ D. None

সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল–

A. $5\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{3}$

C. 6 D. None

যদি $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ হয়, তবে sinθ = ?

A. 1 B. 0

C. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} \times \sqrt{50}}$ D. $\frac{6}{29 \times 50}$

কোন সামান্তরিকের কর্ণ $2\hat{i}$ ও $2\hat{j}$ হলে ক্ষেত্রফল–

A. 0.5 units B. 1 unit

C. 2 units D. 4 units

32. $|\vec{A}| = 3, |\vec{B}| = 4, |\vec{C}| = 5$ এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ হয়, তবে $\vec{A} \wedge \vec{C} = ?$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

C. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ D. $\frac{\pi}{3}$

33. $\vec{A}$ এর উপাংশ x, y, z অক্ষের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করলে এদের মান–

A. $\frac{A}{\sqrt{3}}$ B. $A\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}A$ D. $\frac{A}{\sqrt{2}}$

34. $\vec{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর হলে $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ হল–

A. শূন্য ভেক্টর B. স্কেলার

C. $\vec{a}$ এর সমান্তরাল ভেক্টর D. $\vec{a}$ এর উপর লম্ব

35. $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটির X-Y সমতলে দৈর্ঘ্য কত?

A. 2 B. $\sqrt{14}$

C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{5}$

36. কোন ত্রিভুজের দুটি বাহু $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{b} = -5\hat{i} + 7\hat{j}$ হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল–

A. 10 B. $20\frac{1}{2}$

C. 3 D. 4

37. $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর–

A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{8}{7}$

C. $\frac{6}{7}$ D. $\frac{7}{6}$

38. a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে?

A. −2, 1 B. 2, −1

C. 3, 1 D. −3, 1

OMR

01. (A)(B)(C)(D)	11. (A)(B)(C)(D)	21. (A)(B)(C)(D)	31. (A)(B)(C)(D)
02. (A)(B)(C)(D)	12. (A)(B)(C)(D)	22. (A)(B)(C)(D)	32. (A)(B)(C)(D)
03. (A)(B)(C)(D)	13. (A)(B)(C)(D)	23. (A)(B)(C)(D)	33. (A)(B)(C)(D)
04. (A)(B)(C)(D)	14. (A)(B)(C)(D)	24. (A)(B)(C)(D)	34. (A)(B)(C)(D)
05. (A)(B)(C)(D)	15. (A)(B)(C)(D)	26. (A)(B)(C)(D)	36. (A)(B)(C)(D)
06. (A)(B)(C)(D)	16. (A)(B)(C)(D)	26. (A)(B)(C)(D)	36. (A)(B)(C)(D)
07. (A)(B)(C)(D)	17. (A)(B)(C)(D)	27. (A)(B)(C)(D)	37. (A)(B)(C)(D)
08. (A)(B)(C)(D)	18. (A)(B)(C)(D)	28. (A)(B)(C)(D)	38. (A)(B)(C)(D)
09. (A)(B)(C)(D)	19. (A)(B)(C)(D)	29. (A)(B)(C)(D)	
10. (A)(B)(C)(D)	20. (A)(B)(C)(D)	30. (A)(B)(C)(D)	

Correct Answer

38.A	37.B	36.B	35.C	34.C	33.A	32.C	31.C	30.C	29.B
28.C	27.D	26.C	25.C	24.B	23.C	22.B	21.D	20.B	19.A
18.A	17.C	16.D	15.B	14.B	13.B	12.D	11.C	10.A	09.C
08.B	07.C	06.C	05.C	04.C	03.C	02.C	01.B		

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

1. ΔABC -এর D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

2. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ $=6.\overrightarrow{AO}$। যেখানে, O হলো সুষম ষড়ভুজের কেন্দ্র।

3. যদি P_1, P_2, P_3 .... যথাক্রমে AB, P_1B, P_2B .... রেখাংশগুচ্ছের মধ্যবিন্দু ও ঐ বিন্দুসমূহে যথাক্রমে m, $\frac{m}{2}, \frac{m}{2^2}$ ....ভরের বস্তুকণাগুলো যুক্ত করা হয় এবং G ঐ বস্তুকণাগুচ্ছের ভরকেন্দ্র এবং $\overrightarrow{BG}=k.\overrightarrow{BA}$ হয় তবে k-এর মান বের কর। Ans: $\frac{1}{3}$

4. যদি স্থানাংক ভেক্টর, $\vec{p}=(x+4y)\vec{a}+(2x+y+1)\vec{b}$, $\vec{q}=(y-2x+2)\vec{a}+(2x-3y-1)\vec{b}$ এবং $3\vec{p}=2\vec{q}$ হয় তবে x এবং y-এর মান বের কর যেখানে $\vec{a}, \vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় অসমরেখ। Ans: $x=2, y=-1$

5. যদি A, B, C, D বিন্দুসমূহের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ এবং $\vec{a}-\vec{b}=2(\vec{d}-\vec{c})$ হয় তবে দেখাও যে, AC, BD রেখাদ্বয় পরস্পরকে ত্রিখণ্ডিত করে।

6. ধরি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর এবং যেকোন দুটি ভেক্টর অসমরেখ। যদি $(\vec{a}+2\vec{b})$, $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় সমরেখ এবং $(\vec{b}+3\vec{c})$, $\vec{a}$ ভেক্টরদ্বয় সমরেখ হয় তবে দেখাও যে, $\vec{a}+2\vec{b}+6\vec{c}=0$

7. যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয়ের যেকোন দুটি ভেক্টর অসমরেখ এবং $(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় সমরেখ এবং $(\vec{b}+\vec{c})$, $\vec{a}$ ভেক্টরদ্বয় সমরেখ হয় তবে দেখাও যে, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

8. যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ যথাক্রমে A এবং B বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর হয় তবে $\vec{c}$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বের কর যেন $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ হয়। Ans: $3\vec{b}-2\vec{a}$

9. যদি $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ এবং $\vec{a}+k\vec{b}$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয় তবে k-এর মান বের কর। Ans: যেকোন বাস্তব সংখ্যা

10. যদি $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\alpha\vec{d}$ এবং $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\beta\vec{a}$ এবং $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় অসমতলীয় হয় তবে $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=?$ Ans: 0

11. যদি $\vec{a}=7\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $\vec{b}=-2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত অন্তঃস্থকোণের সমদ্বিখণ্ডক এমন $\vec{c}$ ভেক্টর বের কর যেন $|\vec{c}|=5\sqrt{6}$ হয়। Ans: $\pm\frac{5}{3}(\hat{i}-7\hat{j}+2\hat{k})$

12. যদি B বিন্দুর সাপেক্ষে C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}+\hat{j}$ এবং A বিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}-\hat{j}$ হয় তবে A বিন্দুর সাপেক্ষে C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বের কর। Ans: $2\hat{i}$

13. এমন একটি ভেক্টর বের কর যার মান $\sqrt{51}$ এবং যা $\vec{a}=\frac{\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}}{3}$, $\vec{b}=\frac{-4\hat{j}-3\hat{k}}{3}$ এবং $\vec{c}=\hat{j}$ ভেক্টরত্রয়ের সমানভাবে নত থাকে। Ans: $\pm(5\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k})$

14. যদি $(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ এবং $(a\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির স... একক ভেক্টর এবং $(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 1 হয় তবে ... মান কত? Ans: a...

15. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1, |\vec{c}|=4$ এবং $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ হ... $(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})$ এর মান বের কর। Ans: -13

16. যদি $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}$ এবং $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ হয় তবে $\vec{b}=\vec{b_1}+\vec{b_2}$ ... প্রকাশ কর যেখানে $\vec{b_1}$, $\vec{a}$ -এর সমান্তরাল এবং $\vec{b_2}$, $\vec{a}$-এর উপর লম্ব... Ans: $\vec{b_1}=\frac{3}{2}\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}, \vec{b_2}=\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}$...

17. যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ যেকোন দুটি ভেক্টর হয় তবে প্রমাণ ক... $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right|=\left|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|$

18. যদি $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরত্রয় একক ভেক্টর হয় তবে $\left\{|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2\right\}$ -এর সর্বোচ্চ মান কত? An...

19. যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় একক ভেক্টর এবং $|\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|$ হ... $(\vec{b}-\vec{a}).\left(\vec{c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=?$ Ans:...

20. যদি $|\vec{u}|=1, |\vec{v}|=2, |\vec{w}|=3$ এবং $\vec{u}$ -এর দিকে $\vec{v}$ -এর উপাংশ... $=\vec{u}$ -এর দিকে $\vec{w}$ -এর উপাংশ এবং $\vec{v}\perp\vec{w}$ হয় তবে $|\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}|$... Ans:...

21. যদি $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=5$ এবং $\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c}), \vec{b}\perp(\vec{c}$... $\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})$ হয় তবে $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=?$ Ans:...

22. যদি $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\sqrt{2}.\vec{b}|=1$ হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভে... অন্তর্ভুক্ত কোণ বের কর। Ans:...

23. যদি $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ এবং $\vec{a}+\vec{b}+\sqrt{3}.\vec{c}=0$ হয় তবে ... $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ বের কর। Ans:...

24. যদি $\vec{a}=3\vec{b}+\vec{c}, |\vec{b}|=5$ এবং $\vec{a}.\vec{b}=75$ হয় তবে $\vec{b}.\vec{c}=?$ A...

25. যদি $|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}+2\vec{b}|^2=20, |\vec{a}|=10$, এবং $|\vec{b}|=2$ হয়... $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ বের কর। Ans: $\frac{2\pi}{3}$

26. যদি $\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c}), \vec{b}\perp(\vec{c}+\vec{a}), \vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})$ এবং $|\vec{a}+\vec{b}|=6, |\vec{b}+\vec{c}|=8$ এবং $|\vec{c}+\vec{a}|=1$ হয় তবে $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$... Ans:...

27. ধরি $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{c}=4\hat{i}-3\hat{j}+7\hat{k}$। $\vec{r}$ ভে... কর যেখানে $\vec{r}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}$ এবং $\vec{r}.\vec{a}=0$ Ans: $\vec{r}=-\hat{i}-8\hat{j}$...

28. ধরি, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=2\vec{a}+3\vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OD}=\vec{a}-2\vec{b}$... $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$ হয় তবে $\overrightarrow{BD}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার অন্তর্ভু... বের কর। Ans: $\frac{\pi}{2}$

যদি $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ এবং $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{\sqrt{2}}$ হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ বের কর। Ans: $\dfrac{3\pi}{4}$

যদি $\vec{a} \times \vec{b} = 2(\vec{a} \times \vec{c})$, $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 1$ এবং $|\vec{b}| = 4$। যদি $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের অর্ন্তভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\dfrac{1}{4}$ হয় তবে $\vec{b} - 2\vec{c} = ?$ Ans: $\pm 4\vec{a}$

$|\vec{a} \times \hat{i}|^2 + |\vec{a} \times \hat{j}|^2 + |\vec{a} \times \hat{k}|^2 = ?$ Ans: $2|\vec{a}|^2$

যদি $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হয় তবে $\vec{b}$-এর লম্ব দিকে $\vec{a}$-এর উপাংশ বের কর। Ans: $-\dfrac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k})$

$\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরসেটের বিপরীত (reciprocal) ভেক্টর সেট বের কর। Ans: $\dfrac{1}{2}(\hat{i} + \hat{j}), \dfrac{1}{2}(\hat{j} + \hat{k}); \dfrac{1}{2}(\hat{k} + \hat{i})$

যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় একক ভেক্টর এবং $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \dfrac{\vec{b}}{2}$ হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর অন্তর্ভুক্ত কোণ এবং $\vec{a}$ এবং $\vec{c}$-এর অর্ন্তভুক্ত কোণ বের কর যেখানে $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় অসমরেখ। Ans: $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}$

যদি $\vec{p} = \dfrac{\vec{b} \times \vec{c}}{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]}$, $\vec{q} = \dfrac{\vec{c} \times \vec{a}}{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]}$, $\vec{r} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]}$ এবং $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় অসমতলীয় হয় তবে দেখাও যে,

$\vec{p}.(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{q}.(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{r}(\vec{c} + \vec{a}) = 3$

যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় অশূন্য এবং $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরত্রয় পারস্পরিকভাবে লম্ব এবং $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = |\vec{a}|$

যদি $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$ এবং $\vec{r}.\vec{a} = 0$ হয় তবে $\vec{r} = ?$ Ans: $\vec{c} - \dfrac{\vec{c}.\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}}\vec{b}$

এমন একটি একক ভেক্টর $\vec{x}$ নির্ণয় কর, যা $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে সমতলীয় এবং $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টরের উপর লম্ব। Ans: $\dfrac{3\hat{i} - \hat{k}}{\sqrt{10}}$

যদি $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ অশূন্য ভেক্টরত্রয় $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\dfrac{1}{4}|\vec{b}||\vec{c}|\vec{a}$ শর্ত মেনে চলে এবং $\vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের অর্ন্তভুক্ত কোণ সূক্ষ্মকোণ হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার অন্তর্ভুক্ত কোণ বের কর। Ans: $\dfrac{\pi}{2}$

$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = ?$ Ans: $2\vec{a}$

$[(\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} + \hat{k})].[(\hat{k} + \hat{i}) \times (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})] = ?$ Ans: 2

যদি $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$, $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = \hat{k} - \hat{i}$। এমন একটি একক ভেক্টর $\vec{d}$ বের কর যেন $\vec{a}.\vec{d} = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}] = 0$ হয়। Ans: $\pm\dfrac{\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$

$\hat{i}.(\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}.(\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k}.(\hat{i} \times \hat{j}) = ?$ Ans: 3

যদি $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$ এবং $|\vec{c}| = 3$ হয় তবে $[\vec{a} - \vec{b}\ \ \vec{b} - \vec{c}\ \ \vec{c} - \vec{a}] = ?$ Ans: 0

45. যদি, $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{v} = \hat{i} - \hat{j}$ এবং $\vec{w} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$। $\hat{n}$ এমন একটি একক ভেক্টর যেন $\vec{u}.\hat{n} = 0$ এবং $\vec{v}.\hat{n} = 0$ হয়। $|\vec{w}.\hat{n}| = ?$ Ans: 3

46. $\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \times (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \times (\hat{i} \times \hat{j}) = ?$ Ans: 0

47. OABC চতুস্তলকের আয়তন বের কর যার O বিন্দুর সাপেক্ষে A,B,C শীর্ষবিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$। Ans: $\dfrac{2}{3}$ ঘনএকক

48. এমন একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ বের কর যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী, যার অবস্থান ভেক্টর $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং অপর দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমান্তরাল, যাদের অবস্থান ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে $-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$। কার্তেসীয় স্থানাংকেও ঐ সরলরেখার সমীকরণ বের কর।
Ans: $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} + t(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

49. প্রমাণ কর যে, $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \lambda(3\hat{i} - \hat{j})$ এবং $\vec{r} = 4\hat{i} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে। তাদের ছেদবিন্দুও বের কর। Ans: (4, 0, – 1)

50. $\vec{r} = 4\hat{i} - \hat{j} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ এবং $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যকার সর্বনিম্ন দূরত্ব বের কর। Ans: $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

51. $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$ এবং $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যকার অর্ন্তভুক্ত সূক্ষ্মকোণটি বের কর। Ans: $\cos^{-1}\left(\dfrac{19}{21}\right)$

52. $\vec{r} = 3\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ এবং $\vec{r} = (-3\mu - 3)\hat{i} + (2\mu - 7)\hat{j} + (4\mu + 6)\hat{k}$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যকার সর্বনিম্ন দূরত্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans: $\vec{r} = 3\hat{i} + 8\hat{j} + t(2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k})$

53. এমন একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ বের কর যা $-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$, $-3\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}$ এবং $-5\hat{i} - 6\hat{k}$ বিন্দুত্রয় দিয়ে গমন করে। Ans: $\vec{r}.(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) = 2$

54. এমন একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ বের কর যা (2 , 1, –1) বিন্দুগামী এবং $\vec{r}.(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$ ও $\vec{r}.(\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ সমতলদ্বয়ের ছেদরেখা দিয়ে গমন করে। Ans: $\vec{r}.(\hat{i} + 9\hat{j} + 11\hat{k}) = 0$

55. $\vec{r}.(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 1$ এবং $\vec{r}.(-\hat{i} + \hat{j}) = 4$ সমতলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ বের কর। Ans: $\cos^{-1}\left(\dfrac{-5}{\sqrt{58}}\right)$

56. A এবং B বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$। এমন একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ বের কর যা B বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{AB}$ - ভেক্টরের উপর লম্ব হয়। Ans: $\vec{r}.(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) + 28 = 0$

57. যদি $\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ বিন্দুদ্বয় হতে $\vec{r}.(5\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}) + 9 = 0$ সমতলটি সমদূরবর্তী হয় তবে λ-এর মান নির্ণয় কর। Ans: 3, – 6

58. একটি গোলকের সমীকরণ $|\vec{r} - \vec{a}|^2 + |\vec{r} - \vec{b}|^2 = 72$ যেখানে $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$। গোলকটির (i) কেন্দ্রের স্থানাংক (ii) ব্যাসার্ধ (iii) কেন্দ্র থেকে $\vec{r}.(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = -3$ সমতলের উপর লম্ব দূরত্ব বের কর। Ans: (i) $\dfrac{\sqrt{18}}{2}$ (ii) $\dfrac{3}{2}\hat{i} + \dfrac{7}{2}\hat{j} - 2\hat{k}$, (iii) 5

59. দেখাও যে, $\vec{r} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$ সরলরেখাটি, $\vec{r}. = 5$ সমতলের সমান্তরাল এবং তাদের মধ্যকার দূরত্ব বের কর। Ans: $\frac{10\sqrt{3}}{9}$

60. একটি গোলকের ব্যাস AB। A বিন্দুর স্থানাংক (3, 2, –2)। যদি গোলকটির সমীকরণ $|\vec{r} - 2\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{18}$ হয় তবে B বিন্দুর স্থানাংক বের কর। Ans: (1, 0, – 10)

61. একটি গোলকের কেন্দ্রের অবস্থান ভেক্টর $3\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k}$। যদি গোলকটি $\vec{r}.(2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) = 10$ সমতলকে স্পর্শ করে তবে গোলকটির ভেক্টর সমীকরণ বের কর। Ans: $|\vec{r} - 3\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k}| = 4$

62. $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 3\sqrt{3}$ সমতল এবং $\vec{r} = 5$ গোলক দ্বারা খন্ডিত বৃত্তাকার অংশের ব্যাসার্ধ বের কর। Ans: 4 একক

63. $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j}) + s(2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ এবং $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + t(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয়ের অর্ন্তভুক্ত সূক্ষ্মকোণ বের কর। Ans: $\frac{2\pi}{3}$

64. $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ সমতলের সাপেক্ষে এমন একটি বিন্দুর প্রতিবিম্ব বের কর যার অবস্থান ভেক্টর $\hat{i} + 3\hat{k}$। Ans: $-\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

65. এমন একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বের কর যা $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k} + t(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ সরলরেখা এবং $\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 5$ সমতলের ছেদবিন্দু। Ans: $5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$

66. এমন একটি সমতলের সমীকরণ বের কর যা A(2, –1,3) বিন্দুগামী এবং $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{k}$ ও $\vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল। Ans: $\vec{r}.(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 25$

67. $\hat{i} + \hat{j}, \hat{j} + \hat{k}, \hat{k} + \hat{i}$ ভেক্টরত্রয়ের সাথে সমান ভাবে আনত এমন একটি ভেক্টর বের কর যার মান 4 একক। Ans: $\frac{4}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

68. এমন একটি সমতলের সমীকরণ বের কর যা (2, 1, –1) বিন্দুগামী এবং $\vec{r}.(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$ এবং $\vec{r}.(\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ সমতলদ্বয়ের ছেদরেখাগামী। Ans: $\vec{r}.(\hat{i} + 9\hat{j} + 11\hat{k}) = 0$

69. এমন একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ বের কর যা (3,1,2) বিন্দুগামী এবং $\vec{r}.(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 4$ সমতলের উপর লম্ব এবং এই সরলরেখা ও সমতলটির মধ্যকার ছেদবিন্দু বের কর।
Ans: $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}), \left(2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

70. এমন একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ বের কর যা $5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $\vec{r}.(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 0$ ও $\vec{r}.(\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + 3 = 0$ সমতলদ্বয়ের উপর লম্ব। Ans: $\vec{r}.(\hat{i} - 12\hat{j} - 7\hat{k}) = 2$

71. যদি $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ এবং $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$ হয় তবে দেখাও যে, $(\vec{a} - \vec{d}) \perp (\vec{b} - \vec{c})$

72. যদি $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |2\vec{a} - \vec{b}| = 5$ হয় তবে $|2\vec{a} + \vec{b}| = ?$ Ans: 5

73. যদি P,Q,R বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এবং $2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} = 0$ হয় তবে দেখাও যে, P,Q,R বিন্দুত্রয় সমরেখ।

74. যদি $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ হয় তবে $(\vec{a} \times \vec{b})$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টরটি বের কর। Ans: $\pm\frac{1}{\sqrt{21}}(\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$

75. P এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $4\hat{i} + 3\hat{j}$ ... R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বের কর, যদি R বিন্দুটি, PQ রেখাকে 3:2 অ... অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে। Ans: $\frac{1}{5}(16\hat{i} + 15\hat{j} + 19\hat{k})$

76. যদি $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k})$ হয় তবে $|\vec{b}| = ?$ Ans: 2...

77. যদি A,B,C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হয় তবে C... হতে AB বাহুর উপর লম্ব দূরত্ব ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। Ans: $\frac{|\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b} - \vec{a}|}$

78. যদি $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ এবং $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ 120° হ... $|(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})|^2$ এর মান কত? Ans: 300

79. যদি $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = 0$ হয় তবে $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = ?$ Ans: $3(\vec{c} \times \vec{a})$

80. যদি $\vec{b}$ ভেক্টরটির দিক ঠিক উত্তর-পূর্ব, $\vec{c}$ ভেক্টরটির দিক ঠিক উত্তর-... এবং $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 4$ হয় তবে $\vec{d} = \vec{c} - \vec{b}$ ভেক্টরটির মান ও দিক... কর। Ans: $4\sqrt{2}$ একক, পশ্চিম দি...

81. যদি $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}, \vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$ এবং $\vec{r} = -2\vec{a} + \vec{b}$... হয় তবে $(3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$ ভেক্টরটিকে $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$-এর যোগাশ্রয়ী যো... আকারে প্রকাশ কর। Ans: $2\vec{p} - 5\vec{q} + 3\vec{r}$

82. একটি চতুস্তলকের শীর্ষবিন্দুসমূহ $5\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, 7\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}, \hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k}$ এবং $-\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$। চতুস্তলকের আয়তন কত? Ans: 11 ঘনএকক

83. যদি $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}, \vec{c} = \hat{i}$ এবং $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda$... $\mu\vec{b}$ হয় তবে $(\lambda + \mu)$ -এর মান কত? Ans: 0

84. যদি $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ এবং $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ হয় তবে $(3\vec{a} - 4\vec{b}).(2\vec{a} + 5\vec{b}) = ?$ Ans: $-\frac{21}{2}$

85. যদি $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = 0$ এবং $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \lambda(\vec{b}$ ... হয় তবে $\lambda = ?$ Ans: 6

86. তিনটি বলত্রয় $(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}), (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ এবং $(-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$, P(0, ... বিন্দুতে একটি বস্তুকণার উপর ক্রিয়াশীল। A(1, –2, 0) বিন্দুর সা... বলত্রয়ের লব্ধির মোমেন্ট বের কর। Ans: $\sqrt{140}$ একক

87. যদি $|\vec{a}| = 50$ এবং $\vec{a}, \vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় সমরেখ এবং $\vec{a}$, z-অক্ষের ধন... দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তবে $\vec{a}$ ভেক্টরটি বের কর। (যেখানে $\vec{b} = 6\hat{i} - 8\hat{j} - \frac{15}{2}\hat{k}$) Ans: $-24\hat{i} + 32\hat{j} + 30$...

88. যদি $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}$ এবং $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4$ এবং $\vec{b}$ ... ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\frac{2\pi}{3}$ হয় তবে $(\vec{a} \times b).\vec{c} = ?$ Ans: $12\sqrt{}$...

যদি $\vec{a}$ ভেক্টরটি $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{c} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের প্রত্যেকের উপর লম্ব এবং $\vec{a}.(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = -6$ হয় তবে $\vec{a} = ?$

Ans: $-\frac{3}{7}(10\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k})$

যদি $|\vec{r}| = 3\sqrt{6}$ এবং $\vec{r}$ ভেক্টরটি, $\vec{a} = 7\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অর্ন্তভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয় তবে $\vec{r} = ?$

Ans: $\pm(\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k})$

যদি $\vec{x}$ এবং $\vec{y}$ অন্যন্য ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$ এবং $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$, $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{b}$ হয় তবে $\vec{x} = ?$

Ans: $\frac{\vec{a}}{2} + \frac{1}{3}(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{r}.(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = 15$, $|\vec{r} - \hat{j} - 2\hat{k}| = 4$ বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ বের কর।

Ans: $(1, 3, 4)$, $\sqrt{7}$

যদি $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 1$, $\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ এবং $|\vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|\vec{c}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$ হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর অর্ন্তভুক্ত কোণ বের কর। **Ans:** $\frac{\pi}{2}$

যদি $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$ এবং $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$ এবং $\vec{p}$ এবং $\vec{q}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\frac{\pi}{3}$ হয় তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাত বের কর।

Ans: $\sqrt{7} : \sqrt{13}$

D,E,F বিন্দুত্রয় ΔABC-এর BC, CA, AB বাহুত্রয়কে যথাক্রমে 1 : 4, 3 : 2, 3 : 7 অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে। যদি $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরত্রয়ের লব্ধি $\overrightarrow{CK}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হয় তবে K বিন্দুটি, AB বাহুকে কি অনুপাতে বিভক্ত করবে? **Ans:** 1 : 3

যদি $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{c} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ হয় তবে $(\vec{a} + \vec{b})$ এবং $(\vec{b} - \vec{c})$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টরটি বের কর।

Ans: $\hat{i}$

যদি $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ এবং $\vec{a} + 5\vec{b} + 3\vec{c} = 0$ হয় তবে $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = ?$

Ans: 0

$2\hat{i} + 3\hat{j}$, $5\hat{i} + 6\hat{j}$ এবং $8\hat{i} + \lambda\hat{j}$ ভেক্টরত্রয় (1,1) বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। যদি তাদের প্রান্তবিন্দুত্রয় সমরেখ হয় তবে λ-এর মান বের কর। **Ans:** 9

কোন বস্তুকনার উপর ক্রিয়াশীল দুটি বলের মান যথাক্রমে 2kg-wt এবং 3kg-wt এবং বল দুইটি যথাক্রমে $2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর ক্রিয়াশীল। যদি বলদ্বয়ের প্রভাবে বস্তু কণাটি (0, 0,,0) বিন্দু হতে (1, 2, 2) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয় তবে বলদ্বয় কর্তৃক বস্তুকণাটির উপর কৃতকাজ বের কর। **Ans:** 6 gm.cm

$\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 8$ সমতলের উপর $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} + t(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ সরলরেখার অভিক্ষেপ সরলরেখার সমীকরন বের কর।

Ans: $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \mu(-\hat{i} + \hat{k})$

$\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 8$ সমতলের সমীকরণ সাপেক্ষে $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} + t(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ সরলরেখার প্রতিবিম্বের বের কর।

Ans: $\vec{r} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

102. যদি $(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).\vec{x} = 3$ এবং $(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) \times \vec{x} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ হয় তবে $\vec{x}$ ভেক্টরটি বের কর। **Ans:** $\frac{7\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}}{9}$

103. যদি $\vec{x} + \vec{y} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{x} \times \vec{y} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{x}.(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = 1$ হয় তবে $\vec{x}$ এবং $\vec{y}$ ভেক্টরদ্বয় বের কর।

Ans: $\frac{\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}}{9}$, $\frac{17\hat{i} + 12\hat{j} + 13\hat{k}}{9}$

104. যদি $\vec{x} + (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times \vec{y} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{y} + (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times \vec{x} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে $\vec{x}$ এবং $\vec{y}$ ভেক্টরদ্বয় নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{3\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}}{2}$, $\frac{3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}}{2}$

105. যদি $\vec{x} \times (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) + \{\vec{x}.(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})\}(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ হয় তবে $\vec{x} = ?$ **Ans:** $\frac{-4\hat{i} + 3\hat{j} + 16\hat{k}}{90}$

106. যদি $2\vec{x} + \{(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).\vec{x}\}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ হয় তবে $\vec{x}$ ভেক্টরটি বের কর। **Ans:** $\frac{7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{24}$

107. যদি $3\vec{x} + \vec{x} \times (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে $\vec{x}$ ভেক্টরটি বের কর। **Ans:** $\frac{1}{27}(13\hat{i} + 8\hat{j} + 28\hat{k})$

108. $-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর $\vec{c}$ এবং $3\hat{i} + 4\hat{j}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। $\vec{c}$ বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{1}{15}(-11\hat{i} - 10\hat{j} - 2\hat{k})$

109. যদি $3\vec{u} - 5\vec{v} + 4\vec{w} = 0$ এবং $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 3$ হয় তবে $\vec{u}$ এবং $\vec{w}$ ভেক্টরদ্বয়ের অর্ন্তভুক্ত কোণ বের কর। **Ans:** $\cos^{-1}\frac{5}{16}$

110. দেখাও যে, $\vec{N} = a\hat{i} + b\hat{j}$, xy সমতলে $ax + by = c$ সরলরেখার উপর লম্ব।

111. $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{D} = 7\hat{i} + 10\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $|\vec{c}| = 5$। যদি $\vec{C}$, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ -এর সমদ্বিখণ্ডক হয় তবে,

(i) $\vec{C} = ?$ **Ans:** $\frac{1}{\sqrt{1722}}(115\hat{i} + 160\hat{j} + 65\hat{k})$

(ii) $\vec{C}$-এর দিকে $\vec{A}$-এর উপাংশ **Ans:** $\frac{1}{14}(23\hat{i} + 32\hat{j} + 13\hat{k})$

(iii) $\vec{C}$-এর দিকে $\vec{B}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ **Ans:** $\sqrt{\frac{287}{6}}$

(iv) $\vec{C}$-এর লম্বদিকে $\vec{D}$-এর উপাংশ এবং লম্ব অভিক্ষেপ বের কর।

Ans: $\frac{-5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}}{42}$

(v) $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ উভয়ের উপর লম্ব দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{2\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{41}}$

(vi) দেখাও যে, $\vec{A}, \vec{B}$ এবং $\vec{D}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত।

৩য় অধ্যায়
প্রথম পত্র

সরলরেখা (Straight line)

স্থানাঙ্ক ও সঞ্চারপথ: [১ম অংশ (3.1-3.4)]

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

➲ কোন বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে (x, y) এবং এর পোলার স্থানাঙ্ককে (r, θ) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(a) কার্তেসীয় হতে পোলার স্থানাঙ্কে পরিবর্তন : $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}; r = \sqrt{x^2+y^2}$

(b) পোলার হতে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে পরিবর্তন: $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$

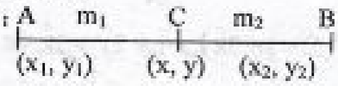
➲ দুই বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের সূত্র :

(i) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ হলে $PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

(ii) x অক্ষ হতে (x,y) বিন্দুর দূরত্ব = |y| এবং y অক্ষ হতে (x,y) বিন্দুর দূরত্ব = |x|

➲ বিভক্তিকরণ সূত্র : কোন রেখা প্রদত্ত বিন্দুতে বিভক্ত হলে এর অনুপাত Unknown থাকলে $m_1 : m_2$ ধরে অংক করতে হবে।
অথবা, 1:k ধরেও করা যায়

(ক) অন্তর্বিভক্ত :

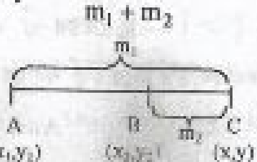


$m_1 : m_2$ অনুপাত, $x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$, $y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$

বহির্বিভক্ত :

$m_1 : m_2$ অনুপাত, $x = \frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}$

$y = \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}$



➲ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, ১ম ও ২য় বিন্দুর ঢাল = ২য় ও ৩য় বিন্দুর ঢাল।

অর্থাৎ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$

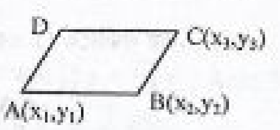
➲ (x_1, y_1), (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে (x, y) বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বিভক্ত করলে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x_1-x}{x-x_2} = \frac{y_1-y}{y-y_2}$

মান (+) আসলে উক্ত অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হবে।
মান (−) আসলে উক্ত অনুপাতে বহির্বিভক্ত হবে।

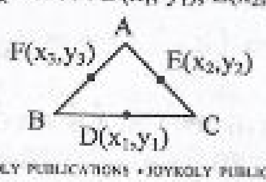
Exp: (1, 2) ও (6, 7) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে (−2, −1) বিন্দু কি অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2+1}{-1-7} = -\frac{3}{8}$ ∴ 3 : 8 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

➲ কোন সামান্তরিকের A, B, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) হলে
$D = (x_1 + x_3 - x_2,\ y_1 + y_3 - y_2)$



➲ ΔABC এর BC, AC, BA এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$, $F(x_3, y_3)$ হলে,
$A = (x_3 + x_2 - x_1, y_3 + y_2 - y_1)$
$B = (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$
$C = (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$



➲ ত্রিভুজ সংক্রান্ত–
ΔABC এর তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ দেয়া থা

(i) ভর কেন্দ্র $G = \left\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\right\}$

(ii) অন্তঃকেন্দ্র $I = \left\{\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right\}$

যেখানে BC = a, CA = b এবং AB = c

(iii) পরিকেন্দ্র C =
$\left(\frac{x_1\sin2A+x_2\sin2B+x_3\sin2C}{\sin2A+\sin2B+\sin2C}, \frac{y_1\sin2A+y_2\sin2B+y_3\sin2C}{\sin2A+\sin2B+\sin2C}\right.$

(iv) লম্ববিন্দু O =
$\left(\frac{x_1\tan A+x_2\tan B+x_3\tan C}{\tan+\tan B+\tan C}, \frac{y_1\tan A+y_2\tan B+y_3\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\right)$

(v) যে কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ ভরকেন্দ্র লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাকে 2:1 অ বিভক্ত করে।

(vi) পরিকেন্দ্র নির্ণয় এর সহজ পদ্ধতি: BC এর মধ্যবিন্দুগামী লম সমীকরণ $L_1 = (x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y$. AB এর মধ্যবিন্দুগামী লম সমীকরণ $L_2 = (x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y$.
$L_1 \cap L_2$ (L_1 এবং L_2 এর ছেদ বিন্দু) = পরিকেন্দ্র।

➲ ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত :

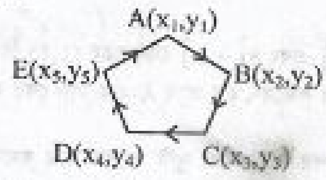
(i) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

(ii) A B C D চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ $\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x$
$-(y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1)\}$

(iii) ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}$ ×সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি×তাদের দূ

(iv) রম্বসের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × কর্ণদ্বয়ের গুণফল

➲ বহুভুজের ক্ষেত্রফল :



ABCDE বহুভুজটির ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ $\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x$
$-(y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_5 + y$

➲ A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

A, B, C এর নিশ্চায়ক $\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

(i) $\delta_{ABC} = 0$ হলে A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ

(ii) $\delta_{ABC} \neq 0$ বিন্দুত্রয় অসমরেখ এবং $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ $|\delta_{ABC}|$

(iii) $\delta_{ABC} > 0$ হলে বিন্দুত্রয় ধনাত্মক ক্রমে অবস্থিত।

(iv) $\delta_{ABC} < 0$ হলে বিন্দুত্রয় ঋণাত্মক ক্রমে অবস্থিত।

প্রতিবিম্ব রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব: (x_1, y_1) বিন্দুর প্রতিবিম্ব

01. x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব $(x_1, -y_1)$.
02. y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব $(-x_1, y_1)$.
03. $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব (y_1, x_1)
04. $y = -x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব $(-y_1, -x_1)$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ও পোলার স্থানাঙ্ক এর পারস্পরিক রূপান্তর সংক্রান্ত সমস্যা।

Ex-01 $(-\sqrt{3}, 1)$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

Sol^n: এখানে, $r\cos\theta = -\sqrt{3}$ এবং $r\sin\theta = 1$

$\therefore r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 3 + 1 = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \therefore r = 2$

এবং $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \tan 150^\circ \quad \therefore \theta = 150^\circ$

নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $(2, 150^\circ)$ **Ans.**

Ex-02 $(4, 60^\circ)$ পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে প্রকাশ কর।

Sol^n: এখানে, $r = 4, \theta = 60^\circ$

$\therefore x = r\cos\theta = 4\cos 60^\circ = 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$

$\therefore y = r\sin 60^\circ = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(2, 2\sqrt{3})$ **Ans.**

Ex-03 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর।

Sol^n: প্রদত্ত সমীকরণে $x = r\cos\theta$ ও $y = r\sin\theta$ বসিয়ে পাই,

$(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2 = 2a^2r^2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow r^4 = a^2r^2\sin 2\theta$

$\therefore r^2 = a^2\sin 2\theta$

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার সমীকরণ : $r^2 = a^2\sin 2\theta$ **Ans.**

Ex-04 $r\cos\theta = 2a\sin^2\theta$ সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।

Sol^n: $r\cos\theta = 2a\sin^2\theta$

$\Rightarrow x = 2a\dfrac{y^2}{r^2}$ [$\because x = r\cos\theta$ এবং $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$]

$\Rightarrow r^2x = 2ay^2 \Rightarrow (x^2 + y^2)x = 2ay^2$ [$\because r^2 = x^2 + y^2$]

$\Rightarrow x^3 = 2ay^2 - xy^2 \quad \therefore x^3 = y^2(2a - x)$

নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ $x^3 = y^2(2a - x)$ **Ans.**

For practice:

01. $r(1 + \cos\theta) = 2$ পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।
Ans. $y^2 = 4(1 - x)$.

02. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর।
Ans. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

03. $x^2 - y^2 = a^2$ কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর।
Ans. $r^2\cos 2\theta = a^2$

Type-02: বিভক্তকারী বিন্দু নির্ণয়

Ex-01 P(1, –1) এবং Q (8, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 3:4 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং বহির্বিভক্ত করে তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: অন্তর্বিভক্তের ক্ষেত্রে,

$x = \dfrac{(3 \times 8) + (4 \times 1)}{3 + 4} = 4$ এবং $y = \dfrac{(3 \times 6) + 4 \times (-1)}{3 + 4} = 2$

$\therefore (x, y) = (4, 2)$

বহির্বিভক্তের ক্ষেত্রে,

$x = \dfrac{(3 \times 8) - (4 \times 1)}{3 - 4} = -20$ এবং $y = \dfrac{(3 \times 6) - (4 \times -1)}{3 - 4} = -22$

$\therefore (x, y) = (-20, -22)$ **Ans.**

Ex-02 P(–2, 3) Q (4, –7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x অক্ষ এবং y অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

Sol^n: PQ কে k:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক

$(x, y) = \left(\dfrac{4k - 2}{k + 1}, \dfrac{-7k + 3}{k + 1}\right)$। এ বিন্দুটি x অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি $y = 0$ হবে।

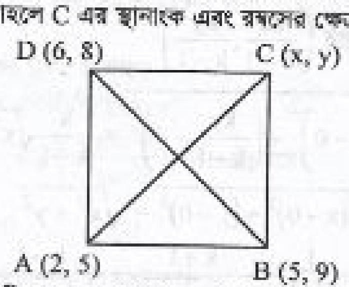
অর্থাৎ, $\dfrac{-7k + 3}{k + 1} = 0 \Rightarrow -7k + 3 = 0 \Rightarrow k = 3/7$

সুতরাং, x অক্ষ PQ কে 3 : 7 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। আবার, বিন্দুটি y- অক্ষের উপর অবস্থিত হলে, ছেদ বিন্দুটির ভুজ $x = 0$ হবে।

অর্থাৎ, $\dfrac{4k - 2}{k + 1} = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$

সুতরাং y অক্ষ PQ কে 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। **Ans.**

Ex-03 যদি A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8) বিন্দুত্রয় ABCD রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে C এর স্থানাংক এবং রম্বসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



Sol^n: মনেকরি, C বিন্দুর স্থানাংক (x, y)। তাহলে, AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\dfrac{x + 2}{2}, \dfrac{y + 5}{2}\right)$ এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= \left(\dfrac{5 + 6}{2}, \dfrac{9 + 8}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{17}{2}\right)$

ABCD একটি রম্বস বলে AC এবং BD কর্ণের মধ্যবিন্দু অভিন্ন।

$\therefore \dfrac{x + 2}{2} = \dfrac{11}{2}$ এবং $\dfrac{y + 5}{2} = \dfrac{17}{2}$

$\Rightarrow x = 9$ এবং $y = 12$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাংক (9, 12)

$BD = \sqrt{(5 - 6)^2 + (9 - 8)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(2 - 9)^2 + (5 - 12)^2} = \sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}$

$\therefore$ রম্বসের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta ABD$

$= 2 \times \dfrac{1}{2}BD \times \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}(BD \times AC)$

$= \left(\dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 7\sqrt{2}\right) = 7$ বর্গ একক **Ans.**

Ex-04 যদি A(acosα, asinα) এবং B(bcosβ, bsinβ) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে C(x,y) বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন AC : CB = a:b হয় তবে দেখাও যে, $x + y\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$

Sol^n: C বিন্দু AB কে a : b অনুপাত বহির্বিভক্ত করে।

$$\therefore x = \frac{a.b\cos\beta - b.a\sin\alpha}{a-b} = \frac{ab}{a-b}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\therefore y = \frac{a.b\sin\beta - b.a\cos\alpha}{a-b} = \frac{ab}{a-b}(\sin\beta - \sin\alpha)$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = -\tan\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \therefore x + y\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \text{ (Showed)}$$

Ex-05 A(0,0) ও C(x,y) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে B এবং D বিন্দু দুটি k:1 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC}$ ।

Sol^n: B বিন্দু AC রেখাংশকে k:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অতএব B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $\left(\frac{kx}{k+1}, \frac{ky}{k+1}\right)$

$$\therefore AB = \sqrt{\left(\frac{kx}{k+1} - 0\right)^2 + \left(\frac{ky}{k+1} - 0\right)^2} = \frac{k}{k+1}\sqrt{x^2+y^2}$$

একই অনুপাতে D বিন্দু AC রেখাংশকে k:1 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $\left(\frac{kx}{k-1}, \frac{ky}{k-1}\right)$

$$AD = \sqrt{\left(\frac{kx}{k-1} - 0\right)^2 + \left(\frac{ky}{k-1} - 0\right)^2} = \frac{k}{k-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

আবার, $AC = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{k+1}{k\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{k-1}{k\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{k+1+k-1}{k\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{AC}$$

$$\therefore \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC} \quad \text{(Proved)}$$

For practice:

01. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (–2, 4) ও (4, –5)। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন AB=3BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans.** (6, – 8)

02. A(8,10) ও B(18,20) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে 2:3 অনুপাতে Q ও R বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দুটি AB রেখার মধ্যবিন্দু। Q এবং R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $PQ \times PR = PB^2$

03. ABC এর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক A(4,6), B(–3, 2), C(–8, –5) এবং D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু; G বিন্দু AD রেখাকে এরূপে অন্তর্বিভক্ত করে যেন, AG: GD = 2: 1 হয়। G বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans.** (–2, 1)

04. A, B এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–2, 1), (–1, –3) ও (3, –2)। দেখ AB = BC এবং ∠ABC সমকোণ। যদি D, ABCD বর্গক্ষেত্রে শীর্ষবিন্দু হয় তাহলে D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং ABCD বর্গ কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans.** D(2, 2); $\left(\frac{1}{2}\right.$

Type-03: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত

Ex-01 A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2), (–5, 1), (x, y ΔABC এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, x – 6y = 25

Sol^n: দেওয়া আছে, A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2), (– 5, 1), (x, y

$$\therefore \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix}1 & 2\\-5 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-5 & 1\\x & y\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}x & y\\1 & 2\end{vmatrix}\right\}$$

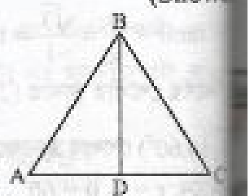
$$= \frac{1}{2}\{(1+10) + (-5y - x) + (2x - y)\} = \frac{1}{2}(x - 6y + 11)$$

শর্তানুসারে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল = ±18

$$\therefore \frac{1}{2}(x - 6y + 11) = \pm 18 \Rightarrow x - 6y + 11 = \pm 36$$

∴ x–6y = 25 অথবা, x–6y+47 = 0 (Show

Ex-02 ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A (– 3, – 2), B (– 3, 9) এবং C (5, – 8)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



Sol^n: (– 3, – 2), (– 3, 9) এবং (5, – 8) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্র

$$\begin{vmatrix}-3 & -2 & 1\\-3 & 9 & 1\\5 & -8 & 1\end{vmatrix} \text{ নির্ণায়কটির পরম মানের অর্ধেক।}$$

উক্ত নির্ণায়ক = {– 3(9 + 8) + 2(– 3 – 5) + 1(24 – 45)
= (– 51 – 16 – 21) = – 88

$$\therefore ABC \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{88}{2} = 44 \text{ বর্গ একক।}$$

মনে করি শীর্ষবিন্দু B হতে বিপরীত বাহু AC এর অঙ্কিত লম্ব BD

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}AC \times BD$.

এখানে $AC^2 = (-3-5)^2 + (-2+8)^2 = 64 + 36 = 100 \therefore AC$ =

$$\therefore \frac{1}{2}.10.BD = 44 \Rightarrow BD = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5} \text{ একক।}$$

Ex-03 (t + 1, 1), (2t+1, 3) ও (2t+2, 2t) বিন্দুগুলো যে ত্রিভুজের তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, t = 2 বা $-\frac{1}{2}$ হলে বি সমরেখ হবে।

Sol^n: প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের সংযোজনে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}t+1 & 1 & 1\\2t+1 & 3 & 1\\2t+2 & 2t & 1\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}|(t+1)(3-2t) - 1(2t+1-2t-2) + 1(4t^2+2t-6t-6)|$$

$$= \frac{1}{2}|(t-2)(2t+1)| \text{ বর্গ একক।}$$

উক্ত ক্ষেত্রফলে t = 2 বা $t = -\frac{1}{2}$ বসালে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়

∴ t = 2 বা $-\frac{1}{2}$ বসালে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে। (Show

For practice:

k এর মান কত হলে $\left(2,\frac{3}{2}\right),\left(-3,-\frac{7}{2}\right)$ এবং $\left(k,\frac{9}{2}\right)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হবে?

Ans. $k = 5$

ΔABC এর শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, −3), (13, 0), (−2, 9) এবং D, E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর এমনভাবে স্থাপিত যেন $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=2$ হয়। ΔABC ও ΔDEF এর ক্ষেত্রফল বের কর এবং দেখাও যে, তাদের অনুপাত 3:1।

O(0, 0), A(P sin α, − P sin β) এবং B(P cos α, P cos β) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের মান $\frac{1}{2}P^2$ হলে α ও β এর মাঝে সম্পর্ক স্থাপন কর।

Ans. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

যদি কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$; $(at_3^2, 2at_3)$ এবং যদি ভরকেন্দ্র x অক্ষের উপর থাকে, তবে দেখাও যে, $t_1+t_2+t_3=0$

Type-04: শর্তানুযায়ী সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর

Ex-01 দুইটি স্থির বিন্দু A(a,0) এবং B(0,a) হতে P সেটের অন্তর্ভুক্ত প্রতিটি বিন্দুর দূরত্বের বর্গের অন্তর সর্বদা 2a হলে P এর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol: মনে করি, P সেটের যে কোন একটি উপাদান P(x,y)

$\therefore PA^2=(x-a)^2+(y-0)^2=x^2+y^2-2ax+a^2$ ....(i)

$\therefore PB^2=(x-0)^2+(y-a)^2=x^2+y^2-2ay+a^2$ ....(ii)

শর্তানুসারে, $PA^2-PB^2=\pm 2a$

$\Rightarrow (x^2+y^2-2ax+a^2)-(x^2+y^2-2ay+a^2)=\pm 2a$

$\Rightarrow 2ay-2ax=\pm 2a \quad \Rightarrow y-x=\pm 1 \quad \therefore y=x\pm 1$

$\therefore$ P এর সঞ্চারপথের সমীকরণ : $y=x\pm 1$ **Ans.**

Ex-02 a + b দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি চলন্ত সরলরেখার প্রান্ত দুটি সবসময় পরস্পর লম্ব এরূপ দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর থাকে। সরলরেখাটির উপর অবস্থিত একটি বিন্দু সরলরেখাটিকে a ও b দৈর্ঘ্যে বিভক্ত করলে বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

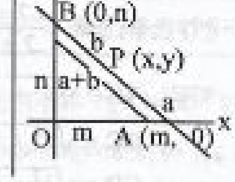
Sol: মনে করি, লম্ব সরলরেখাদ্বয় x ও y অক্ষ এবং চলন্ত a+b দৈর্ঘ্যের সরলরেখাটি এর যেকোন একটি অবস্থানে x অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি O মূলবিন্দু এবং OA = m : OB = n হয় তাহলে $m^2+n^2=(a+b)^2$ .... (i)

$\therefore$ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে (m, 0) এবং (0, n)। যদি রেখাটির ঐ অবস্থানে P(x,y) বিন্দুটি উহাকে a : b অনুপাতে বিভক্ত করে তবে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a.0+b.m}{a+b},\frac{a.n+b.0}{a+b}\right)$

অর্থাৎ $x=\frac{bm}{a+b}$, $y=\frac{an}{a+b}$ $\quad\therefore m=\frac{x(a+b)}{b}$, $n=\frac{(a+b)y}{a}$

m এবং n এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2(a+b)^2}{b^2}+\frac{y^2(a+b)^2}{a^2}=(a+b)^2$



$\Rightarrow \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\therefore$ P(x,y) বিন্দুর সঞ্চারপথের নির্ণেয় সমীকরণ হবে $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. **Ans.**

Ex-03 পরিবর্তনশীল বিন্দুর একটি সেটের প্রতিটি উপাদান হতে (0, e) এবং (0, −e) বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের যোগফল সর্বদা 2 একক। প্রমাণ কর যে, সঞ্চার পথের সমীকরণ $x^2+(1-e^2)y^2=1-e^2$.

Sol^n: মনে করি, পরিবর্তনশীল P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore$ প্রদত্ত (0, e) এবং (0, −e) বিন্দুদ্বয় হতে p(x, y) বিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে $\sqrt{(x-0)^2+(y-e)^2}$ এবং $\sqrt{(x-0)^2+(y+e)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{x^2+y^2-2ey+e^2}+\sqrt{x^2+y^2+2ey+e^2}=2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2ey+e^2=\left(2-\sqrt{x^2+y^2+2ey+e^2}\right)^2$

$\Rightarrow 4\sqrt{x^2+y^2+2ey+e^2}=4+4ey$

$\Rightarrow x^2+y^2+2ey+e^2=1+2ey+e^2y^2$

$\Rightarrow x^2+(1-e^2)y^2=1-e^2$

$\therefore$ P(x, y) বিন্দুর সঞ্চার পথের নির্ণেয় সমীকরণ হবে $x^2+(1-e^2)y^2=1-e^2$

(Proved)

For practice:

01. (3, 0) এবং (−3, 0) বিন্দু দুটি হতে একটি সেটের বিন্দু সমূহের দূরত্বের যোগফল 10। সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $16x^2+25y^2=400$.

02. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ A(0, 4), B(x, y) এবং C(−8, −2) AC রেখা ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র G বিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করলে G এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x^2+y^2+8x-2y-200=0$

Type-05: পরামিতিক সমীকরণের সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয়

Ex-01 দেখাও যে, t এর সকল মানের জন্য $\left(a\frac{1+t^2}{1-t^2},\frac{2at}{1-t^2}\right)$ বিন্দু একটি নির্দিষ্ট অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

Sol^n: ধরি, সেটভুক্ত একটি বিন্দু (x, y)

$x=a\frac{1+t^2}{1-t^2}=a\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$ [t = tanθ ধরে]

$\therefore \frac{x}{a}=\sec 2\theta$ ....(i)

আবার, $y=\frac{2at}{1-t^2}=\frac{2\tan\theta\times a}{1-\tan^2\theta}=a\tan 2\theta$.

$\therefore \frac{y}{a}=\tan 2\theta$. ....(ii)

$(i)^2-(ii)^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{a}\right)^2=\sec^2 2\theta-\tan^2 2\theta$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \therefore x^2-y^2=a^2$

$\therefore$ উক্ত পরামিতিক সমীকরণ t এর সকল মানের জন্য একটি নির্দিষ্ট অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

(Showed)

For practice:

01. t একটি পরিবর্তনশীল পরামিতি হলে দেখাও যে,
$x=\frac{1}{2}a\left(t+\frac{1}{t}\right), y=\frac{1}{2}b\left(t-\frac{1}{t}\right)$ সমীকরণদ্বয় একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করে।

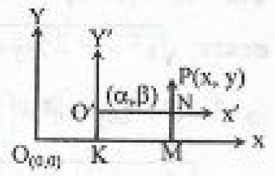
02. t এর সকল বাস্তব মানের জন্য একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $y^2=4ax$

Type-6 (অক্ষ স্থানান্তর)

■ অক্ষ স্থানান্তর: অক্ষের দিক অপরিবর্তিত।

■ নিয়ম: আদি অক্ষরেখা OX ও OY এর সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং স্থানান্তরিত অক্ষরেখা O'X' ও O'Y' সাপেক্ষে P বিন্দুর নতুন স্থানাঙ্ক (x', y') হলে,

$x = OM = OK + KM$
$= OK + O'N = \alpha + x'$
$y = PM = MN + PN$
$= O'K + PN = \beta + y'$
$\therefore x = \alpha + x'$ ও $y = \beta + y'$
আবার, $x' = x - \alpha$ ও $y' = y - \beta$



■ অঙ্ক করার সময়, যদি নতুন মূলবিন্দু O(α, β) ধরা হয়, তাহলে x এর পরিবর্তে (x + α) এবং y এর পরিবর্তে (y + β) বসাতে হয়। তাহলে নতুন অক্ষের সাপেক্ষে রূপান্তরিত সমীকরণ পাওয়া যায়।

Ex-01 সমান্তরাল অপসারণ দ্বারা অক্ষদ্বয়কে (–2, –1) বিন্দুতে স্থানান্তর করে $3x^2 - 5xy - 2y^2 - 7x + 14y = 0$ কে লঘু আকারে প্রকাশ কর।

Sol^n: $x = X + 2,\ y = Y + 1$

Now, $3(X+2)^2 - 5(X+2)(Y+1) - 2(Y+1)^2 - 7(X+2) + 14(Y+1) = 0$

$\Rightarrow 3X^2 + 12X + 12 - 5XY - 5X - 10Y - 10 - 2Y^2 - 4Y - 2 - 7X + 14 + 14Y + 1 = 0$

$\Rightarrow 3X^2 - 5XY - 2Y^2 = 0$ **Ans.**

For practice:

01. সমান্তরাল অপসারণ দ্বারা অক্ষদ্বয়কে কোন বিন্দুতে স্থানান্তর করে $x^2 + y^2 - 5x + 3y - \frac{1}{2} = 0$ সমীকরণকে $x^2 + y^2 = a^2$ আকারে প্রকাশ কর।

Ans. $\left(\frac{-5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

02. অক্ষদ্বয়ের দিক অপরিবর্তিত রেখে (2, –4)-কে মূলবিন্দু ধরে তার সাপেক্ষে নিম্নের সমীকরণগুলোর রূপান্তর কর:
(i) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 32y - 50 = 0$ **Ans.** $5x^2 - 4y^2 = 0$
(ii) $x^2 + y^2 - 12x - 64 + 34 = 0$ **Ans.** $x^2 + y^2 + 8x - 14 + 20 = 0$

Type-07: প্রতিবিম্ব সম্পর্কিত সমস্যাবলী

■ বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয়: সাপেক্ষ বিন্দু প্রদত্ত বিন্দু ও প্রতিবিম্ব বিন্দুর মধ্যবিন্দু হয়।
যেমন– (x_1, y_1) বিন্দুর সাপেক্ষে (x_2, y_2) বিন্দুর প্রতিবিম্ব (x_2', y_2') হলে,
$\frac{x_2 + x_2'}{2} = x_1$ এবং $\frac{y_2 + y_2'}{2} = y_1$

Ex-01 (–3, 4) বিন্দু সাপেক্ষে (2, –1) বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।
Sol: এক্ষেত্রে, প্রতিবিম্ব, (x, y) হলে

$\frac{x+2}{2} = -3$ $\Rightarrow x = -8$	এবং	$\frac{y-1}{2} = 4$ $\Rightarrow y = 9$

∴ প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক ≡ (– 8, 9) **Ans.**

For practice:

01. (5, 7) বিন্দু সাপেক্ষে (1, 5) বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর। **Ans.** (9, 9)

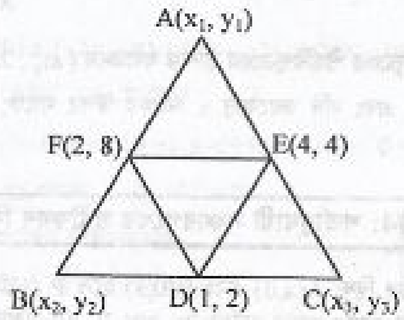
BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান] [স্থানাঙ্ক ও সঞ্চারপ

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা

01. (1, 2) (4, 4) এবং (2, 8) যথাক্রমে ত্রিভুজ ABC এর বা মধ্যবিন্দু। ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [01-02]

Solve



$\Delta ABC = 4 \times \Delta DEF$

$= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 32$ বর্গএকক

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা

01. একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে, x অক্ষ হতে এর বিন্দুর দূরত্ব মূল বিন্দু থেকে তার দূরত্বের অর্ধেক। বিন্দুটির সঞ্চ নির্ণয় কর। [04-05]

Solve শর্তমতে, $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$
$\Rightarrow 4y^2 = x^2 + y^2 \ \therefore x^2 - 3y^2 = 0$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা

01. A(1, 2), B(–3, 1), C(–2, –3) ও D(2, –2) চারটি বিন্দু। ABC একটি ট্রাপিজিয়াম? [05-06]

Solve AB রেখার ঢাল $= \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4}$

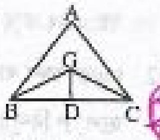
CD রেখার ঢাল $= \frac{-2+3}{2+2} = \frac{1}{4}$ ∴ AB || CD

আবার, $AB = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$
$BC = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
$CD = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
$DA = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

∴ ABCD ট্রাপিজিয়াম নয়।

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের স্থানাংক যথাক্রমে (10, 20), (20, 30) ও (30, 10)। G ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হলে, GBC ত্রিভুজের GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [04-05]

Solve G বিন্দু স্থানাংক $\left(\frac{60}{3}, \frac{60}{3}\right) = (20, 20)$



D বিন্দু স্থানাঙ্ক = (25, 20)

$\therefore$ GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(25-20)^2 + (20-20)^2} = 5$ Ans.

(–1, –4), (5,0) এবং (11, 4) বিন্দু তিনটি কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু কিনা তা যাচাই কর। [03-04]

Solve A (–1, – 4), B(5,0), C(11,4)

$AB^2 = 52, BC^2 = 52, AC^2 = 208$

$\therefore$ (–1, –4), (5, 0), (11, 4) বিন্দুত্রয় সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়। Ans.

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. (1, 0) বিন্দু এবং x + 1 = 0 সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চারপথ গঠন করে তার সমীকরণ হবে- [11-12]

A. $x^2 = 2y$ B. $y^2 = 4x$ C. $x^2 = 4y$ D. $y^2 = 2x$

Ans B Solve $\frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{1^2+0^2}\right)^2} = (x-1)^2 + (y-0)^2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \therefore y^2 = 4x$

02. $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক কত? [09-10]

A. $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ B. $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ C. $\left(\sqrt{6}, \frac{5}{4}\pi\right)$ D. $\left(6, \frac{-\pi}{4}\right)$

Ans C Solve $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$

এবং $\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1$ [যেহেতু বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে]

$\therefore \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{6}, \frac{5\pi}{4}\right)$

03. a এর কোন মানের জন্য $(a^2, 2)$, (a, 1) এবং (0, 0) বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে? [06-07]

A. 0, –1 B. 2, 2 C. –2 D. 0, 2

Ans D Solve $\begin{vmatrix} a^2 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow a^2 - 2a = 0 \therefore a = 0, 2$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. OP রেখাংশকে ঘড়ির কাঁটার দিকে $\frac{\pi}{6}$ কোণে ঘুরানোতে নতুন অবস্থান হলো OQ। P এর স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3}, -3)$ হলে Q এর পোলার স্থানাঙ্ক হবে– [14-15]

A. $\left(-2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ B. $\left(-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ C. $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

D. $\left(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ E. $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

Ans D Solve $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$

$\theta = \pi + \tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{3}$

$\theta' = \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \therefore Q = \left(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$

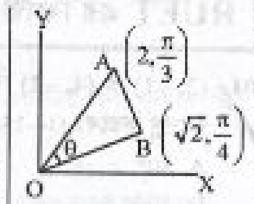
02. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের পোলার স্থানাংক যথাক্রমে পোল (0, 0), $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ও $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বর্গ এককে হবে– [13-14]

A. $1 + \sqrt{3}$ B. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $1 - \sqrt{3}$

D. $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ E. 2

Ans D Solve

চিত্র থেকে পাই, $\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$



$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \sin\frac{\pi}{12}$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ বর্গ একক

03. একটি সেটের প্রতিটি বিন্দু B(1, 1) ও C(–1, –1) স্থির বিন্দু দুইটির সঙ্গে এমন একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার ক্ষেত্রফল 5 বর্গ একক। চলন্ত বিন্দু P(x, y) এর সঞ্চারপথের সমীকরণ কোনটি? [08-09]

A. $x^2 + y^2 = 5$ B. $x^2 + y^2 = 25$ C. $x - y = \pm 5$

D. x + y = 5 E. x + y = ± 10

Ans C Solve $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 5$

$\Rightarrow x(1+1) - y(1+1) + (-1+1) = \pm 10$

$\Rightarrow 2x - 2y = \pm 10 \quad \therefore x - y = \pm 5$

04. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A(x, y), B(1, 3) ও C(3, 1) হলে এবং যদি x + y = 12 হয়, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কোনটি? [07-08]

A. 8 বর্গ একক B. 6 বর্গ একক C. 12 বর্গ একক

D. 9 বর্গ একক E. 7 বর্গ একক

Ans A Solve Δ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $[r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$

$= \frac{1}{2}(2x - 2 + 2y - 6) = \frac{1}{2}\{2(x+y) - 8\}$ [$\because x + y = 12$]

$= \frac{1}{2}\{2 \times 12 - 8\} = 8$ বর্গ একক

05. (1, 4) এবং (9, –12) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে যে বিন্দুটি 5:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক হল- [05-06]

A. (–6, 6) B. (–6, –6) C. (6, –6) D. (6, 6)

Ans C Solve $x = \frac{5 \times 9 + 3 \times 1}{5+3} = 6$

$\Rightarrow y = \frac{5 \times (-12) + 3 \times 4}{5+3} = -6 \therefore (x, y) = (6, -6)$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দুগুলি (1, 1), (4, 4), (4, 8) এবং (1, 5) হলে এর যে কোন একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য হবে- [10-11]

A. $3\sqrt{2}$ B. 4
C. $\sqrt{10}$ D. None

Ans | C | Solve

$AC = \sqrt{(1-4)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{58}$

$BD = \sqrt{(4-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{10}$



RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. (3, –1) ও (4, –2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা x অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে? [14-15]

A. 30° B. 75° C. 105°
D. 135° E. 150°

Ans | D | Solve $m = \frac{-1+2}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$

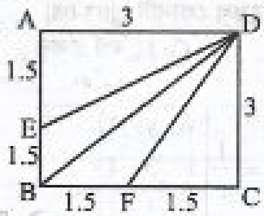
$\theta = \tan^{-1}(-1) = 135°$

02. 3 cm বাহুবিশিষ্ট ABCD একটি বর্গ এবং E ও F যথাক্রমে AB ও BC এর মধ্যবিন্দু। EBFD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [14-15]

A. 2.25 sq cm B. 3 sq cm C. 4 sq cm
D. 4.5 sq cm E. 6 sq cm

Ans | D | Solve ক্ষেত্রফল EBD = ক্ষেত্রফল ADE $= \frac{1}{2} \times 3 \times 1.5$
$= 2.25$ sq cm

∴ ক্ষেত্রফল EBFD = 2 × ক্ষেত্রফল EBD = 2 × 2.25 sq cm = 4.5 sq cm



03. পোলার সমীকরণ r = sinθ প্রকাশ করে একটি- [13-14]

A. parabola, focus (1, 0) B. parabola, focus (0, 1)
C. circle, centre (1/2, 0) D. circle, centre (0, 1/2)
E. None

Ans | D | Solve $r = \sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = r\sin\theta \Rightarrow r^2 = y$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = y$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - y = 0$

$\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ যা বৃত্তের সমীকরণ প্রকাশ করে যার

কেন্দ্র $= \left(0, \frac{1}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$

SELF TEST [Written]

01. যদি একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দুগুলো A(x, y), B(1, 2) এবং C... হয় এবং তার ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হয়, তবে দেখাও যে x + y = 15...

02. t এর সকল বাস্তব মানের জন্য একটি চলমান বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক $(ct + \frac{c}{t}$... হলে, P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। Ans: $x^2 - y^2 = 4c^2$...

03. দেখাও যে, ps = rq না হলে, (p, q) বিন্দুটি (r+s, s – r) এবং (r–s... বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হবে না।

04. যদি P, Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হয় এ... এর উপর একটি বিন্দু R এরূপভাবে নেওয়া হয় যেন PR = k. RQ... দেখাও যে, R এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$

05. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয় A, B, C এর স্থানাঙ্ক (6, 3), (–3, 5), (... এবং D, E, F বিন্দু যথাক্রমে BC, CA, AB কে 3:1 অনুপাতে অন্ত... করে। দেখাও যে, ΔABC ও ΔDEF এর অনুপাত 16:7 হবে।

06. প্রমাণ কর যে, (p, p–2), (p + 3, p) এবং (p + 2, p + 2) বিন্দুগুলো... গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে।

07. প্রমাণ কর যে, (a, 0), (0, b) ও (1, 1) বিন্দুগুলো সমরেখ হ... $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ হয়।

08. P বিন্দু A(1, –1), B (9, 7), C(1, 7) বিন্দুত্রয় হতে সমদূরবর্তী হলে... P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। Ans...

SELF TEST [MCQ]

01. A(–4, –2), B(2, 0), C(8, 6) ও D(2, 4) হলে–

A. ABCD একটি সামান্তরিক B. রম্বস
C. আয়তক্ষেত্র D. None

02. $(2\sqrt{2}, 135^0)$ পোলার স্থানাঙ্ক থেকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে রূপান্তরিত...

A. (2, 2) B. (1, 2)
C. (–2, –2) D. (–2, 2)

03. y অক্ষ ও (7,2) হতে (a, 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে a =?

A. $\frac{7}{29}$ B. $\frac{58}{14}$ C. $\frac{29}{6}$ D. $\frac{29}{8}$

04. (a, a), (–a, –a) ও $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দু তিনটি কি নির্দেশ করে...

A. সমবাহু B. সমদ্বিবাহু C. সমকোণী D. বিষমবা...

05. A (2, 1) ও B(5, 2) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে সম... সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ কোনটি?

A. 3x+y=12 B. x+3y=12
C. 3x–y=12 D. x–3y=12

06. (7, 5) এবং (–2, –1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সম... বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক–

A. (4, 3) ও (1, 2) B. (4, 3) ও (1, 1)
C. (4, 3) ও (4, 4) D. None

07. একটি ত্রিভুজের দুটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2,7) এবং (6,1) এবং ভ... (6,4)। তৃতীয় শীর্ষবিন্দু-

A. (4, 10) B. (10, 4)
C. (10, 11) D. (10, 6)

08. h এর মান কত হলে (1, 3), (–4, –6) এবং (h, 12) বিন্দুত্রয় সমরেখ হ...

A. 7 B. 6
C. 9 D. 10

[illegible] $-y-1=0$ রেখাটি x ও y অক্ষ দ্বারা $2x+y-2=0$ এর খণ্ডিত [illegible] কত অনুপাতে বিভক্ত করে?

A. 1 : 3 B. 2 : 3 C. 3 : 4 D. 4 : 5

[illegible] চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু (2, 5), (4, 1), (−4, 2) ও (1, −1) হলে এর [illegible] কত?

A. $\frac{49}{4}$ বর্গ একক B. 98 বর্গ একক

C. $\frac{49}{[illegible]}$ বর্গ একক D. $\frac{49}{2}$ বর্গ একক

[illegible] −1) ও (8, 9) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে $y-x+2=0$ [illegible] কি অনুপাতে বিভক্ত করে?

A. 1 : 3 B. 2 : 3 C. 3 : 4 D. 4 : 5

[illegible] ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (cosθ, sinθ), (cos3θ, sin3θ) এবং [illegible] হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

A. $\frac{1}{2}\cos2\theta$ B. $\frac{1}{2}\sin2\theta$

C. $\frac{1}{2}\sin4\theta$ D. $\frac{1}{2}\cos4\theta$

[illegible] অক্ষ হতে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব (2, 2) বিন্দু থেকে সেটটির [illegible] দ্বিগুণ। তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর-

A. $3x^2+4y^2-16x-16y+32=0$

B. $3x^2+4y^2+16x+16y+32=0$

C. $x^2+y^2-16x-16y+32=0$

D. None

[illegible] চলমান বিন্দুর স্থানাঙ্ক (acosθ, bsinθ) হলে ঐ বিন্দুটির [illegible] সমীকরণ-

A. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ B. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

C. $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$ D. None

[illegible] x এর কোন মানের জন্য (1, 2), (2, 1) ও (3, x) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত [illegible] ক্ষেত্রফল শূন্য হবে-

A. [illegible] B. 2

C. 0 D. 3

[illegible] 1), (2p+1, 3) এবং (2p+2, 2p) বিন্দুত্রয় সমবিন্দু হবে যদি p = ?

A. −1 B. 1 C. 2 D. 0

[illegible] b+c), (b, c+a) ও (c, a+b) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

A. abc B. $a^2+b^2+c^2$

C. ab + bc + ca D. 0

[illegible] বিন্দুর x অক্ষ থেকে দূরত্ব y অক্ষ থেকে দূরত্বের দ্বিগুণ তার সঞ্চারপথ-

A. x = 2y B. y = 2x

C. x = 5y + 1 D. y = 2x + 3

[illegible] $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, a\right), \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, 2a\right)$ এবং $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 3a\right)$ বিন্দুত্রয় কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু?

A. সমবাহু ত্রিভুজ B. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ

C. সমকোণী ত্রিভুজ D. None

[illegible] (5, −5) এর পোলার স্থানাঙ্ক-

A. $\left(5\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ B. $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$

C. $\left(5, -\frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

21. (cosθ+sinθ, cosθ−sinθ) এই পরামিতিক বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ-

A. $x+y=2$ B. $x^2+y^2=2$

C. $x^2-y^2=2$ D. None

22. (0, 0), (0, 8) ও (4, 0) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

A. (3, 4) B. (3, 1)

C. (2, 4) D. (6, 2)

23. (a, b) বিন্দু সাপেক্ষে কোন বিন্দু (x, y) এর প্রতিবিম্ব (x′, y′) হলে-

A. (x′, y′) = (x − 2a, y − 2b) B. (x′, y′) = (−x + 2a, −y + 2b)

C. (x′, y′) = (x − a, y − b) D. (x′, y′) = (x + 2a, y + 2b)

24. A(5, −2), B(1, 6) ও D(7, 4) বিন্দুগুলোর জন্য C(3, 2) বিন্দুটি-

A. শুধু A ও B এর জন্য সমদূরবর্তী B. শুধু B ও D এর জন্য সমদূরবর্তী

C. D ও A হতে সমদূরবর্তী D. সবগুলো হতে সমদূরবর্তী

25. y = x রেখার উপর মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুটি-

A. $(0, \sqrt{2})$ B. $(\sqrt{2}, 0)$

C. (2, 2) D. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

26. (4, 0), (8, 0) ও (3, 4) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের জন্য তৃতীয় শীর্ষ হতে অপর বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য-

A. 8 B. 4 C. 3 D. 2

27. মূলবিন্দু (1, −2) বিন্দুতে স্থানান্তর করলে (4, 5) বিন্দুর নতুন স্থানাঙ্ক-

A. (5, 3) B. (3, 5) C. (3, 7) D. None

28. *l* দৈর্ঘ্যের একটি লাঠি মেঝে এবং দেয়ালের উপর অবস্থান করে। যদি লাঠিটি মেঝেতে পিছলে যেতে থাকে তাহলে এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ-

A. সরলরেখা B. বৃত্ত C. পরাবৃত্ত D. উপবৃত্ত

29. A(a, b) এবং B(c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ মূলবিন্দুতে θ কোণ উৎপন্ন করলে cosθ সমান-

A. $\frac{ab+cd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$ B. $\frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$

C. $\frac{ac-bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$ D. None

30. 7x − 2y + 10 = 0, 7x + 2y − 10 = 0 এবং y + 2 = 0 রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

A. 8 বর্গ একক B. 14 বর্গ একক

C. 12 বর্গ একক D. None

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	21. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	22. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	23. ⒶⒷⒸⒹ
04. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	24. ⒶⒷⒸⒹ
05. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷⒸⒹ
06. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷⒸⒹ
07. ⒶⒷⒸⒹ	17. ⒶⒷⒸⒹ	27. ⒶⒷⒸⒹ
08. ⒶⒷⒸⒹ	18. ⒶⒷⒸⒹ	28. ⒶⒷⒸⒹ
09. ⒶⒷⒸⒹ	19. ⒶⒷⒸⒹ	29. ⒶⒷⒸⒹ
10. ⒶⒷⒸⒹ	20. ⒶⒷⒸⒹ	30. ⒶⒷⒸⒹ

Correct Answer

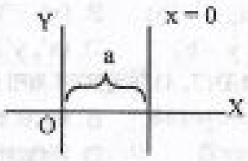
30.B	29.B	28.B	27.C	26.B	25.D	24.D	23.B	22.C	21.B
20.A	19.B	18.B	17.D	16.C	15.C	14.A	13.A	12.B	11.B
10.D	09.A	08.B	07.B	06.B	05.A	04.A	03.B	02.D	01.A

সরলরেখার সমীকরণ: [২য় অংশ (3.5)]

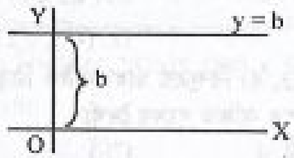
এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

বিভিন্ন ধরনের সরলরেখার সমীকরণ:

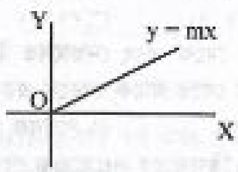
i) একটি সরলরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং x অক্ষের ছেদক অংশ a, রেখাটির সমীকরণ $x = a$



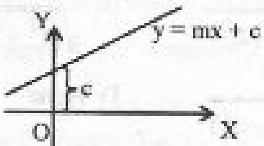
ii) একটি সরলরেখা x অক্ষের সমান্তরাল y অক্ষের ছেদক অংশ b, রেখাটির সমীকরণ $y = b$



iii) একটি সরলরেখা মূলবিন্দুগামী এবং ঢাল m রেখাটির সমীকরণ $y = mx$

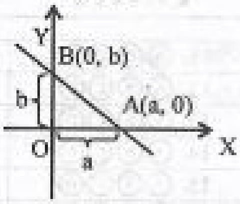


iv) একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y অক্ষের ছেদক অংশ c, তবে সরলরেখাটির সমীকরণ হবে, $y = mx + c$

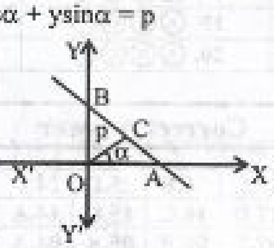


v) একটি সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী তবে রেখাটির সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

vi) একটি সরলরেখার x এবং y অক্ষের ছেদক অংশ যথাক্রমে a এবং b হলে রেখাটির সমীকরণ হবে, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

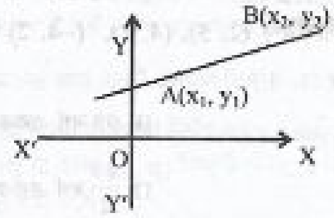


vii) মূলবিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α-কোণ উৎপন্ন করে, রেখাটির সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$



viii) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2) হলে AB রেখার

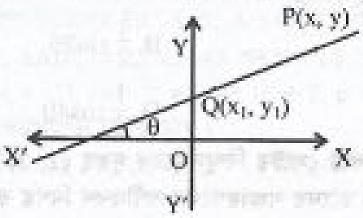
$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$



ix) একটি সরলরেখা (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এমন সরলরেখার

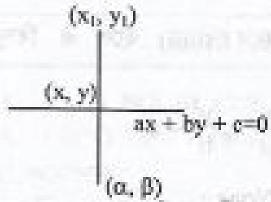
$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = \pm r$$

যেখানে (x, y) বিন্দু হতে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব r.



রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয়:

01. চিত্র হতে প্রদত্ত সরলরেখা ও প্রাপ্ত লম্বদ্বয়ের ছেদ বিন্দু (x, y) নির্ণয় করতে



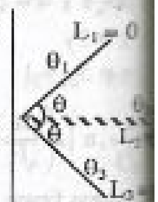
02. প্রথমে (x_1, y_1) বিন্দুগামী $ax + by + c = 0$ রেখার উপর লম্ব সমীকরণ বের করতে হবে। অতঃপর ছেদবিন্দু (x, y) বের করতে হবে
03. এখন নির্ণেয় বিন্দু (α, β) হলে, (α, β) এবং (x_1, y_1) এর মধ্যবিন্দু ধরে (α, β) বের করা যাবে।

Shortcut: MCQ এর জন্য $ax + by + c = 0$ রেখার সাপেক্ষে (বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক $\alpha = x_1 - \frac{2a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$,

ও $\beta = y_1 - \frac{2b\ (ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$.

রেখার সাপেক্ষে রেখার প্রতিবিম্ব নির্ণয়:

L_2 রেখার সাপেক্ষে L_1 রেখাদ্বয়ের প্রতিবিম্বের সমীকরণঃ



01. প্রথমে L_1 ও L_2 রেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে হবে।
02. ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বের করতে হবে।
03. এরপর তিনটি রেখার ঢাল বের করতে হবে। মনে করি L_1, L_2, L_3 রেখার ঢালত্রয় যথাক্রমে a, b, c।

$\therefore L_1$ রেখার ঢাল $m_1 = \tan\theta_1 = a \therefore \theta_1 = \tan^{-1}a$
$\therefore L_2$ রেখার ঢাল $m_2 = \tan\theta_2 = b \therefore \theta_2 = \tan^{-1}b$
$\therefore L_3$ রেখার ঢাল $m_3 = \tan\theta_3 = c \therefore \theta_3 = \tan^{-1}c$

04. এরপর $\theta = \theta_1 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_3$ সমীকরণে উপরোক্ত মানগুলো প্রতিবিম্ব রেখার ঢাল m_3 বের করতে হবে। যেহেতু আপতন ও প্রতিসরণ কোণ সমান তাই এই সমীকরণ লিখা হয়েছে।

রেখার স... বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণে ঢালের মান বসালে প্রতিবিম্ব রেখার সমীকরণ পাওয়া যাবে।

Shortcut: MCQ এর জন্য $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখার প্রতিবিম্বের সমীকরণ–

$$\left(a_1^2 + b_1^2\right)L_2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2)L_1 = 0$$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ সূত্রের ব্যবহার

Ex-01 $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ রেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, এখানে P একটি ধ্রুবক। দেখাও যে, AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $P^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$.

Solⁿ: দেওয়া আছে, $x\cos\theta + y\sin\theta = P$

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}} + \frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}} = 1$$

A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{P}{\cos\theta}, 0\right)$ ও $\left(0, \frac{P}{\cos\theta}\right)$

ধরি, AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y)

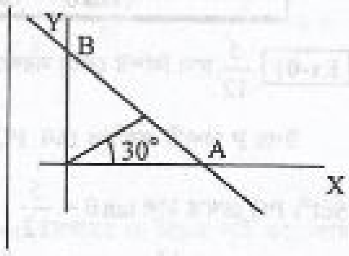
$x = \frac{P}{2\cos\theta}$, $y = \frac{P}{2\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{P}{2x}$ ....(i) $\sin\theta = \frac{P}{2y}$ .... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow \frac{P^2}{4x^2} + \frac{P^2}{4y^2} = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$P^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$ **(Showed)**

Ex-02 একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে $\frac{50}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর অংকিত লম্ব x অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।



Solⁿ: মনে করি রেখাটির সমীকরণ,

$x\cos30^0 + y\sin30^0 = P$

$\Rightarrow \sqrt{3}x + y = 2P$.........(i)

(i) নং রেখাটি x ও y অক্ষকে $A\left(\frac{2P}{\sqrt{3}}, 0\right)$ ও B(0, 2P) বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times \frac{2P}{\sqrt{3}} \times 2P = \frac{50}{\sqrt{3}} \Rightarrow P^2 = 25 \Rightarrow P = \pm 5$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ; $\sqrt{3}x + y = \pm10$ **Ans.**

Ex-03 একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমমানের বিয়োগবোধক অংশ ছেদ করে। মূলবিন্দু হতে এর দূরত্ব 3। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি সরলরেখার সমীকরণ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$.

যেহেতু লম্ব দূরত্ব 3, ∴ P = 3 ∴ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 3$

যেহেতু সরলরেখাটি অক্ষদ্বয় হতে সমমানের বিয়োগবোধক অংশ ছেদ করে সেহেতু $\sin\alpha$ ও $\cos\alpha$ উভয়েই বিয়োগবোধক, অর্থাৎ α তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

∴ $\alpha = 180^0 + 45^0 = 225^0$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ : $x\cos225^0 + y\sin225^0 = 3$

$\Rightarrow x + y = -3\sqrt{2}$ ∴ $x + y + 3\sqrt{2} = 0$ **Ans.**

For practice:

01. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে। মূলবিন্দু হতে এর উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য 6 একক। এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x + y = 6\sqrt{2}$

02. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয় হতে সমান খণ্ডিত অংশ কেটে নেয় এবং (2, –3) বিন্দু দিয়ে যায়।
Ans. $x + y + 1 = 0, y - x + 5 = 0$

Type-02

Ex-01 একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে 4 একক দূরে অবস্থিত। x ও y অক্ষের ছেদক অংশের দৈর্ঘ্য দুটি নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, সরলরেখার সমীকরণ $y = mx + c$

$\Rightarrow y = \sqrt{3}x + c$ [$m = \tan60^\circ = \sqrt{3}$]

∴ $\sqrt{3}x - y + c = 0$ ....(i)

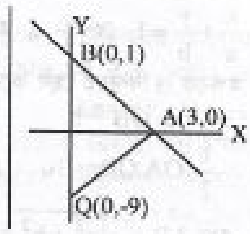
(0, 0) হতে, (i) নং এর উপর লম্ব দূরত্ব, $\left|\frac{0 - 0 + c}{\sqrt{3+1}}\right| = \frac{c}{2}$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{c}{2}\right| = 4$ ∴ $c = \pm 8$ ∴ $\sqrt{3}x - y \pm 8 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{\pm8}{\sqrt{3}}} - \frac{y}{\pm8} = 1$

∴ x ও y এর ছেদক অংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $\frac{8}{\sqrt{3}}$, 8 **Ans.**

Ex-02 $x + by = b$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি OA= 3.OB, O মূলবিন্দু এবং Q বিন্দুটি (0, –9) হয় তবে AQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: প্রদত্ত $x + by = b$



$\Rightarrow \frac{x}{b} + \frac{y}{1} = 1$ রেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে ও y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ OA = b; OB = 1

যেহেতু OA = 3OB

∴ b = 3

∴ AB রেখার সমীকরণ $x + 3y = 3$

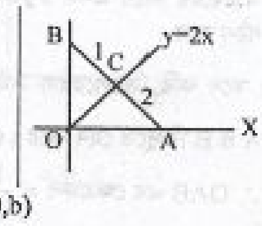
যেহেতু AQ রেখা x অক্ষ হতে OA = 3 একক এবং y অক্ষ হতে OQ = – 9 একক খণ্ডিত অংশ ছেদ করে।

অতএব, AQ রেখার সমীকরণ $\frac{x}{3} + \frac{y}{-9} = 1$

∴ $3x - y = 9$ **Ans.**

Ex-03 x ও y অক্ষ দ্বারা একটি রেখার খণ্ডিত অংশকে y = 2x রেখা 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে এবং রেখাটির x অক্ষের উপর ছেদক অংশ 8। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, সরলরেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x}{8} + \frac{y}{b} = 1$ [∵ a = 8]



রেখাটি x অক্ষ এবং y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(8,0) ও B(0,b)

মনে করি, প্রদত্ত $y = 2x$ রেখাটি AB রেখাকে C বিন্দুতে 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করে। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{8}{3}, \frac{2b}{3}\right)$

C বিন্দুটি $y = 2x$ রেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore \frac{2b}{3} = 2.\frac{8}{3} \therefore b = 8$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখা সমীকরণ : $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} = 1 \;\therefore x + y = 8$ **Ans.**

Ex-04 $x = 2$ এবং $y = 3$ রেখাদ্বয় দ্বারা একটি রেখার খণ্ডিত অংশকে $(4, 4)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, সরলরেখাটি প্রদত্ত $y=3$, $x=2$ সরলরেখাদ্বয়কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে এবং P(4,4) বিন্দু AB রেখাংশকে সমদ্বি-খণ্ডিত করে।



$\therefore$ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a,3) এবং (2,b) ধরা যায় কারণ A বিন্দুর কোটি 3 এবং B বিন্দুর ভুজ 2।

P(4,4), AB রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore 4 = \frac{a+2}{2}$ এবং $4 = \frac{b+3}{2}$ $\therefore a = 6$ এবং $b = 5$

অর্থাৎ A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (6,3) ও (2,5)

$\therefore$ AB রেখার নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x-6}{6-2} = \frac{y-3}{3-5}$

$\therefore x + 2y - 12 = 0$ **Ans.**

Ex-05 কোন সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ঐ ত্রিভুজের অতিভুজ 13 একক এবং ক্ষেত্রফল 30 বর্গ একক হলে, রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটি x অক্ষকে A ও y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে।



$OA = a; OB = b$

$\therefore \frac{1}{2}.OA.OB = 30 \therefore ab = 60$

এবং $AB = \sqrt{a^2 + b^2} = 13$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 169 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2+2ab+b^2 = 169 + 120 = 289$

$\therefore a + b = \pm 17$............(i)

এবং $a - b = \pm 7$..............(ii)

(i) ও (ii) হতে সমাধান করে পাই,

$(a, b) = (12,5), (5,12), (-5, -12), (-12,-5)$

উক্ত চারটি সমাধান হতে নিম্নের চারটি সরলরেখার সমীকরণ পাই,

$\frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 1; \frac{x}{5} + \frac{y}{12} = 1; \frac{x}{5} + \frac{y}{12} = -1; \frac{x}{12} + \frac{y}{5} = -1$ **Ans.**

Ex-06 একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1,4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গএকক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

Sol^n: মনে করি, সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, রেখাটি x ও y অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। $OA = a$ ও $OB = b$

$\therefore$ OAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} ab$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} ab = 8$

$\therefore ab = 16$। এখানে রেখাটি, (1,4) বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow \frac{b}{16} + \frac{4}{b} = 1 \left[\because a = \frac{16}{b}\right] \Rightarrow b^2 - 16b + 64 =$

$\Rightarrow (b-8)^2 = 0 \therefore b = 8$ এবং $a = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$

For practice:

01. কোন সরলরেখা (3, 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চি সমমানের অংশ ছেদ করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x - y$

02. x ও y অক্ষ হতে কোন সরলরেখা দ্বারা খণ্ডিত অংশের যোগফল ও বি যথাক্রমে 9 ও 5 হলে, রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $2x + y = 10$ এবং $3x + 2$

03. একটি সরলরেখা (6,−1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তার অক্ষ দুটির খ গুনফল 1; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x+4y=2; x+9y+3=$

04. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষের সহিত 120° কো করে এবং (5, −6) বিন্দু দিয়ে যায়। **Ans.** $\sqrt{3}x + y + 6 + 5\sqrt{}$

05. একটি সরলরেখা (−2, −5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অ A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যখন $OA+2OB=0$ এবং O মূলবি সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x - 2$

06. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (6, 2) বিন্দুতে 2 : 3 অন্তর্বিভক্ত হয়। সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x + 2$

07. $5x - y - 4 = 0$ এবং $3x + 4y - 4 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যব সরলরেখার ছেদাংশটি (1,5) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। সরল সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $83x - 35y +$

08. এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয়ের সাথে 16 ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ তৈরী করে এবং মূলবিন্দু হতে x অক্ষের স কোণ তৈরী করে। **Ans.** $x + y =$

Type-03: $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = \pm r$ সমীকরণের ব্যবহার

Ex-01 $\frac{5}{12}$ ঢাল বিশিষ্ট কোন সরলরেখা $Q\left(-7, \frac{2}{3}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায় উপর P বিন্দুটি অবস্থিত যেন $PQ = \frac{13}{3}$ হয়। P বিন্দুর স্থানাংক নি

Sol^n: PQ রেখার ঢাল $\tan\theta = \frac{5}{12}$

$\therefore \cos\theta = \frac{12}{13} \;\therefore \sin\theta = \frac{5}{13}$

$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = \pm r$ সূত্র হতে পাই,

$x = x_1 \pm r\cos\theta ; y = y_1 \pm r\sin\theta$

$\therefore x = -7 \pm \left(\frac{13}{3} \times \frac{12}{13}\right)$

এবং $y = \frac{2}{3} \pm \left(\frac{13}{3} \times \frac{5}{13}\right)$

$\therefore x = -3, -11$ এবং $y = \frac{7}{3}, -1$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাংক $\left(-3, \frac{7}{3}\right)$ বা, $(-11, -1)$

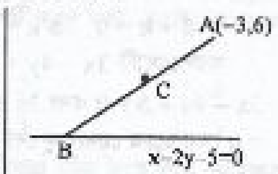
For practice:

(–5,10) বিন্দুগামী যে সরলরেখার ঢাল $-\frac{3}{4}$ তার উপর এমন দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যারা প্রত্যেকে (–5,10) বিন্দু হতে 10 একক দূরে অবস্থিত। **Ans.** (3,4) ও (–13,16)

Type-04

Ex-01 দেখাও যে, $x-2y+5=0$, রেখাটি (–3,6) বিন্দু হতে $x-2y-5=0$ রেখার উপর অংকিত সকল সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

Solⁿ: মনে করি, A(–3,6) প্রদত্ত বিন্দু এবং $x-2y+5=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত B যেকোন একটি বিন্দু। মনেকরি, C ABরেখাংশের মধ্যবিন্দু। যেহেতু B বিন্দু $x-2y-5=0$ রেখার উপর অবস্থিত।



সুতরাং B বিন্দুর কোটি y_1 হলে ভুজ হবে $2y_1+5$.

∴ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2y_1+5, y_1)$

AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{2y_1+5-3}{2}, \frac{y_1+6}{2}\right)=\left(y_1+1, \frac{y_1+6}{2}\right)$$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x-2y+5=0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

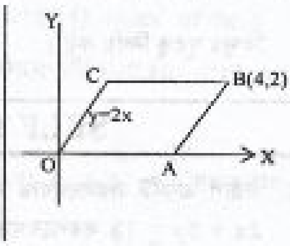
বামপক্ষ $-y_1+1-2\left(\frac{y_1+6}{2}\right)+5=0=$ ডানপক্ষ

∴ B বিন্দুর $x-2y-5=0$ সরলরেখার উপর যে কোন অবস্থানের জন্য AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু C প্রদত্ত $x-2y+5=0$ সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে।

(Showed)

Ex-02 OABC একটি সামান্তরিক। AO, x অক্ষ বরাবর অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y=2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4,2)। A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: OA ∥ BC এবং B (4,2) হওয়ায় C বিন্দুর কোটি হবে = 2 ;



OC রেখার সমীকরণ হতে $2x=2$

∴ $x=1$. ∴ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (1,2)

আবার, $BC=\sqrt{(4-1)^2+(2-2)^2}=3$

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (3,0)

AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{y-2}{2-0}=\frac{x-1}{1-3}$

∴ $x+y-3=0$ **Ans.**

Ex-03 দেখাও যে, $x=a$, $y=b$, $y=mx$ রেখাত্রয় যে ত্রিভুজ সৃষ্টি করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b-ma)^2$ বর্গ একক।

Solⁿ: $x=a$...............(i) $y=b$...............(ii)

$y=mx$.............(iii)

(i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু (a, b)

(i) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু (a, ma)

(ii) ও (iii) নং রেখার ছেদবিন্দু $(\frac{b}{m}, b)$.

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & ma & 1 \\ \frac{b}{m} & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[a(b-b)-ma\left(\frac{b}{m}-a\right)+1\left(\frac{b^2}{m}-ab\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2m}\left[b^2-2abm+a^2m^2\right]=\frac{1}{2m}(b-ma)^2 \text{ বর্গ একক}$$

(Showed)

Ex-04 x অক্ষের উপর P, Q বিন্দু দুটি এবং y অক্ষের উপর R, S বিন্দু দুটি অবস্থিত। PR ও QS রেখা দুটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x+3y+6=0$ এবং $x+2y-1=0$ দেখাও যে, PQ = RS।

Solⁿ: যেহেতু P,Q বিন্দুদ্বয় x অক্ষের উপর অবস্থিত সেহেতু এদের কোটির মান শূন্য হবে। $4x+3y+6=0$ সমীকরণে y=0 বসিয়ে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই $(\frac{-3}{2}, 0)$ এবং $x+2y-1=0$ সমীকরণে y=0 বসিয়ে Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1,0)। (R, S) বিন্দুদ্বয় y অক্ষের উপর অবস্থিত। অতএব এদের ভুজ শূন্য হবে।

∴ $4x+3y+6=0$ সমীকরণে x = 0 বসিয়ে R(0, –2) ও $x+2y-1=0$ সমীকরণে x = 0 বসিয়ে $S(0, \frac{1}{2})$ পাই।

$$\therefore PQ=\sqrt{\left(1+\frac{3}{2}\right)^2+(0-0)^2}=\frac{5}{2}$$

$$RS=\sqrt{(0-0)^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

∴ PQ = RS **(Showed)**

For practice:

01. $2x+3y=7$ এবং $3ax-5by+15=0$ রেখাদ্বয় একই রেখা নির্দেশ করলে a ও b ধ্রুবকের মান নির্ণয় কর। **Ans.** $a=-\frac{10}{7}$; $b=\frac{9}{7}$

02. দেখাও যে, $y=mx$, $y=m_1x$, $y=b$, রেখাত্রয় যে ত্রিভুজ সৃষ্টি করে এর ক্ষেত্রফল $\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m_1}\right)$ বর্গ একক।

03. A(1,1), B(3,4) এবং C(5,–2), ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC এর সমান্তরাল। **Ans.** $6x+2y-17=0$

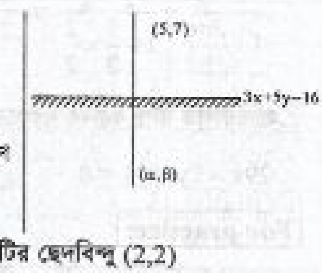
04. মূলবিন্দু এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী $x+3y-12=0$ রেখার খণ্ডিত অংশটির ত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x=6y$; $2x=3y$

05. $x=3$; $x=5$; $y=4$; $y=6$ রেখাগুলো দ্বারা উৎপন্ন বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x-y+1=0$; $x+y=9$

Type-05: প্রতিবিম্ব সম্পর্কিত সমস্যাবলী

Ex-01 $3x+5y-16=0$ সরলরেখার সাপেক্ষে (5, 7) বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Solⁿ: $3x+5y-16=0$ এর ঢাল $=\frac{-3}{5}$.



এর উপর লম্বরেখার ঢাল $=\frac{5}{3}$.

(5,7) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y-7=\frac{5}{3}(x-5)$

∴ $5x-3y-4=0$. ∴ উক্ত রেখা দুটির ছেদবিন্দু (2,2)

ধরি, নির্ণেয় প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক (α, β).

∴ $\frac{\alpha+5}{2}=2$ এবং $\frac{\beta+7}{2}=2$ ∴ $\alpha=-1$ এবং $\beta=-3$

∴ নির্ণেয় প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক = (–1,–3) **Ans.**

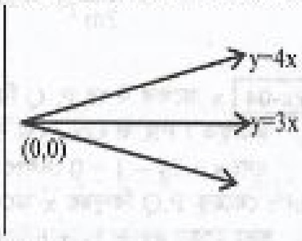
Ex-03 $y = 3x$ সরলরেখার সাপেক্ষে $y = 4x$ রেখার প্রতিবিম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: $y = 4x$ ও $y = 3x$

সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (0,0).

(0,0) বিন্দুগামী যেকোন সরলরেখার সমীকরণ

$y = mx$.....................(i)



$y = 4x$ রেখার ঢাল $m = \tan\theta_1 = 4$

$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}4$

$y = 3x$ রেখার ঢাল $= \tan\theta_2 = 3 \therefore \theta_2 = \tan^{-1}3$

$y = mx$ রেখার ঢাল $= \tan\theta_3 = m \therefore \theta_3 = \tan^{-1}m$

এখন, $\theta_1 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_3$

$\Rightarrow \tan^{-1}4 - \tan^{-1}3 = \tan^{-1}3 - \tan^{-1}m$

$\Rightarrow \tan^{-1}m = 2\tan^{-1}3 - \tan^{-1}4 = \tan^{-1}\frac{19}{8} \therefore m = \frac{19}{8}$

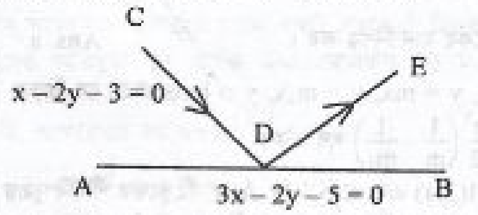
(i) নং এ $m = \frac{19}{8}$ বসিয়ে পাই, $y = \frac{19}{8}x \therefore 19x = 8y$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিবিম্বের সমীকরণ, $19x = 8y$ **Ans.**

Ex-04 একটি আলোর রশ্মি $x - 2y - 3 = 0$ সরলরেখা বরাবর পাঠান হয়। $3x - 2y - 5 = 0$ সরলরেখাতে আসার পর তা থেকে প্রতিফলিত হয়। প্রতিফলিত রশ্মি বরাবর সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: CD সরলরেখার সমীকরণ $x - 2y - 3 = 0$........(i)

AB সরলরেখার সমীকরণ $3x - 2y - 5 = 0$..........(ii)



(i) নং সরলরেখা ও (ii) নং সরলরেখা D বিন্দুতে আপতিত হয়ে DE বরাবর প্রতিফলিত হয়। $\therefore \angle ADC = \angle BDE$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাংক (1, −1) যা $x-2y-3=0$ এবং $3x-2y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

ধরি, DE রেখার সমীকরণ $y + 1 = m(x - 1)$ ——— (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সরলরেখার ঢাল $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, m$

এখন $\angle ADC = \angle BDE$

$\therefore \frac{m - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3m}{2}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2m - 3}{2 + 3m} = \frac{4}{7} \therefore m = \frac{29}{2}$

$\therefore$ প্রতিফলিত রশ্মি বরাবর সরলরেখার সমীকরণ, $y + 1 = \frac{29}{2}(x - 1)$

$\therefore 29x - 2y - 31 = 0$ **Ans.**

For practice:

01. A(−2, 3), B(5, 10) বিন্দুগামী সরলরেখার সাপেক্ষে C(−1, 6) বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans.** (1, 4)

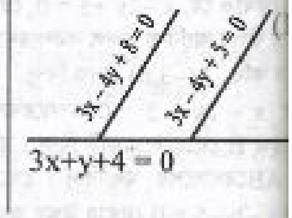
02. $x - 2y + 2 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x + y - 1 = 0$ সরলরেখার প্রতিচ্ছবি সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $7x + y - 1 = 0$

Type-06

01. $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x + y + 4 = 0$ রে... (1, 2) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

Solⁿ: $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখা $3x - 4y +$ ... যেখানে k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

যদি এটি (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায়, তবে



$3 - 8 + k = 0 \Rightarrow k = 5$

$\therefore$ সরলরেখাটি $3x - 4y + 5 = 0$

$3x - 4y + 5 = 0$ এবং $3x + y + 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু বের করি।

বজ্রগুণন করে, $\frac{x}{-16-5} = \frac{y}{15-12} = \frac{1}{3+12}$

$\Rightarrow \frac{x}{-21} = \frac{y}{3} = \frac{1}{15}$

$\therefore x = -\frac{7}{5}, y = \frac{1}{5}$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $= \left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{\left(1 + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$

For practice:

01. $4x - 5y + 0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $2x + 3y - 4 = 0$ রেখা থেকে ... বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। **Ans.**

SELF TEST [Written]

01. এরূপ একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যাতে এই সরল... $2x + 5y = 18$ সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণকে x অক্ষ সমদ্বিখণ্ডিত ... **Ans.** $2x - 5$...

02. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি (b,0) এবং $(x_2, y$... দুটির সংযোজক রেখার উপর লম্ব হয় তবে দেখাও যে, $x_1x_2 + y_1y_2$...

03. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3,2) বিন্দু দিয়ে ... করে এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ ক... OA−OB = 2 হয় যখন O মূলবিন্দু। **Ans.** $2x + 3y = 12; x$...

04. একটি সরলরেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ ক... P(2, 4) বিন্দু দিয়ে এমনভাবে যায় যেন AP : PB = 3 : ... সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $8x + 3y$...

05. P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−5,−3) এবং Q বিন্দুটি $x - 3y = 1$ সরলরেখা... অবস্থিত। PQ রেখাটি x অক্ষের সাথে যে সূক্ষকোণ সৃষ্টি করে তার ... $\frac{5}{12}$ হলে PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **A**...

06. $2x + 3y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল বরাবর (1, −1) হতে $x + y$... রেখার দূরত্ব নির্ণয় কর। **Ans.**

SELF TEST [MCQ]

[illegible] (b, a), ও $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে নিচের কোন [illegible]টি সঠিক?
A. [illegible]+b=1 B. a + b = 2 C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ D. a + b = 0

[illegible]) বিন্দু 6x–y=1 রেখার উপর এবং B(k,h) বিন্দুটি 2x–5y=5 [illegible] উপর অবস্থিত হলে AB রেখাটির সমীকরণ–
A. [illegible]–6 = 0 B. 2x+2y–6 = 0 C. x+y–3 = 0 D. None of these

[illegible]y=21 এবং 2ax –3by + 6 = 0 সমীকরণ দুটি একই সরলরেখা [illegible] করলে a ও b এর মান–
A. $\frac{3}{7}, \frac{-3}{2}$ B. $\frac{3}{7}, \frac{-2}{3}$ C. $\frac{3}{7}, \frac{2}{3}$ D. $\frac{-3}{7}, \frac{2}{3}$

[illegible] y = $\frac{b}{2}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ রেখাত্রয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল
A. $\frac{1}{4}$ab B. 4ab C. $\frac{1}{8}$ab D. None of these

[illegible]রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x – y + 1 = 0 এবং 3x + y – 5 = 0 [illegible] ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং প্রথম রেখার সাথে লম্ব–
A. [illegible]y+3 = 0 B. x+y–3 = 0 C. x–3y–5 = 0 D. None of these

[illegible] x + y + 1 = 0 সমীকরণটিকে xcos α + ysin α = p আকারে [illegible] করা হয় তবে α এর মান হবে–
A. [illegible] B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{4}$

[illegible] ক্ষেত্রগুলির কোনটিতে ax + by + c = 0 সরলরেখাটি x [illegible] সমান্তরাল রেখা সূচিত করবে?
A. a = 0, b ≠ 0, c ≠ 0 B. a = 0, b ≠ 0, c = 0
C. a ≠ 0, b = 0, c ≠ 0 D. a ≠ 0, b=0, c=0

[illegible]বিন্দু হতে কোন সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক এবং ইহা [illegible] সাথে 150° কোণ উৎপন্ন করলে সরলরেখাটির সমীকরণ–
A. y = $\sqrt{3}$ x+5 B. y = $\sqrt{3}$ x+6 C. y = x+6 D. None of these

[illegible] এর মান কত হলে $\frac{5}{12}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখাটি (–7,10) ও (5, k) [illegible]বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে?
A. –10 B. 15 C.–15 D. –20

[illegible]কোণ হলে xcos α + ysin α = 4 এবং 4x + 3y = 5 সমান্তরাল [illegible]দ্বয়ের দূরত্ব–
A. 3 B.4 C.5 D. 6

[illegible]y–12 = 0 এই সরলরেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য–
A. 50 B. 5 C.6 D. 8

[illegible] সরলরেখা x অক্ষের ঋণাত্মক অংশে 150°কোণ উৎপন্ন করলে ঐ [illegible]রেখার ঢাল কত?
A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. 0 D. 1

[illegible] y + 6 = 0 রেখার সাপেক্ষে (4, –13) বিন্দুর প্রতিবিম্ব–
A. (1,14) B. (3, 4) C.(–1,–14) D.(–1,–13)

[illegible] 3a+2b+4c = 0 হয় তবে, ax+by+c = 0 রেখাটি কোন বিন্দুগামী হবে-
A. (3, 2) B. (2, 4) C. (3, 4) D. $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

[illegible] সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ x + 3y = 4 ও 6x – 2y = –7 [illegible] সামান্তরিকটি হবে–
A. আয়তক্ষেত্র B. বর্গক্ষেত্র C. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ D. রম্বস

[illegible] –3) বিন্দুগামী এবং 2x – 3y = 7 রেখার ওপর লম্বরেখার সমীকরণ–
A. 3x–2y = 0 B. 2x–3y = 0 C. 3x+2y = 0 D. 2x+3y = 0

[illegible] বিন্দু x – 3y = 2 রেখায় অবস্থিত। এটি (2, 3), (6, –5) বিন্দু দুইটি [illegible] সমদূরবর্তী। P এর স্থানাঙ্ক–
A. (4, 14) B. (14, 4) C. (7, 2) D. (2, 7)

18. (b, a) হতে $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ রেখার লম্ব দূরত্ব–
A. $\left|\frac{a^2-ab+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ B. $\left|\frac{b^2-ab-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ C. $\left|\frac{a^2+ab-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ D. None

19. A = (3, 3), B = (7, 6) হলে AB রেখার অক্ষদ্বয়ের খণ্ডাংশ কত?
A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ D. None of these

20. যদি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ রেখাটি (2, –3) ও (4, –5) বিন্দুগামী হয়,তবে (a, b) = ?
A. (1, 1) B. (–1, 1) C. (1, –1) D. (–1, –1)

21. x অক্ষের সাথে 60° কোণে আনত এবং y অক্ষকে (0, –2) বিন্দুতে ছেদকারী রেখার সমীকরণ–
A. $\sqrt{3}$y =x–2$\sqrt{3}$ B. y=$\sqrt{3}$ x–2 C. y=$\sqrt{3}$ x+2 D. $\sqrt{3}$ y=x–2$\sqrt{3}$

22. 2x – 3y + 5 = 0 ও 3x + 4y = 0 এর ছেদবিন্দু হতে 5x – 2y = 0 রেখার লম্ব দূরত্ব কত?
A. $\frac{130}{17\sqrt{29}}$ B. $\frac{13}{7\sqrt{29}}$ C. $\frac{130}{17}$ D. None of these

23. যদি A = (1, 1) ও B = (5, 7) হয়, তবে AB এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ–
A. 2x+3y = 18 B. 2x–3y+18 = 0 C. 2x+3y–1 = 0 D. 3x–2y+1 = 0

24. 3 ঢালবিশিষ্ট এবং x অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে 3 অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ–
A. y = 3x – 9 B. y = 3x + 3 C. y = 3x + 9 D. None

25. (2, 1) বিন্দুগামী রেখার x ছেদক অংশকে y ছেদক অংশ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। রেখাটির সমীকরণ হবে?
A. x + 2y = 4 B. 2x + y = 4 C. 2x – y = 4 D. x – 2y = 4

26. x = 4, x = 8, y = 6 ও y = 10 রেখাত্রয় দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল–
A. 24 B. 80 C. 40 D. 16

27. কোন ত্রিভুজের শীর্ষগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 1), (2, 2) ও (3, 1) হলে তার লম্বকেন্দ্র–
A. (–2, 3) B. (3, –2) C. (2, 2) D. (2, –3)

28. x + y = 0 ও x – y = 0 রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান–
A. 90° B. 45° C. 30° D. 0°

29. (2, –1) হতে 3x–4y+5 = 0 রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর দূরত্ব–
A. 3 B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

30. xcosα + ysinα = p কোন সরলরেখার সমীকরণ হলে, উহার ঢাল m = ?
A. tan α B. – tan α C. cot α D. – cot α

31. একটি সরলরেখার জন্য কয়টি জ্যামিতিক পরামিতি জানা দরকার?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

32. চারটার সময় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটার সমীকরণ–
A. x–$\sqrt{3}$y = 0 B. $\sqrt{3}$x –y = 0 C. x+$\sqrt{3}$y = 0 D. x+$\frac{1}{\sqrt{3}}$y = 0

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	31. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	32. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Correct Answer

32.C	31.A	30.D	29.A	28.A	27.C	26.D	25.A
24.A	23.A	22.A	21.B	20.D	19.A	18.B	17.B
16.C	15.D	14.D	13.C	12.B	11.B	10.A	09.B
08.B	07.A	06.D	05.B	04.C	03.D	02.A	01.D

সরলরেখার সমীকরণ: [৩য় অংশ (3.6)]

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

➲ দুইটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan\varphi = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

➲ $m_1 = m_2$ হলে বা $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল।

➲ $m_1m_2 = -1$ হলে রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

➲ তিনটি সরলরেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ সমবিন্দু হওয়ার শর্ত $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

➲ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং $ax + by + c = 0$ সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$

➲ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং $ax + by + c = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01

Ex-01 (3, –1) বিন্দু হতে অংকিত সরলরেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর যা x অক্ষের সাথে 45° কোণ তৈরি করে এবং $x + 2y = 9$ রেখাটিকে ছেদ করে।

Solⁿ: (3,–1) বিন্দুগামী এবং x অক্ষের সাথে 45° কোণ তৈরি করে এমন সরলরেখার সমীকরণ-

$y + 1 = 1(x - 3)$ [∵ $m = \tan 45° = 1$]

∴ $x - y = 4$ ....(i)

(i) নং ও $x + 2y = 9$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করে পাই,

$x = \frac{17}{3}, y = \frac{5}{3}$ ∴ ছেদবিন্দু $(\frac{17}{3}, \frac{5}{3})$

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(\frac{17}{3} - 3)^2 + (\frac{5}{3} + 1)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ **Ans.**

For practice:

01. একটি সরলরেখা (8,–2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। মূলবিন্দু হতে এর উপর লম্ব আঁকা হল। যদি লম্বটি x অক্ষের সাথে 45° কোণ তৈরি করে তাহলে লম্বটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **Ans.** $3\sqrt{2}$

Type-02

Ex-01 x অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b$ ....(i)

$x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাংক পাই (1, 1).

যেহেতু উক্ত $y = b$ সরলরেখাটি (1, 1) ছেদবিন্দুগামী অতএব $b = 1$

$b = 1$, (i) নং এ বসিয়ে পাই $y - 1 = 0$ **Ans.**

Ex-02 এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষ দুটি হতে সমান সাংখ্যিক মানের অংশ ছেদ করে এবং $2x + 3y - 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুটির সাথে সমবিন্দু।

Solⁿ: $2x + 3y = 1$ .... (i)

$x - 2y + 3 = 0$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু (–1, 1)

নির্ণেয় রেখাটি অক্ষদ্বয় হতে সমান সাংখ্যিক মানের অংশ কর্তন কর[...]

রেখাটির সমীকরণ $x \pm y = a$ .... (iii)

(iii) নং রেখাটি (–1, 1) বিন্দুগামী ∴ $1 \pm 1 = a$ ∴ $a = 0, -2$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $x + y = 0$ এবং $x - y + 2 = 0$.

Ex-03 যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ এবং $3x - 4y +$ [...] রেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখাটির স[...] হয়, তবে a ও b এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $2x - y = 1$ .... (i)

$3x - 4y + 6 = 0$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু (2, 3)

যেহেতু $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটি (2, 3) বিন্দুগামী

অতএব $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$...... (iii)

আবার, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখাটির ঢাল $= -\frac{b}{a}$ এবং $4x + 3y - 6 =$ [...]

ঢাল $= \frac{-4}{3}$ । ∵ উক্ত রেখাদ্বয় সমান্তরাল ∴ $-\frac{b}{a} = \frac{-4}{3}$ ∴ $a = \frac{3}{4}$[...]

(iii) নং এ $a = \frac{3b}{4}$ বসিয়ে পাই, $\frac{2.4}{3b} + \frac{3}{b} = 1$

∴ $b = \frac{17}{3}$ এবং $a = \frac{17}{4}$

Ex-04 একটি রেখার x এর ছেদক এবং y ছেদক অংশদ্বয়ের উ[...] যোগফল একটি ধ্রুবক c। দেখাও যে, রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বি[...] বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .... (i)

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = c$ ∴ $\frac{1}{a} = c - \frac{1}{b}$

$\frac{1}{a}$ এর মান উক্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই, $(c - \frac{1}{b})x + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow cx - 1 + \frac{1}{b}(y - x) = 0 \Rightarrow (x - y) + b(1 - cx) = 0$

উক্ত সমীকরণ $x - y = 0$ এবং $1 - cx = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ [...] সকল সরলরেখার সমীকরণ প্রকাশ করে। [∵ b ধ্রুবক]

যেহেতু দুইটি সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব (i) নং সমীকরণ বিশিষ্ট সরলরেখাটি সর্বদা একটি নির্দিষ্ট [...] হবে যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = c$ হয়।

$x - y = 0$ এবং $1 - cx = 0$ সমীকরণদ্বয়কে সমাধান করে পাই,

$x = y = \frac{1}{c}$ ∴ নির্দিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right)$

For practice:

01. y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ [...] ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরন নির্ণয় কর। **Ans.** 13x–[...]

02. দুটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ[...] সংখ্যামানে সমান অংশে ছেদ করে। **Ans.** $x + y - 9 = 0$, $x - y$[...]

AB সরলরেখা y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে এবং B বিন্দুতে AB এর উপর লম্ব x অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে। যদি AB সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ হয় তবে C বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। **Ans.** $\left(\frac{16}{3}, 0\right)$

দেখাও যে, k এর যে কোন মানের জন্য একগুচ্ছ সরলরেখা $(3-2k)x + 5ky-3 = 0$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর।

Ans. $\left(1,-\frac{2}{5}\right)$

Type-03: সমবিন্দু সম্পর্কিত-

Ex-01 $2x - by +4 = 0$, $4x - y + 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রদত্ত রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে $\begin{vmatrix}2 & -b & 4\\4 & -1 & 2b\\3 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(1-2b) + b(-6b-4) + 4(4+3) = 0$

$\Rightarrow 3b^2 + 4b - 15 = 0 \Rightarrow (b+3)(3b-5) = 0 \quad \therefore b = -3, \frac{5}{3}$ **Ans.**

For practice:

$x-3y+2=0$, $x-6y+3=0$ এবং $x+ay=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে a এর মান নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে ছেদ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Ans. $a = 3, \left(-1, \frac{1}{3}\right)$

যদি l, m, n একটি সমান্তর ধারার ক্রমিক তিনটি পদ হয় তবে দেখাও যে, $x+ly+1=0$, $2x+my+1=0$, $3x+ny+1=0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে।

Type-04

Ex-01 দেখাও যে, (a, b) এবং (c, d) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $(a-c)x + (b-d)y = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$

Sol^n: মনে করি, P(a, b), Q(c, d) প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় এবং R উহাদের মধ্যবিন্দু।

$\therefore R\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

PQ সরলরেখার সমীকরণ $\frac{y-b}{b-d} = \frac{x-a}{a-c}$

বা, $(b-d)x - (a-c)y + ad - bc = 0$

তাহলে PQ এর লম্ব যে কোন সরলরেখার সমীকরণ–

$(a-c)x + (b-d)y + k = 0$ [k একটি ধ্রুবক]

নির্ণেয় রেখাটি PQ এর মধ্যবিন্দু R দিয়ে যাবে

সুতরাং, $(a-c)\left(\frac{a+c}{2}\right) + (b-d)\left(\frac{b+d}{2}\right) + k = 0$

$\therefore k = -\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ-

$(a-c)x + (b-d)y = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)$ **(Showed)**

For practice:

AB ও AC রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x+1$ এবং $y = 4x-1$, BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x + 2y = 7$

(8, 5), (–4, –3) বিন্দু দুটির সংযোজক রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং x অক্ষের সাথে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

Ans. $3x + 2y = 8; \left(\frac{8}{3}, 0\right)$

Ex-02 দেখাও যে, মূলবিন্দু হতে $(b\cos\theta, b\sin\theta)$ এবং $(b\cos\varphi, b\sin\varphi)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর অংকিত লম্ব রেখাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

Sol^n: মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু দুটি A ও B এবং মূলবিন্দু O(0, 0).

ধরি, AB এর মধ্যবিন্দু P হলে এটা প্রমাণ করাই যথেষ্ট যে, $OP \perp AB$

এখন P বিন্দুর স্থানাংক, $\left\{\frac{b}{2}(\cos\theta + \cos\varphi), \frac{b}{2}(\sin\theta + \sin\varphi)\right\}$

AB ও OP এর ঢালদ্বয় যথাক্রমে m_1 ও m_2 হলে,

$$m_1 = \frac{b\sin\theta - b\sin\varphi}{b\cos\theta - b\cos\varphi} = \frac{\sin\theta - \sin\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi}$$

$$m_2 = \frac{\frac{b}{2}(\sin\theta + \sin\varphi) - 0}{\frac{b}{2}(\cos\theta + \cos\varphi) - 0} = \frac{\sin\theta + \sin\varphi}{\cos\theta + \cos\varphi}$$

সুতরাং ঢালদ্বয়ের গুণফল $= m_1 \times m_2$

$$= \frac{\sin\theta - \sin\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi} \times \frac{\sin\theta + \sin\varphi}{\cos\theta + \cos\varphi} = \frac{\sin^2\theta - \sin^2\varphi}{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}$$

$$= \frac{-(\cos^2\theta - \cos^2\varphi)}{\cos^2\theta - \cos^2\varphi} = -1 \therefore OP \perp AB$$ **(Showed)**

For practice:

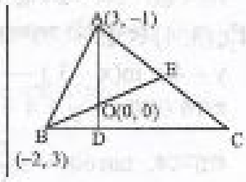
01. A(2, 1) এবং B(5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। **Ans.** $3x + y = 12$, (0, 12)

02. ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলো যথাক্রমে (1, 3), (3, 1), (1, –1) এবং (–1, 1)। দেখাও যে, চতুর্ভুজটি বর্গক্ষেত্র।

Type-05: লম্ববিন্দু সম্পর্কিত

Ex-01 A(3, –1), B(–2, 3) বিন্দু দুটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং লম্ব বিন্দুটি মূল বিন্দুতে। অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাংক নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, C ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষবিন্দু। AD, BE রেখাদ্বয় যথাক্রমে BC ও CA বাহুর উপর লম্ব।



প্রশ্নমতে, AD, BE লম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দু O(0, 0)

$\therefore$ AD রেখার সমীকরণ হবে $y = -\frac{1}{3}x$ বা, $x + 3y = 0$ যার ঢাল $= \frac{-1}{3}$

$\therefore$ BC রেখা ঢাল = 3

B (–2, 3) বিন্দুগামী BC রেখার সমীকরণ, $y-3 = 3(x+2)$

$\therefore 3x - y + 9 = 0$ ....(i)

আবার, BE রেখার সমীকরণ, $y = -\frac{3}{2}x$ বা $3x + 2y = 0$ যার ঢাল $= \frac{-3}{2}$

$\therefore$ AC রেখার ঢাল $= \frac{2}{3}$

A (3, –1) বিন্দুগামী AC রেখার সমীকরণ $y + 1 = \frac{2}{3}(x-3)$

$\therefore 2x - 3y - 9 = 0$ .... (ii)

(i) ও (ii) কে সমাধান করে পাই $x = -\frac{36}{7}, y = -\frac{45}{7}$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{36}{7}, \frac{-45}{7}\right)$ **Ans.**

Ex-02 (4, 3) বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা $2x + 3y = 6$ এর সাথে সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ তৈরি করে। সমকোণের শীর্ষ (4, 3)। সমান সমান বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: যেহেতু (4, 3) বিন্দুগামী রেখাদ্বয় $2x + 3y = 6$ রেখার সহিত একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। অতএব উহারা প্রত্যেকে $2x+3y = 6$ অতিভুজের সহিত $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(4, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $y - 3 = m(x - 4)$

এখন প্রদত্ত রেখার ঢাল $= -\frac{2}{3}$

$$\therefore \tan 45° = \pm\frac{m+\frac{2}{3}}{1-\frac{2m}{3}} \Rightarrow 1 = \pm\frac{3m+2}{3-2m} \therefore m = -5 \text{ ও } \frac{1}{5}.$$

∴ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ $y - 3 = \frac{1}{5}(x - 4)$ এবং $y - 3 = -5(x - 4)$

অর্থাৎ $x - 5y + 11 = 0$ এবং $5x + y - 23 = 0$ **Ans.**

For practice:

01. একটি ত্রিভুজের দুটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে A(6, 1) ও B(1, 6) এবং এর লম্ববিন্দু (3, 2)। অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাংক নির্ণয় কর। **Ans.** (–2, –3)

02. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর সমীকরণ $x + y + 1 = 0$ ও তার বিপরীত শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক (2, 3) হলে ত্রিভুজটির অপর দুই বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $y - 3 = 0, x - 2 = 0$

03. P(h, k) বিন্দু হতে x ও y অক্ষের উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দু যথাক্রমে A ও B, AB এর উপর P বিন্দুগামী লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $hx - ky = h^2 - k^2$

Type-06

Ex-01 দুটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: (3, 4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ যার ঢাল = m

$y - 4 = m(x - 3)$ —— (i)

প্রদত্ত রেখা $x - y + 4 = 0$ ∴ প্রদত্ত রেখার ঢাল = 1

প্রশ্নমতে, $\tan 60° = \pm\frac{m-1}{1+m}$

$\therefore \sqrt{3}(1+m) = \pm(m-1)$

(+) ধরে, $m - 1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}m$

$$\Rightarrow m = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$

$\therefore m = -(2+\sqrt{3})$

(–) ধরে, $m - 1 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}m$

$$\Rightarrow m = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$$

$\therefore m = -(2-\sqrt{3})$

∴ নির্ণেয় রেখাদ্বয়ের সমীকরণ,

$y - 4 = -(2+\sqrt{3})(x-3) \Rightarrow (2+\sqrt{3})x + y = 3\sqrt{3} + 10$ এবং

$y - 4 = -(2-\sqrt{3})(x-3) \Rightarrow (2-\sqrt{3})x + y = 10 - 3\sqrt{3}$ **Ans.**

Ex-02 কোন বর্গক্ষেত্রের একটি শীর্ষবিন্দু (–2, –3) হতে অংকিত $5x - 3y + 1 = 0$ রেখা দ্বারা সূচিত হলে উক্ত বিন্দু দিয়ে গমনকারী বাহু দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: (–2, –3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y+3 = m(x+2)$

যার ঢাল $= 5x-3y+1 = 0$ রেখার ঢাল $= \frac{5}{3}$

$$\therefore \tan 45° = \pm\frac{m-\frac{5}{3}}{1+\frac{5m}{3}} \therefore m = -4 \text{ ও } \frac{1}{4}$$

∴ নির্ণেয় বাহুদ্বয়ের সমীকরণ,

$y + 3 = -4(x + 2) \Rightarrow 4x + y + 11 = 0$

এবং $y+3 = \frac{1}{4}(x+2) \Rightarrow x - 4y = 10$

Ex-03 একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখাকে (–3, –2) বিন্দুতে ছেদ করে। প্রথম রেখাটি y অক্ষ হতে –6 এর সমান অংশ ছেদ করে এবং রেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তার ট্যানজেন্ট $\frac{3}{2}$। দ্বিতীয় সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রথম রেখাটি y অক্ষ হতে –6 খণ্ডিত অংশ ছেদ করে এবং (–3, –2) বিন্দুতে অপর রেখাকে ছেদ করে।

অতএব রেখাটি (0, –6) ও (–3, –2) বিন্দুগামী।

প্রথম রেখার সমীকরণ $\frac{y+6}{-6+2} = \frac{x-0}{0+3}$

$\Rightarrow 4x + 3y + 18 = 0$, যার ঢাল $= -\frac{4}{3}$

দ্বিতীয় রেখাটি (–3, –2) বিন্দুগামী অতএব এর সমীকরণ,

$y + 2 = m(x+3)$ —— (i)

∴ প্রথম ও দ্বিতীয় রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে $\tan\theta = \frac{3}{2}$.

$$\therefore \tan\theta = \frac{3}{2} = \pm\frac{m+\frac{4}{3}}{1+m(-\frac{4}{3})} = \pm\frac{3m+4}{3-4m}$$

$\therefore m = \frac{1}{18}$ ও $\frac{17}{6}$.

m এর উক্ত মানদ্বয় (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y+2 = \frac{1}{18}(x+3)$ ও $y+2 = \frac{17}{6}(x+3)$

$\therefore x - 18y - 33 = 0$ এবং $17x - 6y + 39 = 0$

For practice:

01. দুটি সরলরেখা (6, –7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং এরা $y + \sqrt{3}x = 1$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। এদের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $y + 7 = 0$, $y - 7 = \sqrt{3}$

02. একটি বর্গক্ষেত্রের কোন কর্ণের সমীকরণ $4x - 3y + 5 = 0$ এবং প্রান্তবিন্দুদ্বয় (1, 3) ও (–2, –1)। বর্গের চারটি বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $7x+y=10$, $x-7y+20=0$, $7x+y+15=0$, x–

03. y অক্ষ হতে '–5' এর সমান অংশ ছেদ করে এরূপ একটি সরলরেখা এটি অপর একটি সরলরেখা CD এর সহিত $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ এর সমান কোণে থাকে এবং উক্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (–3, –1)। CD রেখার সমীকরণ কর। **Ans.** $18x + y + 55 = 0$; $6x + 17y +$

SELF TEST (Written)

$- 3y = 1$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ তৈরি করে এরূপ রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x + y - 2 = 0, x - y = 0.$

এর সকল মানের জন্য $y(1+\lambda)-x(3+2\lambda)-11-9\lambda = 0$ রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans.** $(-2, 5)$

যদি $a + b + c = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $ax+by+c = 0$, $bx+ cy +a = 0$, $cx +ay +b = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে।

ABC ত্রিভুজের $A(6, -6)$ ও $B(-4, -1)$ এবং $C(3, 6)$ শীর্ষত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, ত্রিভুজটির লম্ববিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত। **Ans.** $x + y = 0, x = 4y, y = 2x.$

দুটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $3y = 2x$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $7x = 4y, x = 8y.$

SELF TEST (MCQ)

$y = x+1$, $y = 2x+2$ ও $y = ax+3$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে a এর মান কত?

A. 2 B. 3
C. 4 D. 5

$y-\sqrt{3}x+5=0$ ও $\sqrt{3}y-x+6=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ-

A. 30° B. 60°
C. 90° D. 45°

এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।

A. $x = -y$ B. $y = x$
C. $x + y = 0$ D. $x - 2y = 7$

x অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ রেখা দুটির সাথে সমবিন্দু রেখার সমীকরণ–

A. $y + 1 = 0$ B. $y + 3 = 0$
C. $y + 2 = 0$ D. $x - 2y = 0$

$3x-4y+8 = 0$ রেখার সমান্তরাল ও $(1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ-

A. $3x - 4y + 5 = 0$ B. $4x - 3y + 5 = 0$
C. $x - y + 5 = 0$ D. None

$(-1, 3)$ বিন্দু হতে $x - 2y = 3$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর কোটি কত?

A. 1 B. −2
C. −1 D. 12

k এর মান কত হলে $2x - y + 7 = 0$ এবং $3x + ky - 5 = 0$ রেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে?

A. 7 B. −6
C. 60 D. 6

একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু $4x + 5y = 0$ এবং $7x + 2y = 0$। যদি একটি কর্ণ $11x+7y-9 = 0$ হয় তবে অপর কর্ণটি–

A. $x + y = 0$ B. $7x - 11y = 0$
C. $x - y = 0$ D. None

09. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, $x\cos\beta + y\sin\beta = q$ এবং $y = -x\tan\theta$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু হবার শর্ত-

A. $p\sin(\theta - \beta) = q\sin(\theta - \alpha)$
B. $p\cos(\theta + \beta) = q\cos(\theta + \alpha)$
C. $p\sin(\theta - \beta) = q\sin(\theta + \alpha)$
D. $p\sin(\theta + \beta) = q\sin(\theta - \alpha)$

10. $(2 - \sqrt{3})x - y + 5 = 0$ এবং $(2 + \sqrt{3})(x - 3) - y = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ-

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

11. ABC ত্রিভুজের A বিন্দুর স্থানাংক (1, 2) এবং B ও C হতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $x+y = 5$ ও $x = 4$। B ও C বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক-

A. (7, −2), (4, 3) B. (−2, 7), (3, 4)
C. (7, −2), (3,4) D. None

12. $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$, $ax + by + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক কোনটি?

A. $6a - 4b = 2$ B. $12a - 4b = 1$
C. $6a - 4b = 1$ D. $7a - 4b = 1$

13. $x + y = 0$, $x - y = 0$, $x = 7$, সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটি হবে–

A. 30°, 60°, 90° B. 60°, 60°, 60°
C. 45°, 45°, 45° D. None

14. মূলবিন্দু হতে $12x + 5y = 7$ রেখার লম্ব দূরত্ব কত?

A. $\frac{7}{13}$ B. $\frac{12}{13}$
C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{1}{13}$

15. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাটি x অক্ষকে P বিন্দুতে ছেদ করে, যে সরলরেখাটি প্রদত্ত রেখার সাথে লম্ব এবং P বিন্দুগামী তার সমীকরণ-

A. $x+y = ab$ B. $x+y = a+b$
C. $ax+by = a^2$ D. $ay+bx = b^2$

16. কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর সমীকরণ $x-3y = 0$, $4x + 3y = 5$, $3x+y = 0$, হলে $3x-4y = 0$ রেখাটি কোন বিন্দু দিয়ে যায়?

A. অন্তঃকেন্দ্র B. ভরকেন্দ্র
C. পরিকেন্দ্র D. লম্বকেন্দ্র

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Correct Answer

16.D	15.C	14.A	13.D	12.C	11.A	10.C	09.B
08.C	07.D	06.C	05.A	04.C	03.B	02.A	01.B

সরলরেখার সমীকরণ: [৪র্থ অংশ (3.7)]

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

➲ **সরলরেখার সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান:** $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ রেখার-

i. একই পার্শ্বে থাকলে $(ax_1 + by_1 + c)$ এবং $(ax_2 + by_2 + c)$ একই চিহ্নবিশিষ্ট হবে।

ii. বিপরীত পার্শ্বে থাকলে $(ax_1 + by_1 + c)$ এবং $(ax_2 + by_2 + c)$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হবে।

➲ **লম্ব দূরত্ব:** $ax + by + c = 0$ সরলরেখা হতে $p(x_1, y_1)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

➲ **সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব:** সমান্তরাল রেখাদ্বয় $ax+by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

➲ **কোণের সমদ্বিখণ্ডক:** $a_1x+b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

i. $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$ হলে, (+) চিহ্নধারী সমীকরণটি স্থূলকোণের এবং (−) চিহ্নধারী সমীকরণটি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে।

ii. $a_1a_2 + b_1b_2 < 0$ হলে, (+) চিহ্নধারী সমীকরণটি সূক্ষ্মকোণের এবং (−) চিহ্নধারী সমীকরণটি স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে।

➲ **কোণের সাপেক্ষে বিন্দু:** (x_1, y_1) বিন্দু $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত-

i. স্থূলকোণে অবস্থান করলে−

$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$

ii. সূক্ষ্মকোণে অবস্থান করলে

$(a_1x_1+b_1y_1 + c_1)(a_2x_1+b_2y_1 + c_2)(a_1a_2 + b_1b_2) < 0$

➲ **মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক:** $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ক্ষেত্রে $c_1c_2 > 0$ হলে (+) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে এবং $c_1c_2 < 0$ হলে (−) চিহ্নযুক্ত সমীকরণটি মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দেশ করে।

➲ **স্থূলকোণ এবং সূক্ষ্মকোণ:** $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0, L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং $L_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের-

(a) L_1^L_2 স্থূলকোণ হবে, যদি $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}(a_1a_2 + b_1b_2) < 0$ হয়।

(b) L_1^L_2 সূক্ষ্মকোণ হবে যদি $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ হয়।

➲ $L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1$, $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2$; $L_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের L_1 এবং L_2 রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী মধ্যমার সমীকরণ, $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$ এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\left(\frac{D^2}{C_1 C_2 C_3}\right)$ বর্গ একক যেখানে $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং C_1, ... যথাক্রমে c_1, c_2, c_3- এর সহগুণক।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01

Ex-01 $(\sqrt{3},1)$ বিন্দু হতে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অংকি... দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং এই লম্ব x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নি...

Solⁿ: $(\sqrt{3},1)$ বিন্দু হতে অংকিত $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর ...

লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{3-1+8}{\sqrt{3+1}} = 5$

$\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ সরলরেখার ঢাল $= \sqrt{3}$। এ রেখার উপর লম্ব ...

রেখার ঢাল m $\therefore m.\sqrt{3} = -1 \therefore m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

এই লম্ব x অক্ষের সাথে θ কোণ তৈরি করলে $m = \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = 150^o$

Ans. 5...

Ex-02 একটি বর্গক্ষেত্রের দুটি বাহু যদি $5x - 2y = 13$ এবং $5x - 2y$ ... সরলরেখাদ্বয়ের অংশ হয়, তাহলে বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত?

Solⁿ: দুটি বাহুর সমীকরণ, $5x - 2y - 13 = 0$ ও $5x - 2y + 16$ ... সমান্তরাল। উক্ত সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের দূরত্ব = বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু...

$= \frac{16+13}{\sqrt{25+4}} = \sqrt{29}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (\sqrt{29})^2 = 29$ বর্গ একক।

Ex-03 দেখাও যে, $(\sqrt{a^2 - b^2},0)$ এবং $(-\sqrt{a^2 - b^2},0)$ বিন্দু... $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের গুণফল b^2 ...

Solⁿ: $(\sqrt{a^2 - b^2},0)$ বিন্দু হতে $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$

বা, $bx\cos\theta + ay\sin\theta - ab = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta - ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$

আবার, $(-\sqrt{a^2 - b^2},0)$ বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর অংকিত লম্ব...

$= -\frac{b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta + ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$

$\therefore$ লম্বদ্বয়ের গুণফল

$= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta - ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} \times \frac{-(b\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta + ab)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$

$= \frac{b^2(a^2 - b^2)\cos^2\theta - a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \frac{-b^2(a^2\cos^2\theta - b^2\cos^2\theta - a^2 ...}{b^2\cos^2\theta + a^2(1 - \cos^2\theta)}$

$= b^2 \times \frac{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\theta}{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\theta} = b^2$

(Show...

For practice:

অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলো হতে $3y = 4x - 10$ রেখার লম্ব দূরত্ব 4 একক, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর। **Ans.** $(0, -10), \left(0, \frac{10}{3}\right)$

মূলবিন্দু হতে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখার দূরত্ব p হলে দেখাও যে, $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

দেখাও যে, $ax + by + c = 0$ ও $k(ax + by) + d = 0$ সমান্তরাল যুগলের মধ্যবর্তী দূরত্ব $\left(\frac{d}{k} - c\right) \div \sqrt{a^2 + b^2}$ এবং তা হতে $3x - 2y = 1$ এবং $6x - 9 = 4y$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{11}{2\sqrt{3}}$

যদি মূলবিন্দু হতে $x\sec\theta - y\operatorname{cosec}\theta = k$ এবং $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos2\theta$ রেখা দুটির উপর লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে r_1 ও r_2 হয় তবে প্রমাণ কর যে, $4r_1^2 + r_2^2 = k^2$

দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু হতে $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দুটির গুণফল 0 যুক্ত হবে।

Type-02

Ex-01 $4x - 3y - 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা হতে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $4x - 3y - 8 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x - 3y + k = 0$

সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যকার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{-8-k}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right| = \left|\frac{8+k}{5}\right|$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{8+k}{5}\right| = 2 \Rightarrow \frac{k+8}{5} = \pm 2 \Rightarrow k + 8 = \pm 10$

$\therefore k = 2, -18$

নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়, $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $4x - 3y - 18 = 0$ **Ans.**

For practice:

$12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরে অবস্থিত সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $12x-5y+19=0; 12x-5y-33=0$

$(1, -2)$ বিন্দু হতে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $6x+8y-65; 6x+8y+85=0$

Ex-02 এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $y - 2x + 2 = 0$ এবং $y - 3x + 5 =$ রেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে গমন করে এবং মূলবিন্দু হতে যাদের দূরত্ব $\frac{7}{\sqrt{2}}$ একক।

Sol^n: প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(3, 4)$

$(3, 4)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $y - 4 = m(x - 3)$

$\Rightarrow mx - y + 4 - 3m = 0$। এখন, $(0, 0)$ বিন্দু হতে $mx - y + 4 - 3m = 0$ রেখার উপর লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}}\right|$

প্রশ্নমতে, $\frac{4-3m}{\sqrt{1+m^2}} = \pm\frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{(4-3m)^2}{1+m^2} = \frac{49}{2}$

$\Rightarrow 49 + 49m^2 = 2(16 - 24m + 9m^2)$

$\Rightarrow 31m^2 + 48m + 17 = 0 \Rightarrow (m+1)(31m + 17) = 0$

$\therefore m = -1$ বা $-\frac{17}{31}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $y - 4 = -(x - 3)$

$\Rightarrow x + y - 7 = 0$ এবং $y - 4 = -\frac{17}{31}(x - 3)$

$\Rightarrow 17x + 31y = 175$ **Ans.**

For practice:

01. এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূলবিন্দু থেকে যালের দূরত্ব 4 একক। **Ans.** $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

02. $(3, 6)$ বিন্দুগামী এবং মূলবিন্দু হতে 6 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $y = 6, 4x + 3y - 30 = 0$

Type-03

Ex-01 $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা হতে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, বিন্দুটির স্থানাংক (h, k)

$\therefore (h, k)$ হতে $12x - 5y + 26 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব

$$= \left|\frac{12h - 5k + 26}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\right|$$

প্রশ্নমতে, $\frac{12h - 5k + 26}{13} = \pm 2$

$\Rightarrow 12h - 5k + 26 = \pm 26 \quad \therefore 12h - 5k = 0$ ---------- (i)

এবং $12h - 5k + 52 = 0$ ---------- (ii)

(h, k) বিন্দুটি $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত, অতএব

$h + 5k = 13$ ---------- (iii)

(i) ও (iii) নং সমাধান করে পাই $\left(1, \frac{12}{5}\right)$

(ii) ও (iii) নং সমাধান করে পাই $\left(-3, \frac{16}{5}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুদ্বয়, $\left(1, \frac{12}{5}\right), \left(-3, \frac{16}{5}\right)$ **Ans.**

For practice:

01. $4x + 3y - 7$ ও $2y - 5 = 0$ রেখা দুটো হতে সমদূরবর্তী এবং $3x + 2y - 5$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলোর স্থানাংক নির্ণয় কর। **Ans.** $\left(-\frac{1}{14}, \frac{73}{28}\right); \left(\frac{1}{16}, \frac{77}{32}\right)$

Type-04

Ex-01 যদি (x, y) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হয় তবে দেখাও যে, $x + 7y = 0$ অথবা $7x - y + 2 = 0$

Sol^n: (x, y) হতে সরলরেখাদ্বয়ের দূরত্ব $= \left|\frac{3x - 4y + 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right|$ এবং $\left|\frac{4x + 3y + 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right|$

প্রশ্নমতে, $\frac{3x - 4y + 1}{5} = \pm\frac{4x + 3y + 1}{5}$

$\Rightarrow 3x - 4y + 1 = \pm(4x + 3y + 1)$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে,	ঋণাত্মক চিহ্ন নিয়ে,
$x + 7y = 0$	$7x - y + 2 = 0$

(Showed)

For practice:

01. P বিন্দু হতে $2x + y - 1 = 0$ ও $x + 2y + 1 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বদ্বয়ের সংখ্যাসূচক অনুপাত $2 : 1$। দেখাও যে, P এর সঞ্চারপথ দুটি সরলরেখা সম্বলিত। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $4x + 5y + 1 = 0; y + 1 = 0$

Type-05

Ex-01 $12x + 5y = 4$ এবং $3x + 4y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। এদের কোনটি মূলবিন্দু অন্তর্ধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক?

Sol^n: $3x + 4y + 7 = 0$ এবং $12x + 5y - 4 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হবে–

$$\frac{3x+4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{12x+5y-4}{\sqrt{12^2+5^2}} \quad \text{.........(i)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4y+7}{5} = \pm\frac{12x+5y-4}{13}$$

$$\Rightarrow 39x + 52y + 91 = \pm(60x + 25y - 20)$$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $\therefore 21x-27y-111=0$ $\therefore 7x-9y-37=0$	(–) চিহ্ন নিয়ে, $99x+77y+71=0$

যেহেতু (1) নং সমীকরণে ধ্রুবক পদদ্বয় বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট অতএব $\pm$ চিহ্নের ঋণাত্মক চিহ্ন গ্রহণ করলেই মূলবিন্দুকে ধারণকারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবেঃ $99x + 77y + 71 = 0$ **Ans.**

Ex-02 দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের একটির সমীকরণ $x - 3y + 1 = 0$। যদি সরলরেখাদ্বয়ের একটির সমীকরণ $x - y + 1 = 0$ হয় তবে অপর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $x - 3y + 1 = 0$ এবং একটি সরলরেখার সমীকরণ $x - y + 1 = 0$ কে সমাধান করে উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক পাই $(-1, 0)$। যেহেতু অপর সমদ্বিখণ্ডকটি উক্ত ছেদ বিন্দুতে $x - 3y + 1 = 0$ সমদ্বিখণ্ডকের উপর লম্ব। অতএব, এর সমীকরণ হবে $3x + y + k = 0$; উক্ত সমদ্বিখণ্ডকটি $(-1, 0)$ বিন্দুগামী, $\therefore -3 + 0 + k = 0 \therefore k = 3$

$\therefore$ অপর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $3x + y + 3 = 0$ **Ans.**

Ex-03 $3x - 4y = 2$ ও $4x - 3y = -1$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ–

$$\frac{3x-4y-2}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{4x-3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$\Rightarrow 3x-4y-2 = \pm(4x-3y+1)$$

$\therefore 7x - 7y - 1 = 0$ এবং $x + y + 3 = 0$

$a_1a_2 + b_1b_2$ অর্থাৎ $(4 \times 3) + (4 \times 3) = 24 > 0$ হওয়ায় (–) চিহ্নধারী সমীকরণটি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।

$\therefore$ সূক্ষ্মকোনের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $7x-7y-1 = 0$ **Ans.**

Ex-04 $7x - y - 2 = 0$ এবং $x + y + 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। কোন সমদ্বিখণ্ডকটি $(-1, 2)$ বি... কোণে অবস্থিত?

Sol^n: $\frac{7x-y-2}{\sqrt{7^2+1}} = \pm\frac{x+y+2}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$$\Rightarrow \frac{7x-y-2}{\sqrt{50}} = \pm\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}$$

(–) চিহ্ন নিয়ে, $\therefore 3x + y + 2 = 0$ এবং (+) চিহ্ন নিয়ে $x - 3y - ...$

এখন, $[7 \times (-1) -2 -2]\ [-1 + 2 + 2]\ [(7 \times 1) + (-1 \times ...$ হওয়ায় $(-1, 2)$ বিন্দুটি সূক্ষ্মকোণে অবস্থিত।

আবার $a_1a_2 + b_1b_2 = 7 \times 1 + (-1) \times 1 = 6 > 0$ হওয়ায় (–) চিহ্নধারী সমীকরণটি সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।

$\therefore (-1, 2)$ বিন্দুধারী সূক্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক, $3x+y+2 = 0$

Ex-05 $15x - 8y + 3 = 0$ এবং $4x + 3y + 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের ... কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় x অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। P... দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{15x-8y+3}{\sqrt{15^2+(-8)^2}} = \pm\frac{4x+3y+5}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$$\Rightarrow 75x - 40y + 15 = \pm(68x + 51y + 85)$$

$\therefore x - 13y - 10 = 0$ এবং $143x + 11y + 100 = 0$ যেহে... সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় x অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। ...

P বিন্দুর স্থানাংক $= (10, 0)$ ও Q বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{-100}{143}, 0\right)$

$\therefore$ PQ এর দৈর্ঘ্য$= \sqrt{\left(10+\frac{100}{43}\right)^2 + (0-0)^2} = \frac{1530}{143}$ একক A...

For practice:

01. $4x + 4y + 3 = 0$ এবং $x + 7y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ... সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এদের কোনটি মূলবিন্দু অ... কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

Ans. $16x - 48y + 23 = 0;\ 24x + 8y + 7 = 0;$ পরবর্তী বি...

02. দেখাও যে, (0, 1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 1...$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ সমূহের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

03. দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ এবং $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুটি হতে সমদূরব...

04. $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূল... সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x+y+2=0$

05. $x = y$ এবং $x + y = 1$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ড... সমীকরণ নির্ণয় কর। (2, 1) বিন্দুটি যে কোণের মধ্যে অবস্থি... সমদ্বিখণ্ডক কোনটি?

Ans. $2y = 1$। $2x = 1$ যে কোণের সমদ্বিখণ্ডক $2y = 1$ তার মধ্যে ... বিন্দু অবস্থিত।

06. $15x - 8y + 3 = 0$ এবং $4x + 3y + 5 = 0$ সরলরেখা দুটির অ... কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুটি y অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে PQ এ... নির্ণয় কর। **Ans.** ...

BUET, KUET, CUET & RUET
বিগত প্রশ্ন ও সমাধান] [সরলরেখার সমীকরণ]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. দুটি সরলরেখা (–1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা 3x – y + 7 = 0 রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে। [16-17]

Solve $3x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 3x + 7$

$m = \tan\theta = 3 \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}3$

$\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}3 + \tan^{-1}1 = \pi - \tan^{-1}2$

$m_1 = \tan\theta_1 = -2$

$\theta_2 = \theta - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}3 - \tan^{-1}1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$m_2 = \tan\theta_2 = \frac{1}{2}$

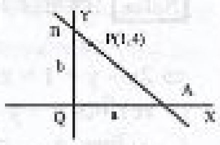
রেখাদ্বয়ের সমীকরণ, $y - 2 = -2(x + 1) \therefore 2x + y = 0$

এবং $(y - 2) = \frac{1}{2}(x + 1) \therefore x - 2y + 5 = 0$

এখন, $m_1m_2 = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

অতএব সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। (Showed)

02. একটি সরলরেখা (1,4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গএকক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [15-16]



Solve এখানে, $\frac{1}{2}ab = 8 \Rightarrow ab = 16$ .... (i)

আবার, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx + ay = 16$

$\Rightarrow b + 4a = 16$ [যেহেতু রেখাটি (1, 4) বিন্দুগামী]

$\Rightarrow b = 4(4 - a)$ --------- (ii)

(i) ও (ii) নং হতে, $4a(4 - a) = 16$

$\Rightarrow 4a - a^2 - 4 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$\therefore b = 4(4 - 2) = 8$

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$ **Ans.**

03. 2x – 3y + 4 = 0 এবং 2y – 3x – 1 = 0 সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সমূহ যথাক্রমে x অক্ষকে P, R এবং y অক্ষকে Q, S বিন্দুতে ছেদ করে। একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা সমদ্বিখণ্ডক দ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং PS রেখার সমান্তরাল। [14-15]

Solve $2x - 3y + 4 = 0$

$3x - 2y + 1 = 0$

রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$\frac{2x - 3y + 4}{\sqrt{4 + 9}} = \pm\frac{3x - 2y + 1}{\sqrt{9 + 4}} \Rightarrow 2x - 3y + 4 = \pm(3x - 2y + 1)$

(–ve) ধরে পাই, $2x - 3y + 4 = 3x - 2y + 1$

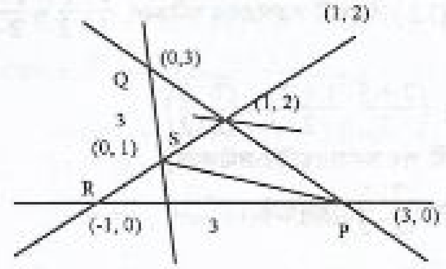
$\Rightarrow x + y - 3 = 0$ ----- (i) $\Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

আবার, (–ve) ধরে পাই $2x - 3y + 4 = -3x + 2y - 1$

$\Rightarrow 5x - 5y + 5 = 0 \Rightarrow x - y = -1$ -----(ii) $\Rightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$

(i) ও (ii) নং সমাধান করে পাই, x = 1, y = 2

∴ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু (1 , 2)



PS এর সমীকরণ, $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow x + 3y = 3$

এখন PS রেখার সমান্তরাল (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$x - 1 + 3(y - 2) = 0 \therefore x + 3y - 7 = 0$ **Ans.**

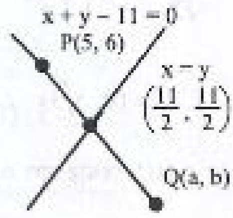
04. y = x সরলরেখা ভিত্তিক P(5, 6) বিন্দুর প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [01-02]

Solve y = x এর উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ x + y = k

যা P(5, 6) গামী হলে, k = 11

∴ x + y – 11 = 0 ও y = x

সরলরেখাদ্বয় সমাধান করে পাই, $x = y = \frac{11}{2}$



∴ ছেদবিন্দু $\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$, প্রতিবিম্ব Q(a, b) হলে,

PQ এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{5 + a}{2}, \frac{6 + b}{2}\right)$

$= \left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right) \therefore \frac{5 + a}{2} = \frac{11}{2}, \frac{6 + b}{2} = \frac{11}{2}$

∴ a = 6, b = 5

সুতরাং প্রতিবিম্বের স্থানাংক (6, 5) **Ans.**

05. যদি 2x +by+4=0, 4x–y–2b= 0 এবং 3x +y–1= 0 রেখাত্রয় সমবিন্দু হয়, তবে b এর মানগুলো নির্ণয় কর। [01-02; KUET: 09-10]

Solve সমবিন্দু হবার শর্ত, $\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -2b \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(1 + 2b) - b(-4 + 6b) + 4(4 + 3) = 0$

$\Rightarrow 2 + 4b + 4b - 6b^2 + 28 = 0$

$\Rightarrow -6b^2 + 8b + 30 = 0 \Rightarrow 3b^2 - 4b - 15 = 0$

$\Rightarrow b = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{4 \pm 14}{6} = 3, -\frac{5}{3}$ **Ans.**

06. k এর যে কোন মানের জন্য (2k–3)x + (3k–2)y–4k+1 = 0 রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়, বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর। [99-00]

Solve k = 0 হলে, $-3x - 2y = -1$ ... (i)

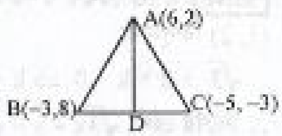
k = 1 হলে, $-x + y = 3$ ... (ii)

(i) ও (ii) নং সমাধান করে পাই x = –1, y = 2

∴ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক = (–1,2) **Ans.**

07. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A(6, 2), B(–3, 8) এবং C(–5, –3) হলে, A বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উচ্চতা নির্দেশক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [96-97; KUET: 04-05]

Solve BC রেখার সমীকরণ,



$\frac{x + 3}{-3 + 5} = \frac{y - 8}{8 + 3}$

$\Rightarrow 11x - 2y + 49 = 0$ ... (i)

(i) নং রেখার উপর লম্ব AD রেখার সমীকরণ

$2x + 11y + k = 0$ যা (6, 2) বিন্দুগামী

$\therefore 2 \times 6 + 11 \times 2 + k = 0 \therefore k = -34$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ 2x + 11y = 34 **Ans.**

08. A(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [96-97; KUET: 03-04]

Solve A (2,1) ও B(5,2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y-1}{1-2}=\frac{x-2}{2-5}$

$\therefore x-3y+1=0$

AB এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{2+5}{2},\frac{1+2}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$

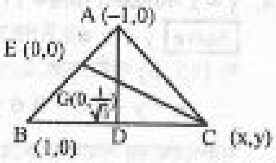
∴ AB এর মধ্যবিন্দুগামী লম্ব সরলরেখাটির সমীকরণ,

$3x+y+k=0$ যা $\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{21}{2}+\frac{3}{2}+k=0 \Rightarrow k=-12 \therefore 3x+y-12=0$ **Ans.**

09. ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র $G\equiv(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ এবং ইহার দুইটি শীর্ষবিন্দু $A\equiv(-1,0)$ এবং $B\equiv(1,0)$। দেখাও যে, AD মধ্যমা BC বাহুর উপর লম্ব। [95-96]

Solve ধরি, C (x,y)



∴ AB বাহুর মধ্যবিন্দু E এর স্থানাঙ্ক, E (0, 0)

এখন, $0=\frac{1\times x+2\times 0}{1+2} \therefore x=0$

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times y+2\times 0}{1+2} \therefore y=\sqrt{3}$

$\therefore C\equiv(0,\sqrt{3})$ ∴ AD রেখার ঢাল $=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-0}{0+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ BC রেখার ঢাল $=\frac{0-\sqrt{3}}{0-1}=-\sqrt{3}$

∴ AD রেখার ঢাল × BC রেখার ঢাল $=\frac{1}{\sqrt{3}}\times-\sqrt{3}=-1$

$\therefore AD\perp BC$ **(Showed)**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $3x+4y-11=0$ এবং $12x-5y-2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [06-07; CUET: 13-14; 07-08]

Solve রেখাদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$\frac{3x+4y-11}{\sqrt{9+116}}=\pm\frac{12x-5y-2}{\sqrt{144+25}}$

এখন $3\times12+4\times(-5)=16>0$

∴ (–ve) চিহ্ন নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

$\therefore \frac{3x+4y-11}{5}=-\frac{12x-5y-2}{13}$

$\Rightarrow 39x+52y-143=-(60x-25y-10)$

$\Rightarrow 99x+27y-153=0 \therefore 11x+3y-17=0$ **Ans.**

02. (1, 2) বিন্দু হতে $x-\sqrt{3y}+4=0$ রেখার উপর লম্ব অংকিত করা হল। মূলবিন্দু হতে এই লম্বের দূরত্ব নির্ণয় কর। [05-06; 10-11; CUET: 14-15]

Solve প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $\sqrt{3}x+y+k=0$ যা (1, 2) বিন্দুগামী

$\therefore \sqrt{3}+2+k=0 \Rightarrow k=-(\sqrt{3}+2)$

∴ নির্ণেয় রেখা $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-2=0$

∴ (0, 0) বিন্দু হতে উক্ত রেখার উপর লম্ব দূরত্ব

$=\frac{|-\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3+1}}=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ **Ans.**

03. $2x+3y-1=0$ এবং $x-2y+3=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূ... নির্ণয় কর। [04-05]

Solve $m_1=-\frac{2}{3}, m_2=\frac{1}{2}$

এখন $\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3+4}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$

$\therefore \theta=\tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)=60.255°$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. $4y-3x=3$ এবং $3y-4x=5$, রেখা দুটির অন্তর্ভুক্ত স্থূল... সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [09-10]

Solve রেখাদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $\frac{3x-4y+3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{4x-3y...}{\sqrt{3^2+...}}$

$\Rightarrow 3x-4y+3=\pm(4x-3y+5)$

(+ ve) নিয়ে, $x+y+2=0$ ....(i)

(– ve) নিয়ে, $7x-7y+8=0$ ....(ii)

এখন, $(-3)\times(-4)+4\times3=24>0$ বলে (i) নং সরলরেখাটি স্থূল... সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore x+y+2=0$

02. $y=2x+1$ ও $2y-x=4$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ... সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় y অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। P ও Q-এর... কত? [08-09]

Solve রেখাদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $\frac{2x-y+1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\pm\frac{x-2y...}{\sqrt{1^2+2...}}$

$\Rightarrow 2x-y+1=\pm(x-2y+4)$

(+ ve) নিয়ে $x+y-3=0$ ....(i)

(–ve) নিয়ে, $3x-3y+5=0$ ....(ii)

y অক্ষে x = 0

∴ (i)নং-এ x=0 বসালে, y = 3 এবং (ii)নং-এ x=0 বসালে $y=\frac{5}{3}$

$\therefore P(0,3), Q(0,\frac{5}{3})$

$\therefore PQ=\sqrt{\left(3-\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}$

03. $3x+\sqrt{3}y+2=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সর... হলে, α এবং p এর মান নির্ণয় কর। [04-05]

Solve প্রদত্ত রেখাদ্বয় একই সরলরেখা প্রকাশ করলে,

$\frac{3}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}=\frac{-2}{p}$

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan30°, \tan210°$

$\therefore \alpha=30°, 210°$

$\therefore p=-\frac{2}{3}\cos\alpha=-\frac{2}{3}\cos30°, \frac{2}{3}\cos210°=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(-3, 6) বিন্দু হতে $2x - y - 8 = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক ও লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। [03-04]

Solve $2x - y - 8 = 0$ এর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ

$x + 2y + k = 0$ যা (-3, 6) বিন্দুগামী

$\therefore -3 + 2 \times 6 + k = 0 \Rightarrow k = -9$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ $x + 2y - 9 = 0$

প্রদত্ত রেখা এবং নির্ণেয় রেখার ছেদবিন্দু $= (5, 2)$ যা নির্ণেয় পাদবিন্দু।

লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|2(-3) - 6 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1}} = 4\sqrt{5}$ **Ans.**

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

দুইটি রেখা $x \sin\alpha - y \cos\alpha + c = 0$ এবং $x\cos\alpha + y \sin\alpha + c = 0$ এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। রেখা দুইটি x-অক্ষের সঙ্গে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, সেইগুলিও নির্ণয় কর। [12-13]

Solve

১ম রেখা: $x\sin\alpha - y\cos\alpha + c = 0$ এবং ২য় রেখা: $x\cos\alpha + y\sin\alpha + c = 0$

১ম রেখার ঢাল $= \tan\alpha$ এবং ২য় রেখার ঢাল $= -\cot\alpha$

রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল $= \tan\alpha\,(-\cot\alpha) = -1$

সুতরাং $x\sin\alpha - y\cos\alpha + c = 0$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha + c = 0$

রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\dfrac{\pi}{2}$ আবার, ১ম রেখা x অক্ষের সাথে $\tan^{-1}(\tan\alpha)$

অর্থাৎ α কোণ এবং ২য় রেখা x অক্ষের সাথে $\tan^{-1}(-\cot\alpha)$ বা

$\tan^{-1}\left\{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\right\}$ অর্থাৎ $\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। **Ans.**

একটি সরলরেখার সমীকরণ বের কর যা $ax+by = 0$ এবং $by-ay+c = 0$ রেখা দুইটির ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সমান্তরাল হয়। [08-09]

Solve $ax + by = 0$ .... (i)

এবং $bx - ay + c = 0$ ..... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$ax + by + k(bx - ay + c) = 0$

$\Rightarrow (a + kb)x + (b - ka)y + kc = 0$ ..... (iii)

(iii) নং রেখা x অক্ষের সমান্তরাল, $\therefore a + kb = 0 \quad \therefore k = -\dfrac{a}{b}$

(iii) নং হতে $\left(b + \dfrac{a}{b}a\right)y - \dfrac{a}{b}c = 0$

$\Rightarrow (b^2 + a^2)y - ac = 0$ **Ans.**

$x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [07-08]

Solve উক্ত রেখাদ্বয় সমাধান করে পাই, $(x,y) = \left(\dfrac{17}{28}, \dfrac{31}{28}\right)$

$m = \pm \tan 45° = \pm 1$

সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরন, $\left(y - \dfrac{31}{28}\right) = \pm 1\left(x + \dfrac{17}{28}\right)$

$\Rightarrow 7x - 7y + 12 = 0$ এবং $2x + 2y - 1 = 0$ **Ans.**

(7, 17) বিন্দুগামী এবং (1, 9) বিন্দু হতে 6 একক দূরত্বে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [06-07]

Solve (7,17) বিন্দুগামী যেকোন সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 17 = m(x - 7)$

$\Rightarrow mx - y - (7m - 17) = 0$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{m.1 - 9 - (7m - 17)}{\sqrt{m^2 + 1}} = \pm 6$

$\Rightarrow (m - 9 - 7m + 17)^2 = 36(m^2 + 1)$

$\Rightarrow (-6m + 8)^2 = 36m^2 + 36$

$\Rightarrow 36m^2 - 96m + 64 = 36m^2 + 36 \Rightarrow m = \dfrac{7}{24}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরন $y - 17 = \dfrac{7}{24}(x - 7)$

$\Rightarrow 7x - 24y + 359 = 0$ **Ans.**

05. দুইটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [05-06]

Solve (3,4) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$y - 4 = m(x - 3)$ .... (i) যার ঢাল m

$x - y + 4 = 0$ রেখার ঢাল $= 1$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\tan 60° = \pm\dfrac{1 - m}{1 + m} \Rightarrow \sqrt{3} = \pm\dfrac{1 - m}{1 + m}$

(+) নিয়ে পাই, $\sqrt{3} + \sqrt{3}m = 1 - m \quad \therefore m = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$

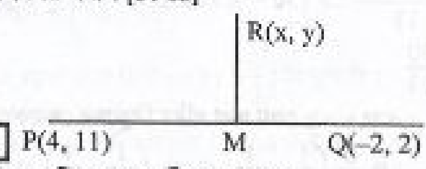
$\therefore$ একটি সরলরেখার সমীকরণ, $y - 4 = (\sqrt{3} - 2)(x - 3)$

$\Rightarrow (2 - \sqrt{3})x + y = 10 - 3\sqrt{3}$

অনুরূপভাবে, (– ve) চিহ্ন নিয়ে এবং অপর সরলরেখার সমীকরণ,

$(2 + \sqrt{3})x + y = 10 + 3\sqrt{3}$ **Ans.**

06. P(4, 11) ও Q(–2, 2) দুইটি বিন্দু। PQ সরল রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [04-05]



Solve PQ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণের জন্য,

$PR = QR$

$\Rightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 11)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 22y + 137 = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8$

$\Rightarrow 12x + 18y - 129 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $12x + 8y - 129 = 0$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. a এর মান কত হলে, $3x + 2y - 5 = 0$, $ax + 4y - 9 = 0$ এবং $x + 2y - 7 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু? [13-14]

A. –7 B. 5 C. 3 D. 7

Ans D Solve রেখাত্রয় সমবিন্দু হবার শর্ত, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ a & 4 & -9 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 3(-28 + 18) - 2(-7a + 9) - 5(2a - 4) = 0$

$\Rightarrow -30 + 14a - 18 - 10a + 20 = 0 \Rightarrow 4a - 28 = 0 \therefore a = 7$

02. x এর কোন মানের জন্য $(1, -x)$, $(1, x)$ এবং $(x^2, -1)$ বিন্দু তিনটি একই সরল রেখায় অবস্থান করবে? [12-13]

A. –1, 0, 1 B. 2, 3, 4 C. –3, 2, 3 D. –4, 3, 4

| Ans | A | Solve | বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করলে এদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

$\therefore \frac{1}{2}\{1(x+1)+1(-1+x)+x^2(-x-x)\}=0$

$\therefore x+1+x-1-2x^3=0$
$\Rightarrow -2x^3+2x=0$
$\Rightarrow 2x^3-2x=0$
$\Rightarrow 2x(x^2-1)=0$
$\therefore x=0$ ও $x^2=1$
$\Rightarrow x=\pm1$
$\therefore x=1, 0, -1$

03. $x-3y-2=0$ রেখার উপর P একটি বিন্দু এবং তা (2, 3) ও (6, –5) বিন্দু দু'টি হতে সমদূরবর্তী। P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হল– [11-12]

A. (12, 4) B. (14, 2) C. (14, 4) D. (16, 4)

| Ans | C | Solve | ধরি, P = (x, y)

$\therefore (x-6)^2+(y+5)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$
$\Rightarrow -12x+36+10y+25=-4x+4-6y+9$
$\Rightarrow 8x-16y-48=0$
$\Rightarrow x-2y-6=0$...... (i) এবং $x-3y-2=0$ ..... (ii)
(i) ও (ii) সমাধান করে পাই (x, y) = (14, 4)

04. $4x+3y=c$ এবং $12x-5y=2(c+3)$ রেখাদ্বয় মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী। c-এর মান হবে– [13-14]

A. 14 B. 12 C. 8 D. 10

| Ans | D | Solve | মূল বিন্দু হতে রেখাদ্বয় সমদূরবর্তী হলে

$$\frac{4.0+3.0-c}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm\frac{12.0-5.0-2(c+3)}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

$\Rightarrow \left|\frac{c}{5}\right|=\frac{-2(c+3)}{13}\Rightarrow 13c=\pm10c\pm30$

$\therefore c=10, -\frac{30}{23}$

05. $y=mx$, $y=m_1x$ এবং $y=b$ রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে– [13-14]

A. $\frac{1}{2b^2}(m-m_1)$ B. $\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m_1}\right)$ C. $2b\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m}\right)$ D. $\frac{1}{2b}(m_1-m)$

| Ans | B | Solve | $y=mx$, $y=m_1x$, $y=b$

সরলরেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক

$(0, 0), \left(\frac{b}{m}, b\right), \left(\frac{b}{m_1}, b\right)$

$\therefore \Delta$ এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\left[0(b-b)-0\left(\frac{b}{m}-\frac{b}{m_1}\right)+1\left(\frac{b^2}{m}-\frac{b^2}{m_1}\right)\right]$

$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m_1}\right)$ বর্গ একক

06. $ax+y+1=0$, $x+y+a=0$ এবং $x+ay+1=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে, a এর মান হবে- [12-13]

A. 1, –2 B. –1, 2 C. 1, 2 D. –1, –2

| Ans | A | Solve | রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে, এদের সহগ দ্বারা গঠিত

নির্ণায়ক শূন্য হবে, $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow a(1-a^2)-1(1-a)+1(a-1)=0$
$\therefore (a-1)^2(a+2)=0 \quad \therefore a=1, -2$

07. একটি সরলরেখা (–1, 3) এবং (4, –2) বিন্দু দিয়ে গেলে অ... মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশটুকুর দৈর্ঘ্য হবে- [12-13]

A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

| Ans | D | Solve | (–1, 3) ও (4, –2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমী...

$\frac{y-3}{3+2}=\frac{x+1}{-1-4}\Rightarrow 5x+5=-5y+15 \Rightarrow 5x+5y=10$

$\Rightarrow x+y=2\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

$\therefore$ খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$

08. 2x+3y = 7 এবং 3ax – 5by + 15 = 0 সমীকরণ দুটি একই স... প্রকাশ করলে a ও b ধ্রুবকের মান কত হবে? [10-11]

A. $\left(-\frac{5}{7},\frac{3}{7}\right)$ B. $\left(-\frac{5}{7},\frac{9}{7}\right)$ C. $\left(-\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right)$ D. (...

| Ans | C | Solve | $2x+3y-7=0$ এবং $3ax-5by+15=$...

সরল রেখা হলে, $\frac{2}{3a}=\frac{3}{-5b}=\frac{-7}{15} \quad \therefore a=-\frac{10}{7}$ ও $b=\frac{9}{7}$

09. 4y = 3(x–4) এবং 4y = 3(x–1) রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত...

A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{15}{9}$ C. $\frac{9}{5}$ D. কোনটিই...

| Ans | C | Solve | $4y=3x-12$

$\Rightarrow 3x-4y-12=0$ এবং $4y=3(x-1)$

$\Rightarrow 3x-4y-3=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\left|\frac{-12+3}{\sqrt{3^2+(4)^2}}\right|=\left|\frac{-9}{5}\right|=$

10. 4x+5y-7=0 সরলরেখার উপর লম্ব এবং (1,2) বিন্দুগামী স... সমীকরণ হল: [09-10]

A. 4x+5y–7= 0 B. 5x–4y–1=0
C. 5x–4y+3=0 D. 4x+5y–10= 0

| Ans | C | Solve | $4x+5y-7=0$ রেখার ঢাল $=\frac{-4}{5}$

$\therefore$ (1, 2) বিন্দুগামী ও $\frac{5}{4}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ, $y-2=\frac{5}{4}$(...

$\Rightarrow 4y-8=5x-5\Rightarrow 5x-4y+3=0$

11. $5x-5\sqrt{3}y+2=0$ এবং $3\sqrt{3}x+3y-4=0$ রেখা দুটির... কোণ হবে- [06-07]

A. 30° B. 90° C. 60° D. 45°

| Ans | B | Solve | $5x-5\sqrt{3}y-4=0$ এর ঢাল $m_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$3x+\sqrt{3}y-4=0$ এর ঢাল $m_2=-\sqrt{3}$

$\therefore m_1\times m_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\times-\sqrt{3}=-1 \therefore$ অন্তর্ভুক্ত কোণ = 90°

12. (2, 3) বিন্দু হতে 4x + 3y -7 = 0 রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব বি... কত? [05-06]

A. 2 units B. 4 units C. 3 units D. 6 u...

| Ans | B | Solve | (2,3) বিন্দুতে থেকে $4x+3y-7=0$ রেখার...

$=\frac{4(2)+3(3)-7}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$ units

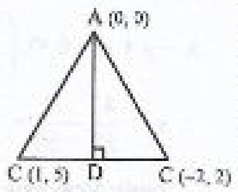
$\therefore$ প্রতিবিম্বের দূরত্ব = 2 × 2 = 4 units

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

...BC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(0, 0), B(1, 5) এবং ...(−2, 2) হলে A বিন্দুগামী BC রেখার উপর লম্বের সমীকরণ নির্ণয় ... [17-18,12-13;09-10]

...2x = y B. x + y = 0 C. 3x + 5y = 0
...x + 5y = 2 E. 7x + y = 3

Ans B Solve BC রেখার ঢাল $= \frac{5-2}{1+2} = 1$



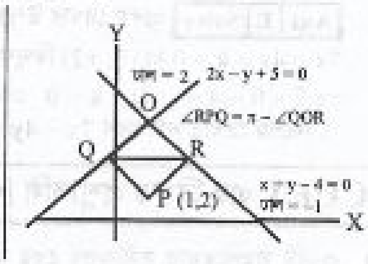
...AD ⊥ BC
...AD রেখার ঢাল = − 1
...AD রেখার সমীকরণ, y = (−1)x
... x + y = 0

...(1, 2) বিন্দু হতে 2x − y + 5 = 0 ও x + y − 4 = 0 রেখার উপর ...ক্রমে PQ ও PR লম্ব টানা হলো। Δ PQR এর ক্ষেত্রফল হলো- [...]

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$ E. $\frac{7}{2}$

Ans C Solve $PQ = \left|\frac{2\times1-2+5}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = \sqrt{5}$

$PR = \left|\frac{1+2-4}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\angle RPQ = \pi - \angle QOR$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2+1}{1-2.1}\right)$

$= \tan^{-1}3 = \sin^{-1}\frac{3}{\sqrt{10}}$

ΔPQR এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}PQ.PR.\sin RPQ$

$= \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}$ বর্গএকক

$= \frac{3}{4}$ বর্গ একক

...(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত ... এরূপ রেখার সমীকরণ হলো− [16-17]

A. 5x + 2y = 6 B. 7x + 3y = 9 C. 9x + 5y = 11
D. 3x + y = 12 E. 3x + 11y = 15

Ans D Solve $\frac{x-2}{2-5} = \frac{y-1}{1-2} \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$ —— (i)

(i) এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $-3x - y + k = 0$ —— (ii)

(ii) নং সরলরেখাটি AB এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ গামী।

$-\frac{21}{2} - \frac{3}{2} + k = 0 \Rightarrow k = 12$

নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $3x + y - 12 = 0$

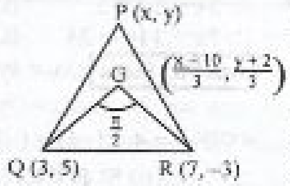
...যদি P(x, y), Q(3 , 5), R(7, −3) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু। যদি ∠QGR = π/2 হয় যেখানে G ভরকেন্দ্র, তাহলে G এর সঞ্চার পথ ...- [15-16]

A. $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 109 = 0$ B. $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 109 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 109 = 0$ D. $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 109 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 109 = 0$

Ans Blank Solve

ভরকেন্দ্র $= \left(\frac{x+3+7}{3}, \frac{y+5-3}{3}\right)$

$= \left(\frac{x+10}{3}, \frac{y+2}{3}\right)$



QG-এর ঢাল $= \frac{5 - \frac{y+2}{3}}{3 - \frac{x+10}{3}} = \frac{13-y}{-x-1}$

RG-এর ঢাল $= \frac{-3 - \frac{y+2}{3}}{7 - \frac{x+10}{3}} = \frac{-11-y}{11-x}$

প্রশ্নমতে, $\frac{13-y}{-x-1} \times \frac{-11-y}{11-x} = -1$

$\Rightarrow \frac{13-y}{x+1} \times \frac{11+y}{11-x} = -1$

$\Rightarrow 143 + 2y - y^2 = -11x + x^2 - 11 + x$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y - 154 = 0$

05. x − 3y + 4 = 0, x − 6y + 5 = 0 এবং x + ax + 2 = 0 রেখাত্রয় সমবিন্দুগামী হলে তৃতীয় রেখার সাথে লম্ব এবং মূল বিন্দুগামী রেখা সমীকরণ কত? [15-16; 10-11]

A. 2x + 5y = 0 B. 7x + y = 0 C. 4x + 3y = 0
D. 3x − y = 0 E. −4x + 9y = 0

Ans D Solve $x - 3y + 4 = 0$ ....(i)
$x - 6y + 5 = 0$ ....(ii) [বিয়োগ করে]
$3y - 1 = 0$

$y = \frac{1}{3}$ (i) নং এ বসালে, $x - 1 + 4 = 0 \Rightarrow x = -3$

∴ সমবিন্দুটি $= \left(-3, -\frac{1}{3}\right)$

এখন, x + ay + 2 = 0 যা $\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$ বিন্দুগামী।

$\therefore -3 + a\frac{1}{3} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \quad \therefore a = 3$

∴ ৩য় রেখা x + 3y + 5 = 0 এর উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, 3x − y = 0

06. যদি $\frac{3}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট একটি সরলরেখা ax + 3y − 7 = 0 সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে a এর মান হবে? [15-16]

A. None of them B. 3 C. 2 D. −2

Ans C Solve $3y = -ax + 7 \Rightarrow y = -\frac{a}{3}x + \frac{7}{3}$

এর ঢাল $= -\frac{a}{3}$ প্রশ্নমতে, $-\frac{a}{3}\times\frac{3}{2} = -1 \therefore a = 2$

07. 3x + 4y = 7 রেখার সমান্তরাল এবং (1, −2) বিন্দু হতে 7.5 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? [14-15]

A. 3x + 4y = 7 B. 4x + 3y = 9 C. 7x + y = 11
D. 4x + 3y = 20.5 E. 3x + 4y = 32.5

Ans E Solve 3x + 4y = 7 রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,
3x + 4y + k = 0 . . . . (i)
প্রশ্নমতে, (1,−2) বিন্দু হতে (i) নং রেখার দূরত্ব = 7.5

$\therefore \frac{|3-8+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 7.5 \Rightarrow (k-5) = \pm37.5 \Rightarrow k = 42.5, -32.5$

∴ সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ 3x + 4y + 42.5 = 0 এবং 3x + 4y − 32.5 = 0

08. $3x - 4y = 2$ এবং $4x - 3y = -1$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [13-14]

A. $3x + 5y = 3$ B. $7x - 7y = 1$ C. $3x + 11y = 11$
D. $7x + 11y = 23$ E. $7x + 15y = 29$

Ans B Solve $3x - 4y - 2 = 0$ .... (i)

$4x - 3y + 1 = 0$ .... (ii)

এখানে $3 \times 4 + (-4) \times (-3) = 24 > 0$

$\therefore$ (i) নং (ii) নং রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x - 4y - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{4x - 3y + 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \quad \therefore 7x - 7y = 1$$

09. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(5, 12), B(−12, 5) এবং C(−7, 17) হলে, ∠ACB কোণের মান হবে− [13-14]

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

Ans C Solve AC এর ঢাল, $m_1 = \frac{12 - 17}{5 + 7} = \frac{-5}{12}$

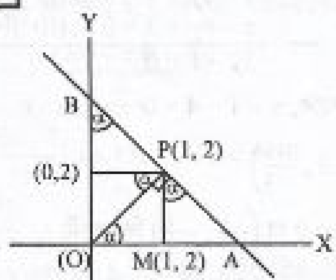
BC এর ঢাল, $m_2 = \frac{5 - 17}{-12 + 7} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$

$\therefore m_1 \times m_2 = -\frac{5}{12} \times \frac{12}{5} = -1 \therefore \angle ACB = \theta = \frac{\pi}{2}$

10. যদি P(1,2) বিন্দুগামী সরল রেখা, যেটি OP এর উপর লম্ব, অক্ষদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $OA^2 + 4OB^2$-এর মান হলো- [12-13]

A. 9 B. 17 C. 21 D. 50 E. 75

Ans D Solve



এখানে $\tan\alpha = 2 \therefore OA = OP \sec\alpha = \sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{1 + 2^2} = 5$

$\therefore OB = OP \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1^2 + 2^2} \times \frac{\sqrt{2^2 + 1}}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore 2OB = 5 \therefore (OA)^2 + (2OB)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$

11. একটি সরল রেখা (1, -2) বিন্দুগামী ও অক্ষদ্বয় হতে সমান অংশে খণ্ডিত করলে রেখাটির ঢাল হলো- [11-12]

A. 45° B. 60° C. 30° D. 135° E. 120°

Ans A Solve অক্ষদ্বয় থেকে সমান অংশে ছেদ করে এমন রেখার ঢাল $\tan\theta = \pm 1 \therefore \theta = 45°$ এবং $135°$

12. মূলবিন্দু হইতে (h, k) বিন্দু দিয়া গমনকারী রেখা সমূহের উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ কোনটি? [10-11]

A. $x^2+y^2-hx-ky = 0$ B. $x^2+y^2-h-2k = 0$ C. $x^2+y^2 = 2h+k$
D. $x^2+y^2-5h-k = 0$ E. $x^2+y^2-4h-7k = 0$

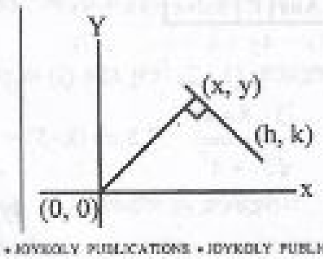
Ans A Solve

নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\frac{y - 0}{x - 0} \times \frac{y - k}{x - h} = -1$$

$\Rightarrow y(y - k) = -x(x - h)$

$\therefore x^2 + y^2 - hx - ky = 0$



13. $5x+4y-3 = 0$ এবং $7y-6x = 5$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $x+y$- রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ কোনটি? [09-10]

A. $11x+11y-8 = 0$ B. $30x-28y+15 = 0$
C. $11x-11y+18 = 0$ D. $59x+59y-12 = 0$
E. $59x-59y+42 = 0$

Ans E Solve $5x + 4y - 3 = 0$ এবং $7y - 6x = 5$ রেখার ম

করে পাই $(x, y) = \left(\frac{1}{59}, \frac{43}{59}\right)$

$x + y - 3 = 0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ

$x - y + k = 0$ যা $\left(\frac{1}{59}, \frac{43}{59}\right)$ বিন্দুগামী

$\therefore k = \frac{43}{59} - \frac{1}{59} = \frac{42}{59}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $x - y + \frac{42}{59} = 0$

$\therefore 59x - 59y + 42 = 0$

14. $4x + 7y = 11$ সরল রেখার উপর লম্ব এবং যাহা y- অক্ষ রেখাকে 2 দূরত্বে ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণটি নির্ণয় কর। [07-08]

A. $3x - 2y + 6 = 0$ B. $5x - 4y \pm 5 = 0$
C. $2x - y + 9 = 0$ D. $3x - 7y + 4 = 0$
E. $7x - 4y \pm 8 = 0$

Ans E Solve প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ

$7x - 4y + k = 0$ যা $(0, \pm 2)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow 7 \times 0 - 4 \times (\pm 2) + k = 0 \Rightarrow k = \pm 8$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $7x - 4y \pm 8 = 0$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা

01. একটি সরলরেখার সমীকরণ বের কর যা (3, 6) বিন্দু দিয়ে গমন করে এবং মূল বিন্দু থেকে যার দূরত্ব 6 একক। [13-14]

A. $4x + 3y - 30 = 0$ B. $4x - 3y - 30 = 0$
C. $3x + 4y - 30 = 0$ D. None

Ans A Solve (3, 6) বিন্দুগামী যেকোন সরলরেখার সমীকরণ

$y - 6 = m(x - 3)$ বা, $mx - y - 3m + 6 = 0$ ——— (i)

যেহেতু মূলবিন্দু থেকে (i) রেখার লম্বদূরত্ব 6 একক সুতরাং

$$\frac{0 - 0 - 3m + 6}{\sqrt{m^2 + 1}} = 6 \Rightarrow \{3(2 - m)\}^2 = 36(m^2 + 1)$$

$\Rightarrow (2 - m)^2 = 4(m^2 + 1) \Rightarrow 4 - 4m + m^2 = 4m^2 + 4$

$\Rightarrow 3m^2 = -4m \therefore m = 0, -\frac{4}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাদ্বয়, $y - 6 = 0$ এবং $y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 3)$

অর্থাৎ $y - 6 = 0$ এবং $4x + 3y - 30 = 0$

02. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = c + 8$ রেখা দুইটি মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী হলে, c এর মান কত? [12-13]

A. 5 B. 10
C. 2.5 D. None

Ans A Solve প্রশ্নমতে,

$$\left|\frac{c}{\sqrt{4^2 + 3^2}}\right| = \left|\frac{c + 8}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\right| \Rightarrow \frac{c}{5} = \pm\frac{c + 8}{13}$$

$\Rightarrow 13c = \pm 5c \pm 40 \Rightarrow c = 5, -\frac{20}{9}$

...অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দুগুলো হতে $3y = 4x - 10$ রেখার উপর ...লম্ব দূরত্ব 4 একক হয়, তবে তাদের স্থানাংক কত? [10-11]

A. (0, 10) এবং (0 –10/3) B. (0, 10) এবং (0, 10/3)
C. (0, –10) এবং (0, 10/3) D. কোনোটিই নয়

Ans C **Solve** ধরি y অক্ষের উপরিস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক = (0, b)

শর্তমতে, $\left|\frac{4.0-3b-10}{\sqrt{16+9}}\right| = 4$

$\Rightarrow b = -10, \frac{10}{3}$

নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় $(0, -10), (0, \frac{10}{3})$

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

...(–4, 6) ও (2, 8) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব-দ্বিখণ্ডক ...রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [14-15]

A. $y = \frac{1}{3}x$ B. $y = 3x$ C. $y = -3x + 4$
D. $x = 3y + 7$ E. None

Ans C **Solve** ধরি, A = (–4, 6)

AB রেখার ঢাল $= \frac{8-6}{2-(-4)} = \frac{1}{3}$

নির্ণেয় লম্বদ্বিখণ্ডক রেখার ঢাল $= -3$

AB রেখার মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{-4+2}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = (-1, 7)$

নির্ণেয় লম্বদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ, $y - 7 = -3(x + 1)$

$\Rightarrow y = -3x + 4$

...(a, b) ও (– a, – b) বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়ে গমনকারী সরল রেখার উপর ...লম্ব ও (–b, a) বিন্দু দিয়ে যায়, এরূপ রেখার সমীকরণ- [13-14]

A. $ax + by + a^2 + b^2 = 0$ B. $ax + by = a^2 + b^2$
C. $ax + by - ab = 0$ D. $ax + by = 0$
E. None

Ans D **Solve** (a, b) এবং (– a, – b) এবং বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ

$\frac{y-b}{b+b} = \frac{x-a}{a+a} \Rightarrow bx - ay = 0$

$bx - ay = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$ax + by + k = 0$ যা (– b, a) বিন্দুগামী

$\therefore a(-b) + b.a + k = 0 \therefore k = 0$

নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $ax + by = 0$

SELF TEST [Written]

01. যদি (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হয়, তবে দেখাও যে, $a + 7b = 0$; $7a - b + 2 = 0$

02. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূল বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং $2x + 3y - 5 = 0$ ও $3x + 2y - 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। **Ans.** $x-y=0$; $x+y=0$

03. $2x + y + 3 = 0$ এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $(2\sqrt{5}+3)x + (\sqrt{5}-4)y + 3\sqrt{5} + 7 = 0$

04. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর মূলবিন্দু হতে যাদের দূরত্ব 7 একক এবং তারা $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব। **Ans.** $4x + 3y \pm 35 = 0$

SELF TEST [MCQ]

01. (3, 2) ও (7, 3) বিন্দুদ্বয় $2x - 5y + 3 = 0$ রেখার কোন পার্শ্বে অবস্থিত?
A. একই পার্শ্বে B. বিপরীত পার্শ্বে C. A ও B উভয়ই D. None

02. $4x-3y+2 = 0$ এবং $8x-6y-9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব–
A. $\frac{169}{99}$ B. $\frac{13}{10}$ C. $\frac{10}{13}$ D. $\frac{69}{13}$

03. (3, 6) বিন্দুগামী এবং মূলবিন্দু হতে 6 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
A. $y - 6 = 0$ B. $4x + 3y - 30 = 0$ C. A ও B উভয়ই D. None

04. $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ–
A. $12x - 5y + 19 = 0$ B. $12x - 5y + 33 = 0$
C. $12x - 5y - 33 = 0$ D. A ও C উভয়ই

05. $x = 5$ এবং x অক্ষের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ–
A. $x - y = 5$ ও $x + y = 6$ B. $x - y = 6$ ও $x + y = 6$
C. $y + x = 5$ ও $y - x = -5$ D. $x - y = 5$; $x + y = 4$

06. অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান কোণ করে এবং (–1, 2) ও (3, 4) বিন্দু হতে সমান দূরত্ব বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ-
A. $x+y = 1$ B. $y-x = 1$ C. $y-x = 2$ D. $y-x+1 = 0$

07. $3x - 4y + 7 = 0$ ও $12x + 5y - 2 = 0$ মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ–
A. $21x + 77y - 101 = 0$ B. $11x + 3y + 20 = 0$
C. $11x - 3y + 9 = 0$ D. $21x + 77y - 101 = 0$

08. $ax + by + c_1 = 0$ ও $kax + kby + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব–
A. $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ B. $\frac{\left|c_1 - \frac{c_2}{k}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
C. $\frac{|c_1 - c_2|}{k|a^2+b^2|}$ D. $\frac{|c_1 - c_2|}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\sqrt{a^2+b^2}}$

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

08.B	07.C	06.C	05.C	04.D	03.C	02.B	01.B

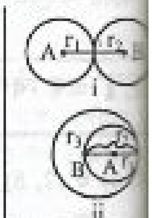
৪র্থ অধ্যায়	বৃত্ত (The Circle)
প্রথম পত্র	

যদি কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ এমন হয় যে তা সর্বদা একটি বিন্দু থেকে সমান দূরত্ব বজায় রাখে তবে সে সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে। এই বইয়ে বৃত্তকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে। A এবং B।

বৃত্ত (A)

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- বৃত্ত: কার্তেসীয় সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চারপথ গঠন করে তাকে বৃত্ত বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের কেন্দ্র (Centre) এবং স্থির দূরত্বটিকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ (radius) বলে।
- সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ: x, y যুক্ত একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণকে নিম্নোক্ত উপায়ে প্রকাশ করা যায়-
  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এই সমীকরণটি বিভিন্ন শর্তে বিভিন্ন রেখা প্রকাশ করে। শর্তগুলো নিম্নরূপ-
  i. $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ হলে জোড়া সরলরেখা।
  ii. $a = b$ এবং $h = 0$ হলে বৃত্ত।
  iii. $ab - h^2 = 0, \Delta \neq 0$ হলে পরাবৃত্ত।
  iv. $ab - h^2 > 0, \Delta \neq 0$ হলে উপবৃত্ত।
  v. $ab - h^2 < 0, \Delta \neq 0$ হলে অধিবৃত্ত।
- বৃত্তের কতিপয় সাধারণ সমীকরণ:
  A. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0), ব্যাসার্ধ = a
  B. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (h, k), ব্যাসার্ধ = r
  C. $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (–g, –f), ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
  D. পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ: $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$
  যেখানে, বৃত্তস্থ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ)
  কেন্দ্র $= \left(\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1}\frac{-f}{-g}\right)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
- বাস্তব বৃত্ত হতে হলে $g^2 + f^2 - c \geq 0$ হতে হবে।
- যদি কোন বৃত্ত মূল বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তবে তার সমীকরণ
  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0 \qquad [c = 0]$
- $g^2 = c = 0$ হলে বৃত্তের কেন্দ্র y অক্ষের উপর থাকবে এবং তা x অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করবে। বৃত্তটির সমীকরণ হবে–
  $x^2 + y^2 + 2fy = 0.$
- $f^2 = c = 0$ হলে বৃত্তের কেন্দ্র x অক্ষের উপর থাকবে এবং তা y অক্ষকে মূল বিন্দুতে স্পর্শ করবে। বৃত্তটির সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 + 2gx = 0.$
- $g^2 = f^2 = c$ হলে বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করবে। বৃত্তটির সমীকরণ হবে
  $x^2 + y^2 \pm 2gx \pm 2gy + g^2 = 0$
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণকে তিনটি বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ করে সমাধান করে g, f এবং c এর মান বের করে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।
- x অক্ষের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের প্রতিবিম্বের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx - 2fy + c = 0$ এবং y অক্ষের সাপেক্ষে উক্ত বৃত্তের প্রতিবিম্ব সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2gx + 2fy + c = 0.$
- (x_1, y_1) বিন্দু $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের
  i. বাইরে হলে $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$
  ii. ভিতরে হলে $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$
  iii. পরিধিতে হলে $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত ও $ax + by + c_1 = 0$ সর... ছেদবিন্দুগামী যেকোন বৃত্তের সমীকরণ-
  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + k(ax + by + c_1) = 0.$
- $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y +$ ... বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ–
  $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 + k(x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2)$ ...
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ কোন বৃত্তের একই ব্যাসের দুটি প্রান্তবিন্দু হ... সমীকরণ- $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$
- দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করলে-
  i. বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে $AB = r_1 + r_2$
  ii. অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে $AB = r_2 - r_1$



- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের-
  i. x অক্ষের ছেদাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$
  ii. y অক্ষের ছেদাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$
  iii. x অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2 = c$
  iv. y অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2 = c$
  v. উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2 = f^2 = c$

এ অধ্যায়ের গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type এ অন্তর্ভুক্ত করা যায়

Type-01

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণের বৈশিষ্ট্য সংক্রান্ত

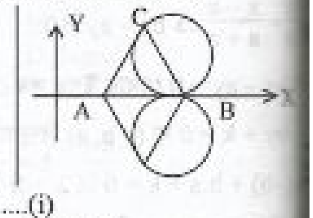
➤ বৃত্তের সমীকরণ x, y এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।
➤ x^2 এবং y^2 এর সহগ সমান।
➤ xy সংবলিত পদের অনুপস্থিতি।

Ex-01 $(x - y + 2)^2 + (2kx + 1)(3y - 2) = 0$ একটি বৃত্তের ... নির্দেশ করলে k = ?

Sol^n: আমরা জানি, বৃত্তে xy সংবলিত কোন পদ থাকে না। তাই এ... সংবলিত পদের সহগ শূন্য হবে।
অর্থাৎ $-2xy + 6kxy = 0$ বা, $k = \frac{1}{3}$

Ex-02 ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজের A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 0) ... BC বাহুকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: ABC সমবাহু ত্রিভুজের A(1, 0)
B(2, 0) এবং C(x, y)



এখন, AB = BC
$\Rightarrow AB^2 = BC^2$
$\Rightarrow 1 = (x - 2)^2 + y^2$
$\therefore x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ ....(i)
আবার, $AB^2 = AC^2 \Rightarrow 1 = (x - 1)^2 + y^2$
$\therefore x^2 + y^2 - 2x = 0$................(ii)

[illegible] হতে, $-2x + 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

[illegible] হতে, $\frac{9}{4} + y^2 - 3 = 0$.

$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ C বিন্দু স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

[illegible] ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ-

$(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right) + (y - 0)\left(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 7x \pm \sqrt{3}\, y + 6 = 0$ **Ans.**

For practice:

[illegible] মান কত হলে $(x - y)^2 + P(x - 3)(y - 2) = 0$ সমীকরণটি একটি [illegible] প্রকাশ করবে। বৃত্তের সমীকরণ ও কেন্দ্র নির্ণয় কর।

Ans. $2, x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0; (2,3)$

[illegible] সমবাহু ত্রিভুজের দুটি শীর্ষবিন্দু (0, 0) ও (6, 0)। অপরটি প্রথম [illegible] অবস্থিত। ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $x^2 + y^2 - 6x - 2\sqrt{3}\, y = 0$

[illegible] সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের প্রান্তবিন্দুদ্বয় (2, 4) ও (0, −2) [illegible] পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

Type-02

বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

[illegible] কেন্দ্র (2, 4) এবং ব্যাসার্ধ 3 হলে বৃত্তের সমীকরণ কত?

[illegible] সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$ **Ans.**

[illegible] একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1, 2), (3, − 4), (5, 6) বিন্দু [illegible] দিয়ে যায়। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[illegible] (1, 2) ও (3, − 4) বিন্দুগামী যে কোন বৃত্তের সমীকরণ-

$(x-1)(x-3) + (y-2)(y+4) = k(6x + 2y - 10)$ .... (i)

(i) নং বৃত্তটি (5, −6) বিন্দুগামী

$k = \frac{(5-1)(5-3) + (-6-2)(-6+4)}{6.5 + 2(-6) - 10} = 3$

[illegible] বৃত্তের সমীকরণ-

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 3(6x + 2y - 10)$

$x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$ **Ans.**

[illegible] (2, 4) এবং (2, -4) বিন্দুদ্বয় যদি কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু হয় [illegible] বৃত্তের সমীকরণ কত?

[illegible] সমীকরণ, $(x-2)(x-2) + (y-4)(y+4) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y - 4y - 16 = 0$

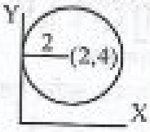
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ **Ans.**

[illegible] (2, 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্ত যদি y-অক্ষকে স্পর্শ করে তবে বৃত্তের [illegible] নির্ণয় কর।

[illegible] যেহেতু বৃত্তটির কেন্দ্র (2, 4) এবং y অক্ষকে স্পর্শ করে তাই বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2

[illegible] বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$ **Ans.**



For practice:

01. (−6, 5), (−3, − 4) ও (2, 1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$.

Type-03

বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় সংক্রান্ত

Ex-01 $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 3 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

Sol^n: বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \times 2x + 2 \times \frac{5}{2} \times y + 3 = 0$ $\therefore$ কেন্দ্র $\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3} = \sqrt{4 + \frac{25}{4} - 3} = \sqrt{\frac{29}{4}}$ **Ans.**

Ex-02 কোন বৃত্তের কেন্দ্র (3, 5) এবং তার একটি ব্যাসের একপ্রান্ত (7, 3) হলে অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক কত?

Sol^n: ধরি, অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)

$\therefore 3 = \frac{x_1 + 7}{2}$ এবং $5 = \frac{y_1 + 3}{2}$ $\Rightarrow x_1 = -1$ $\Rightarrow y_1 = 7$

$\therefore$ অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক (−1, 7) **Ans.**

For practice:

01. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

Ans: (−2, − 3), 6

Type-04

বৃত্ত দ্বারা অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করার শর্ত

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

- বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2 = c$ এবং স্পর্শ বিন্দু (−g, 0)
- বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করলে $f^2 = c$ এবং স্পর্শ বিন্দু (0, −f)
- বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে, কেন্দ্রের ভুজ = কেন্দ্রের কোটি = ব্যাসার্ধ এবং $g^2 = f^2 = c$
- একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে উহার ব্যাসার্ধ = কেন্দ্রের y-এর স্থানাঙ্ক
- একটি বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করলে উহার ব্যাসার্ধ = কেন্দ্রের x-এর স্থানাঙ্ক

Ex-01 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$ বৃত্তটি কোন অক্ষকে স্পর্শ করে? স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

Sol^n: এখানে g = −4 এবং f = 3, c = 16; যেহেতু $g^2 = (-4)^2 = 16 = c$,

অতএব বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

আবার স্পর্শবিন্দু = (−g, 0) = (−(−4), 0) = (4, 0) **Ans.**

Ex-02 একটি বৃত্তের কেন্দ্র (2, 4) এবং এটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত?

Sol^n: যেহেতু বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করেছে, সুতরাং কেন্দ্রের ভুজ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 2 **Ans.**

Ex-03 $3x^2 + 3y^2 + 9x - 12y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে c এর মান কত?

Sol^n: আমরা জানি, বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g^2 = c$

এখানে, $g = \frac{3}{2}$ অতএব $c = g^2 = \frac{9}{4}$ **Ans.**

Ex-04 (1, 8) বিন্দুগামী দুটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

Sol^n: যেহেতু বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে সেহেতু $h = k = a$.

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ ইহা (1, 8) বিন্দুগামী

$\Rightarrow (1-a)^2 + (8-a)^2 = a^2$

$\Rightarrow 1 - 2a + a^2 + 64 - 16a + a^2 = a^2$

$\Rightarrow a^2 - 18a + 65 = 0 \Rightarrow (a-13)(a-5) = 0$

$\therefore a = 13, 5.$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ:

$(x-13)^2 + (y-13)^2 = 13^2 \therefore x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$ এবং

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2 \therefore x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ **Ans.**

Ex-05 একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x+2y-6=0$ সরলরেখা ও x অক্ষের ছেদবিন্দুতে x অক্ষকে স্পর্শ করে।

Sol^n: মনে করি, বৃত্তের সমীকরণ :

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$। ইহা (3, 4) বিন্দুগামী

$\therefore 9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$

$\therefore 6g + 8f + c + 25 = 0$ ....(i)

$3x + 2y - 6 = 0$ সরলরেখাটি x অক্ষের যে বিন্দুতে ছেদ করে উহার কোটি শূন্য হবে। $\therefore$ উক্ত ছেদবিন্দুর স্থানাংক (2,0)

$\therefore$ বৃত্তটি (2, 0) বিন্দুগামী, $\therefore 4g + c + 4 = 0$ ....(ii)

আবার, বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে, উহার কেন্দ্রের কোটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে। $\therefore f = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \therefore g^2 = c$ ....(iii)

$c = g^2$: (ii) নং এর বসিয়ে পাই, $(g+2)^2 = 0 \therefore g = -2.$

$\therefore$ (iii) নং হতে পাই $c = 4$

(i) নং হতে পাই, $-12 + 8f + 4 + 25 = 0 \therefore f = -\frac{17}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ : $x^2 + y^2 - 4x - \frac{17}{4}y + 4 = 0$

$\therefore 4(x^2 + y^2) - 16x - 17y + 16 = 0$ **Ans.**

Ex-06 এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (– 1, 3) এবং যা $3y - 4x + 2 = 0$ রেখা হতে 8 একক দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা খণ্ডিত করে।

Sol^n: C(–1, 3) হতে, AB রেখার উপর লম্ব দূরত্ব:



$\frac{3.3 - 4(-1) + 2}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$

$AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

সমকোণী ত্রিভুজ CAD হতে, $CA^2 = AD^2 + CD^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

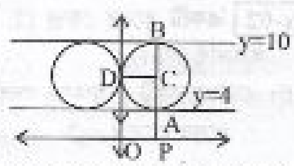
$\therefore CA = 5 \quad \therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ হল 5 একক।

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ : $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

$\therefore x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ **Ans.**

Ex-07 এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y=4, y = 10 এবং x = 0 রেখাকে স্পর্শ করে।

Sol^n: মনে করি, বৃত্তটি y = 4 রেখাকে A বিন্দুতে, y = 10 রেখাকে B বিন্দুতে ও x = 0 অর্থাৎ y অক্ষকে D বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের কেন্দ্র C।



সুতরাং $AB = PB - PA = 10 - 4 = 6$

ব্যাসার্ধ $DC = AC = \frac{6}{2} = 3$ এবং

$PC = AP + AC = 4 + 3 = 7.$ এ ক্ষেত্রে দুটি বৃত্ত পাওয়া যায়। ডান পার্শ্বে অবস্থিত বৃত্তটির কেন্দ্রের ভুজ ধনাত্মক এবং y অক্ষে... অবস্থিত বৃত্তটির কেন্দ্রের ভুজ ঋণাত্মক।

উভয় বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি PC = 7

$\therefore$ সুতরাং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (± 3, 7)

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ: $(x \pm 3)^2 + (y-7)^2 = 3^2$

$\therefore x^2 + y^2 \pm 6x - 14y + 49 = 0$

For practice:

01. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা যোগবোধক অক্ষদ্বয়ের প্রত্যেকটি... হতে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে। **Ans.** $x^2 + y^2 - 10x - 10y$...

02. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে... এবং (–1, 0) বিন্দু দিয়ে যায়। **Ans.** $x^2+y^2+4x-2\sqrt{3}$...

03. একটি বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (–1, 9) বিন্দু দিয়ে... সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 + y^2 - 4x - 10y$...

04. যদি $3x - 2y = 8$ এবং $2x - y = 5$ সরলরেখা দুটি একটি বৃত্তের... বরাবর থাকে এবং বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে। তবে এর সমীকরণ নি... **Ans.** $(x-2)^2 + (y$...

05. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x = 0; y = 0$ এ... সরলরেখাত্রয়কে স্পর্শ করে। **Ans.** $x^2+y^2-ax \pm ay+$...

06. একটি বৃত্ত $x = 0$, $y = 0$ এবং $x + y = 1$ সরলরেখা তিনটিকে স্প... যদি বৃত্তটির কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত হয় তবে দেখাও যে, ... বৃত্ত পাওয়া সম্ভব এবং তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $\left(x - 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = ($...

Type-05

বৃত্ত দ্বারা অক্ষ থেকে কর্তিত অংশ

Ex-01 মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্ত অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক অংশ হতে 3 ও... অংশ কর্তন করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Slo^n: ধরি, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ....(i)

প্রদত্ত বৃত্তটি (0, 0); (3 , 0) ও (0, 5) বিন্দুগামী $\therefore c = 0$

$9 + 6g = 0 \therefore g = -\frac{3}{2} \quad \therefore 25 + 10f = 0 \therefore f = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণঃ $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$

Ex-02 এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x ও y অক্ষরেখা হ... একক দৈর্ঘ্যের সমান অংশ কর্তন করে এবং যার কেন্দ্র $2x - y =$... উপর অবস্থিত।

Sol^n: ধরি বৃত্তের সমীকরণ : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ....(i)

এর কেন্দ্র (–g, –f), $2x - y = 6$ রেখার উপর অবস্থিত

$\therefore -2g + f = 6 \therefore f = 2g + 6.$

x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $2\sqrt{g^2 - c} = 5 \therefore 4g^2 - 4c = 25$ ....

y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $2\sqrt{f^2 - c} = 2 \therefore 4f^2 - 4c = 4$ ....(ii...

$(ii) - (iii) \Rightarrow 4g^2 - 4f^2 = 21$

$\Rightarrow 4g^2 - 4(2g+6)^2 = 21$

$\therefore g = -\frac{5}{2}, \frac{-11}{2} \quad \therefore f = 1, -5 \therefore c = 0, 24$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 5x + 2y = 0$

অথবা $x^2 + y^2 - 11x - 10y + 24 = 0$

... (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y অক্ষ হতে 6 একক দৈর্ঘ্য ... কর্তন করে এরূপ বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

... বৃত্তের সমীকরণ : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

... অক্ষকে স্পর্শ করে বলে $g^2 = c$

$... 2gx + 2fy + g^2 = 0$

... (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$... 8g + g^2 = 0 \Rightarrow (g + 4)^2 = 0$

$... -4 \therefore c = (-4)^2 = 16 \therefore g = -4$ হলে $c = 16$

... বর্তিতাংশ $2\sqrt{f^2 - c} = 6$

$... \Rightarrow f^2 = 9 + 16 \therefore f = \pm 5$

... বৃত্তের সমীকরণ : $x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$. **Ans.**

For practice:

... বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু হতে 1 একক দূরে x অক্ষকে ... বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক।

Ans. $x^2 + y^2 \pm 4\sqrt{6}\, y - 1 = 0$

... কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করে। এর সমীকরণ ও y অক্ষ ... কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

Ans. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0; 2\sqrt{3}$

... বৃত্তের সমীকরণ বের কর যা মূল বিন্দু থেকে '–4' একক দূরত্বে y অক্ষকে ... এবং x অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডন করে।

Ans. $x^2 + y^2 \pm 10x + 8y + 16 = 0$

... বৃত্তের কেন্দ্র $5x - 2y + 1 = 0$ সরলরেখায় অবস্থিত এবং বৃত্তটি x ... '–5' ও '3' ভুজবিশিষ্ট দুটি বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ ও ... ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0; 2\sqrt{5}$ একক।

Type-06

বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান সংক্রান্ত

... (2, 4) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$ বৃত্তের সাপেক্ষে কোথায় অবস্থান করে?

... বৃত্ত, $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$

... (2, 4) বিন্দুতে $2^2 + 4^2 + 4.2 + 8.4 + 4$

$... 16 + 8 + 32 + 4 = 64 > 0$

... বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত। **Ans.**

For practice:

... (1, 3) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$ বৃত্তের সাপেক্ষে কোথায় অবস্থান করে?

Ans. বিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত।

Type-07

দুটি বৃত্তের পরস্পরকে স্পর্শ এবং ছেদ সংক্রান্ত

দুটি বৃত্তের পরস্পরকে স্পর্শ এবং ছেদ করার শর্ত:

... c_1 এবং c_2 কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 এবং r_2 হয় তবে ... দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করবে যদি, $c_1c_2 = r_1 - r_2$ হয়। ... c_1c_2 হল কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব।

... দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করবে যদি, $c_1c_2 = r_1 + r_2$ হয়।

... দুটি পরস্পরকে ছেদ করবে যদি $r_1 - r_2 < c_1c_2 < r_1 + r_2$ হয়।

... দুটি পরস্পরকে ছেদ করবে না যদি $c_1c_2 > r_1 + r_2$ হয়।

Ex-01 $x^2 + y^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ বৃত্তদ্বয় একে অপরকে কিভাবে স্পর্শ করে?

Solⁿ: প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র $c_1 \equiv (0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = 3$

দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $c_2 \equiv (-g, -f) \equiv (3, 4)$ এবং

ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 - 21} = 2$

এখন $c_1c_2 = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5 = 3 + 2 = r_1 + r_2$

$\therefore$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। **Ans.**

Ex-02 যদি $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্ত এবং (3, 4) কেন্দ্র বিশিষ্ট অপর বৃত্ত একে অপরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে তবে দ্বিতীয় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

Solⁿ: এখানে প্রথম বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 3; ধরি ২য় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r. যেহেতু বৃত্তদ্বয় বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তাই কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল

$\Rightarrow \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 3 + r \Rightarrow 5 = 3 + r \Rightarrow r = 2$ **Ans.**

Ex-03 দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$ পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

Solⁿ: $x^2+y^2+2x - 8y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (–1, 4) ও ব্যাসার্ধ 3।

$x^2+y^2+10x-2y + 22 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (–5, 1) ও ব্যাসার্ধ 2।

$\therefore$ কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(-1+5)^2 + (4-1)^2} = 5$

= ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি

$\therefore$ এরা বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। **(Showed)**

এখন কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটি স্পর্শবিন্দুতে তাদের ব্যাসার্ধের অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত হয়। অর্থাৎ (– 1, 4) ও (–5, 1) বিন্দুগামী সরলরেখাকে স্পর্শ বিন্দুটি 3:2 অনুপাতে অন্তস্থভাবে বিভক্ত করে:

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুটি $\left[\dfrac{3\times(-5)+2(-1)}{3+2}, \dfrac{3\times 1+2\times 4}{5}\right] = \left(\dfrac{-17}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$ **Ans.**

For practice:

01. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুটি পরস্পরকে (3, –1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

02. এরূপ দুটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, 4) এবং যা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

Ans. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$; $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$

03. $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{g^2} + \dfrac{1}{f^2} = \dfrac{1}{c}$

Type-08

বৃত্তের প্রতিবিম্ব বিষয়ক সমস্যাবলি

Ex-01 $4x = 6y - 2$ রেখার সাপেক্ষে $3x^2 + 3y^2 + 24y - 57 = 0$ বৃত্তের প্রতিবিম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: প্রথমে বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বের করি এরপর কেন্দ্র থেকে প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ বের করি। এই দুই রেখার ছেদবিন্দুকে মধ্যবিন্দু ধরে অপর প্রান্ত বিন্দু নির্ণয় করি।

$3x^2 + 3y^2 + 6x - 24y - 57 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y - 19 = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র $(-1,4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{12 + (-4)^2 - (-19)} = 6$

$\therefore 4x - 6y + 2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 1 = 0$ .... (i)

এখন (i) নং রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $3x + 2y + k = 0$ যা কেন্দ্র $(-1,4)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 3(-1) + 2.4 + k = 0 \Rightarrow k = -5$

$\therefore 3x + 2y - 5 = 0$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং সমাধান করে $(x,y) = (1,1)$

ধরি, প্রতিবিম্বের কেন্দ্র (α,β)

$\therefore \frac{-1+\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 3$ এবং $\frac{4+\beta}{2} = 1 \Rightarrow \beta = -2$

$\therefore$ প্রতিবিম্বের সমীকরণঃ $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$ **Ans.**

Ex-02 x অক্ষের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ এর প্রতিবিম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $= (2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক। এখন x অক্ষের সাপেক্ষে $(2, 3)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $(2, -3)$।

সুতরাং নির্ণেয় প্রতিবিম্ব বৃত্তের কেন্দ্র $= (2, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক।

সুতরাং প্রতিবিম্ব বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ **Ans.**

For practice:

01. $2x - 3y + 1 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $x^2+y^2+2x-8y-19 = 0$ বৃত্তের প্রতিবিম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$

02. y অক্ষের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ এর প্রতিফলন নির্ণয় কর। **Ans:** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

Type-09

নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

Ex-01 $x + y = 1$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত যা $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$ বৃত্তটি এবং $y = 2x - 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে গমন করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$ বৃত্ত এবং $y - 2x - 3$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 + k(2x - y - 3) = 0$ ... (i)

এই বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(1-k, \frac{k-1}{2}\right)$ যা $x+y=1$ রেখার উপর অবস্থিতঃ

সুতরাং $1 - k + \frac{k-1}{2} = 1$

$\therefore k = -1.$

$k = -1$, (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x^2+y^2 - 2x + y - 3 - 2x + y + 3 = 0$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ **Ans.**

Ex-02 $5\sqrt{2}$ বাহু বিশিষ্ট কোন বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং বিপরীত শীর্ষটি y অক্ষের উপর অবস্থিত। বর্গের একটি কর্ণকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তসমূহ নির্ণয় কর।

Sol^n: পার্শ্বের চিত্রে, OABC বর্গ বলে OAB সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, $OB^2 = OA^2 + AB^2$

$\Rightarrow OB^2 = 50 + 50$

$\therefore OB = \pm 10$



x অক্ষের নিচে OA'B'C' বর্গক্ষেত্র বিবেচনা করলে y অক্ষের উপ[র] স্থানাঙ্ক $(0, 10)$ এবং y অক্ষের নিচে B' বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -10)$ $(0, \pm 10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অং[কি] সমীকরণ–

$(x - 0)(x - 0) + (y - 0)(y \pm 10) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 \pm 10y = 0$

For practice:

01. $4\sqrt{2}$ বাহু বিশিষ্ট বর্গের একটি কৌণিক বিন্দু মূলবিন্দুতে এবং এ[র] কৌণিক বিন্দু x অক্ষের উপর অবস্থিত। বর্গটির একটি কর্ণকে [ব্যাস ধরে] অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2+y^2\pm 8x$

02. OABC একটি বর্গক্ষেত্র এবং এর বাহুর দৈর্ঘ্য b। OA ও OC কে ... প্রমাণ কর যে, বর্গক্ষেত্রের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2 = b(x+y)$.

03. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি $(2, 5)$ ... অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** y + ...

04. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x + 2 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত ... $(-7, 1)$ এবং $(-1, 3)$ বিন্দুগামী। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 + y^2 + 4x + 8y$ ...

05. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম ক[রে] ... বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীক[রণ নির্ণয়] কর। **Ans.** $x^2 + y^2 - 5x - y$ ...

Type-10 : পরামিতিক বৃত্তের সমীকরণ

Ex-01 $x = 3\cos\theta + 1$, $y = 2 + 3\sin\theta$. সমীকরণ কি নির্দেশ ক[রে]? যদি বৃত্ত হয় তবে এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বের কর।

Sol^n: $x = 3\cos\theta + 1$

$\Rightarrow x - 1 = 3\cos\theta$ ---------------- (i)

$y = 3\sin\theta + 2$

$\Rightarrow y - 2 = 3\sin\theta$ ------------ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 3^2$

যা একটি বৃত্তের সমীকরণ। এর কেন্দ্র $(1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 3$ একক

Ex-02 একটি বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $2x = b(\cos\theta - 1)$, $2y = b(\sin\theta$ ... বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ, ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক বের কর।

Sol^n: $2x = b\cos\theta - b$

$\Rightarrow x + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\cos\theta$ ------------ (i)

এবং $2y = b\sin\theta + b$

$\Rightarrow y - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}\sin\theta$ ------------------ (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{b^2}{4}$

$\Rightarrow \left\{x - \left(-\frac{b}{2}\right)\right\}^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$\therefore$ কেন্দ্র $\left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$, ব্যাসার্ধ $= \frac{b}{2}$

Type-11 : বৃত্তের পোলার সমীকরণ সম্পর্কিত

[illegible] যে বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 90°)$ এবং পোল গামী তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[illegible] ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'a'

[illegible] বৃত্তের সমীকরণ, $r^2 + 5^2 - 2r.5\cos(\theta - 90°) = a^2$ ------- (1)

[illegible] (1) নং বৃত্তটি পোল $(0, 0°)$ বিন্দুগামী

$0 + 5^2 - 0 = a^2 \Rightarrow a^2 = 5^2$

[illegible] সমীকরণ, $r^2 + 5^2 - 10r\cos(\theta - 90°) = 5^2$

$r^2 - 10r\sin\theta = 0$ বা, $r - 10\sin\theta = 0$ **Ans.**

[illegible] $r^2 - 4\sqrt{3}r\cos\theta - 4r\sin\theta + 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র, ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[illegible] প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ,

$r^2 - 2r(-2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta) + 15 = 0$ -------- (1)

[illegible] স্থানাঙ্ক বিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ,

$r^2 - 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$

$g = -2\sqrt{3},\ f = -2\ \ c = 15$

[illegible] $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{16 - 15} = 1$

[illegible] $\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{14 + 4} = 4$

[illegible] $\tan^{-1}\left(\frac{-g}{-f}\right) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

[illegible] বৃত্তের কেন্দ্র $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$, ব্যাসার্ধ = 1 একক **Ans.**

SELF TEST: WRITTEN (A)

[illegible] (1.2) ও (3.2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে। [illegible] সমীকরণ নির্ণয় কর।

[illegible] $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$

[illegible] বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(6, 0)$ এবং যা $x^2 + y^2 - 4x -$ [illegible] $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।

[illegible] $- 2y^2 + 8x + 16y + 32 = 0$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের [illegible] নির্ণয় কর।

[illegible] $\sqrt{3}$ বর্গ একক।

SELF TEST: MCQ-01 (A)

[illegible] $- 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ-
A. [illegible] $\frac{\sqrt{13}}{6}$
B. $\left(\frac{5}{6}, 1\right), \frac{\sqrt{13}}{6}$
C. [illegible] $\frac{\sqrt{13}}{6}$
D. $\left(\frac{5}{6}, 1\right) \frac{\sqrt{12}}{6}$

[illegible] $(-2, 3), (2, 7)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ-
A. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 6 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 6 = 0$

[illegible] কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র [illegible] বৃত্তের সমীকরণ-
A. $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 14x + 4y + 28 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 28 = 0$
D. None

[illegible] কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ-
A. $x^2 + y^2 + 4x + 12y - 4 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 4 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 8 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 4 = 0$

05. (2, 3) ও (4, −2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ–
A. $x^2+y^2-6x-2y+2=0$
B. $2x^2+2y^2-12x-2y+4=0$
C. $x^2+y^2-4x+12y+8=0$
D. $x^2+y^2-4x-12y+4=0$

06. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 2 = 0$ বৃত্তে অংকিত ব্যাসের এক প্রান্তের স্থানাংক (1, 1) হলে অপর প্রান্তের স্থানাংক-
A. (−7, −5)
B. (−5, −6)
C. (−5, −7)
D. (−6, −7)

07. $x^2+y^2+6x+2y+8=0$ ও $x^2 + y^2 + 2x+6y+1 = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে-
A. অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে
B. বহিঃস্থভাবের স্পর্শ করে
C. পরস্পর ছেদ করে
D. ছেদ করে না

08. যদি $y = 2x$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ হয় তবে উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ-
A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
B. $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$
C. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
D. $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$

09. c এর কোন মানের জন্য $y = 2x+c$ সরলরেখা $x^2+y^2 = 5$ বৃত্তটিকে ছেদ করবে?
A. $-5 < c < 5$
B. $c < 5$
C. $c < 5$
D. None

10. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$ ও $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করবে যদি-
A. $g_1f = gf_1$
B. $g_1f_1 = gf$
C. $g_1g = f_1f$
D. $g_1f = gf_1$

11. $x^2=k(y-y^2)$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক এবং মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ-
A. $x^2 + y^2 = 0$
B. $x^2 + y^2 - x = 0$
C. $x^2 + y^2 - y = 0$
D. $x^2 + y^2 - 2x = 0$

12. x অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2+2x+2y-1 = 0$ বৃত্তের প্রতিবিম্বের কেন্দ্র কত?
A. (−1, −1)
B. (−1, 0)
C. (−1, 1)
D. (1, 1)

13. $x = 1 + 3\cos\theta$, $y = 2 + 3\sin\theta$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?
A. (1, 1)
B. (1, 2)
C. (−1, −2)
D. (−1, −1)

14. k এর মান কত হলে $(2x - ky)^2 + 8xy + 16x - 20y = 0$ সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে–
A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

15. 154 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ $2x-3y = 5$ এবং $3x - 4y = 7$, বৃত্তের সমীকরণ–
A. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 47$
B. $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 47$
C. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 47$
D. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 47$

16. $y = mx+c$ সরলরেখাটি $x^2+y^2 = r^2$ বৃত্তকে দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করবে যদি,
A. $-r\sqrt{1+m^2} < c < r\sqrt{1+m^2}$
B. $c > -r\sqrt{1+m^2}$
C. $c < r\sqrt{1+m^2}$
D. None

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ
04. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ

Correct Answer

16.A	15.A	14.A	13.B	12.C	11.C	10.A	09.A
08.A	07.C	06.C	05.B	04.B	03.A	02.C	01.B

SELF TEST: MCQ-02 (A)

01. $x^2 + y^2 + 5x + 7y + 9 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 7x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ–

A. $x + y + 18 = 0$ B. $x - y + 9 = 0$
C. $x + y = 0$ D. $x - y = 0$

02. (–1, 2) এবং (3, –4) বিন্দুদ্বয়কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অংকিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?

A. $2\sqrt{13}$ B. $\sqrt{13}$
C. $\sqrt{132}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

03. একটি বৃত্ত (0, 0), (a, 0) এবং (0, b) বিন্দুগামী, বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

A. $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ B. (0, 0)
C. (a, b) D. (b, a)

04. একটি বৃত্তের AB ব্যাসের প্রান্তবিন্দু A(1, 1) এবং B বিন্দু। আবার B বিন্দু $x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ–

A. $x - y = 1$
B. $x + y = 1$
C. $2x + 2y - 5 = 0$
D. $2x - 2y - 5 = 0$

05. (0, –1) ও (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তটি x অক্ষ থেকে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা হবে-

A. 4 B. 2
C. 5 D. 1

06. যে বৃত্তের $\sqrt{2}$ দৈর্ঘ্যের জ্যা কেন্দ্রে $\frac{\pi}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল–

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$
C. π D. 2π

07. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ বৃত্তের সাপেক্ষে (1, 2) বিন্দুর অবস্থান–

A. ভিতরে B. বাহিরে
C. উপরে D. None

08. সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ (–1, 2) এবং ভরকেন্দ্র (1, 1) হলে এর পরিবৃত্তের সমীকরণ–

A. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$
B. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
D. None

09. $y = mx + c$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত–

A. $c = a\sqrt{1+m^2}$
B. $a = \pm c\sqrt{1+m^2}$
C. $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$
D. $c = \pm a(1 + m^2)$

10. $3x^2 + 3y^2 + \lambda xy + 9x + (\lambda - 6)y + 3 = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ–

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{17}$ D. $\frac{5}{4}$

11. $(x - y)^2 + k(x - 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণে k এর মান কত সমীকরণটি একটি বৃত্ত প্রকাশ করবে?

A. 1 B. $\frac{1}{2}$
C. 2 D. 3

12. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, বৃত্তটি x অক্ষকে মূলবিন্দু থেকে 3 একক বিন্দুগুলোতে ছেদ করে। বৃত্তটির কেন্দ্র–

A. (0, ±4) B. (0, ±3)
C. (0, ±5) D. None

13. a এর কোন মানের জন্য $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ এবং $2x^2 + 2y^2 + 4ax + 8y + 3 = 0$ বৃত্তদ্বয় সমকেন্দ্রিক হবে?

A. –1 B. 1
C. 2 D. 3

14. $x^2+y^2-10x+12y+48 = 0$ বৃত্তটি x অক্ষের কি পরিমাণ অংশ খণ্ডিত ক

A. $8\sqrt{13}$ B. $\sqrt{13}$
C. $4\sqrt{13}$ D. খণ্ডিত করে না

15. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ বৃত্তটি কোন অক্ষকে স্পর্শ করে?

A. x অক্ষ B. y অক্ষ
C. উভয় অক্ষকে D. None

16. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ বৃত্তের মূলবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ–

A. $x + 2y = 0$ B. $x + y = 0$
C. $2x + y = 0$ D. $x = y$

17. y অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং মূলবিন্দু ও (2, 3) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীক

A. $x^2 + y^2 + 13y = 0$
B. $3x^2 + 3y^2 - 13y = 0$
C. $x^2 + y^2 + 13x + 3 = 0$
D. $6x^2 + 6y^2 - 13x = 0$

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

17.B	16.C	15.C	14.D	13.A	12.A	11.C	10.A	09.[illegible]
08.C	07.B	06.C	05.A	04.C	03.A	02.B	01.D	

বৃত্ত (B)

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

- দুটি বৃত্ত পরস্পরকে–
  - বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে সাধারণ স্পর্শক থাকবে তিনটি।
  - অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে সাধারণ স্পর্শক থাকবে একটি।
  - স্পর্শ না করে ছেদ করলে সাধারণ স্পর্শক থাকবে দুইটি।
  - বৃত্তদ্বয় ছেদ বা স্পর্শ না করে বাহিরে থাকলে সাধারণ স্পর্শক থাকবে চারটি।
  - একটি বৃত্তের ভেতর আরেকটি বৃত্ত থাকলে কোন সাধারণ স্পর্শক থাকবে না।
- স্পর্শকের সমীকরণঃ $y_1 = mx+c$ সরলরেখাটি $x^2+y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$ এবং স্পর্শবিন্দু $\left(-\frac{ma}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{ma}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

  এবং স্পর্শকের সমীকরণঃ $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$
- $x^2+y^2 = a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = a^2$
- $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $(x-x_1)(x_1-h) + (y-y_1)(y_1-k) = 0$
- $x^2+y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $(x-x_1)(y_1+f) = (y-y_1)(x_1+g)$
- বৃত্তের বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণদ্বয় $(x^2 y^2+2gx - 2fy + c)(x_1^2+ y_1^2+ 2gx_1 - 2fy_1 + c) = (xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1)\ c)^2$
- $ax+by + c = 0$ রেখা যদি $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ বৃত্তের স্পর্শক হয় তবে $\frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = r$ হবে। যদি $\frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} > r$ হয় তবে রেখাটি বৃত্তকে ছেদ করবে না। $\frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} < r$ হয় তবে ছেদ করবে।
- $x^2+y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$
- $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + f_2y + c_2 = 0$ পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 2(g_1-g_2)x + 2(f_1-f_2)y + c_1 - c_2 = 0$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: স্পর্শবিন্দু ও স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

Ex-01 k এর মান কত হলে, $y - 3x - 1 = 0$ সরলরেখা $10x^2 + 10y^2 = k^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে?

Sol^n: $10x^2 + 10y^2 = k^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{\sqrt{10}}\right)^2$ ∴ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 0); ব্যাসার্ধ $= \frac{k}{\sqrt{10}}$

প্রদত্ত রেখা বৃত্তের স্পর্শক হলে $\left|\frac{0-0-1}{\sqrt{1+9}}\right| = \frac{k}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{k}{\sqrt{10}}$ ∴ $k = \pm 1$ **Ans.**

Ex-02 দেখাও যে, $y = mx$ সরলরেখা $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $(g + mf)^2 = c(1 + m^2)$

Sol^n: $y = mx$ প্রদত্ত বৃত্তে বসিয়ে পাই,

$x^2 + m^2x^2 + 2gx + 2mfx + c = 0$

$\therefore (1 + m^2)x^2 + 2(g + mf)x + c = 0$

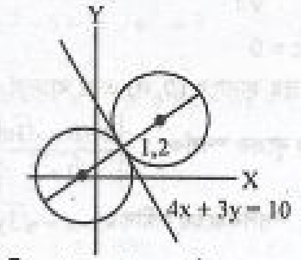
প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হবে যদি এর নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$\therefore 4(g + mf)^2 - 4.(1 + m^2).c = 0$

$\therefore (g + mf)^2 = c(1 + m^2)$ **(Showed)**

Ex-03 দুটি বৃত্তের প্রত্যেকটির ব্যাসার্ধ 5 একক এবং বৃত্ত দুটি পরস্পরকে (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ $4x+3y = 10$ হয় তবে বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ বের কর।

Sol^n:



নির্ণেয় বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ হবে $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ বিন্দুবৃত্ত এবং $4x + 3y - 10 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী।

অর্থাৎ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + k(4x + 3y - 10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (4k-2)x + (3k-4)y + 5 - 10k = 0$

এই বৃত্তের কেন্দ্র $= \left(1-2k, 2-\frac{3k}{2}\right)$

এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(1-2k)^2 + \left(2-\frac{3k}{2}\right)^2 - 5 + 10k}$

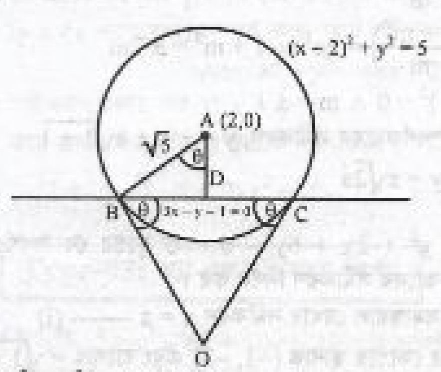
প্রশ্নমতে, $\sqrt{(1-2k)^2 + \left(2-\frac{3k}{2}\right)^2 + 10k - 5} = 5$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{25k^2}{4}} = 5 \Rightarrow \pm\frac{5}{2}k = 5$ ∴ $k = \pm 2$

∴ নির্ণেয় বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণদ্বয় $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ **Ans.**

Ex-04 $3x - y - 1 = 0$ সরলরেখা $(x-2)^2 + y^2 = 5$ বৃত্তকে যে সূক্ষ্মকোণে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

Sol^n:



ধরি, $(x-2)^2 + y^2 = 5$ এবং $3x - y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয় B এবং C। এখন B এবং C বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, $\angle OBC = \angle OCB = \theta$। বৃত্তের কেন্দ্র A = (2,0)

কেন্দ্র A থেকে বাহুর উপর লম্ব দূরত্ব $AD = \left|\frac{6-1}{\sqrt{3^2+1}}\right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

এখন $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \angle ABD = \angle OBC = \angle OCB = \theta$

ΔABD- এ $\cos\theta = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 5$ এবং $3x - y - 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত নির্ণেয় সূক্ষ্মকোণ $\frac{\pi}{4}$ **Ans.**

Ex-05 $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের যে স্পর্শক x অক্ষের সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: x অক্ষের সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করলে সরলরেখার সমীকরণ হবে

$y = mx + c \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + c$

$\therefore x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}c = 0$

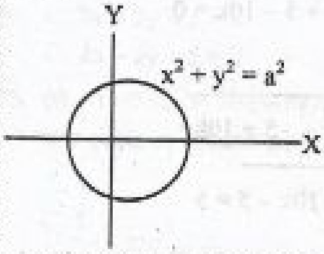
$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ = 4

যেহেতু রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক $\therefore \left|\frac{0 - 0 + \sqrt{3}c}{\sqrt{1+3}}\right| = 4$

$\therefore \sqrt{3}c = \pm 8 \quad \therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $x - \sqrt{3}y \pm 8 = 0$ **Ans.**

Ex-06 $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকটি অক্ষদ্বয়ের সহিত a^2 ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n:



$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শগামী যেকোন সরলরেখার সমীকরণ

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ বা, $\frac{x}{\frac{\pm a\sqrt{1+m^2}}{m}} + \frac{y}{\mp a\sqrt{1+m^2}} = 1$

$\therefore$ শর্তমতে, অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল,

$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\pm a\sqrt{1+m^2}}{m}\right)(\mp a\sqrt{1+m^2})\right| = a^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1+m^2}{m}\right) = \pm a^2 \Rightarrow 1 + m^2 = \pm 2m$

$\Rightarrow (m \pm 1)^2 = 0 \therefore m = \pm 1$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ, $y = \pm x \pm a\sqrt{1+1}$

অর্থাৎ $x \pm y = \pm\sqrt{2}a$ **Ans.**

Ex-07 $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলি y অক্ষের সমান্তরাল, তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ x = a ------- (i)

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (−1, −3) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+9+6} = 4$

(i) নং সরলরেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে, $\left|\frac{-1-a}{\sqrt{1^2+0^2}}\right| = 4$

$\Rightarrow a + 1 = \pm 4 \quad \therefore a = 3$ বা −5

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ, x = 3; x = −5 **Ans.**

Ex-08 $5x^2 + 5y^2 - 11x - 9y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর (−1, 1) ... স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $5x^2 + 5y^2 - 11x - 9y - 12 = 0$

$x^2 + y^2 - \frac{11}{5}x - \frac{9}{5}y - \frac{12}{5} = 0$

বৃত্তের (−1, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ—

$x(-1) + y.1 - \frac{11}{10}(x-1) - \frac{9}{10}(y+1) - \frac{12}{5} = 0$

$\Rightarrow -10x + 10y - 11x + 11 - 9y - 9 - 24 = 0$

$\therefore 21x - y + 22 = 0$

Ex-09 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$ বৃত্তের (−2, 1) বিন্দুতে অ... সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (2, 3)

(2, 3) ও (−2, 1) বিন্দুগামী সরলরেখাই অভিলম্বের সমীকরণ।

$\frac{x-2}{2+2} = \frac{y-3}{3-1} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = y - 3$

$\Rightarrow x - 2 = 2y - 6 \therefore x - 2y + 4 = 0$

Ex-10 (1, −1) বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তে ... দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ:

$2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

(1, −1) বিন্দু হতে প্রদত্ত বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-1) + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

For practice:

01. দেখাও যে, $lx + my = 1$ সরলরেখা $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্ত... করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়।

02. $lx + my + n = 0$ সরলরেখা $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শ... কর এবং স্পর্শ বিন্দুগুলো নির্ণয় কর।
Ans. $a^2(l^2 + m^2) = n^2$; $\left(-\frac{a^2l}{n}, \ldots\right.$

03. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ বৃত্তের যে স্পর্শক দুটি $(3x + 4y - 10) + k(3x - y - 5) = 0$ এই রেখাগুচ্ছের অন্তর্ভুক্ত তাদের সমীকরণ নির্ণয় ক...
Ans. $2x + y - 5 = 0$ x − ...

04. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষে... $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে। **Ans.** 5y=2x±...

05. মূলবিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শ... সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** x−2y = 0 x+2...

06. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্ন... সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. x + y − 8 = 0; x + y + ...

07. $9x^2 + 9y^2 = 16$ বৃত্তের x = y রেখার সমান্তরাল স্পর্শকগুলির স... নির্ণয় কর। **Ans.** $3x - 3y \pm 4\sqrt{2}$...

08. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক 3x − 4y + ... রেখার উপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. 4x + 3y − 25 = 0; 4x + 3y + ...

... বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 30$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের ... নির্ণয় কর।

Ans. $x+y = 8; x-7y+48 = 0$

... বিন্দুতে $(x + 5)^2 + y^2 = 25$ বৃত্তটির অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় ...

Ans. $4x - 3y + 20 = 0$

... $x + 2y = 17$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ বৃত্তের একটি ... এবং এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় ...

Ans. $2x - y + 1 = 0$

... বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 = 3$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Ans. $\frac{1}{2}\sqrt{46}$

... $3x - 8y + 2 = 0$ সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু হতে ... $-4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 12 = 0$ বৃত্তের ... অংকিত স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।

... $= 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে, দেখাও যে, (p, q) ... একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

... $= k$ সরলরেখাটি যে শর্তে $x^2 + y^2 = 6y$ বৃত্তটিকে স্পর্শ করবে তা ...

Ans. $k = 6$ অথবা, -24

... $- 8x - 10y = 8$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক, $5x - 12y - 9 = 0$ রেখার ... হলে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $5x - 12y + 131 = 0; 5x - 12y = 51$

Type-02: বিভিন্ন শর্তে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

... $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ ... সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

... $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ --------------- (i)

$x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ -------------- (ii)

... (i) হতে (ii) বিয়োগ করে সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ পাই, $2x + 1 = 0$

... (iii) নং এর ছেদবিন্দু দিয়ে গমনকারী কোন বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 + k(2x + 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(k + 1)x + 3y + k + 1 = 0$ ---------- (iv)

... জ্যাটি নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাস হবে যদি এর কেন্দ্র $\left((-k - 1), -\frac{3}{2}\right)$ উক্ত ... এর উপর থাকে।

$2(-k-1) + 1 = 0 \therefore k = -\frac{1}{2}$

... নং এ $k = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ পাই,

$2(x^2 + y^2) + 2x + 6y + 1 = 0$ **Ans.**

... $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x + y + 1 = 0$ ... স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x অক্ষরেখার উপর অবস্থিত।

... ধরি, বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র (a, 0)

... $\left|\frac{a+0+1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow a + 1 = \pm 2 \therefore a = 1, -3$

... বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ, $(x - 1)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$ এবং $(x + 3)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$

$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 6x + 7 = 0$ **Ans.**

... $2x - 3y + 6 = 0$ রেখাকে (3, 4) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (−1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: (3, 4) বিন্দুকে কেন্দ্র ধরে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 0$ ------------- (i)

(i) নং বৃত্ত ও $2x - 3y + 6 = 0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + k(2x - 3y + 6) = 0$ ইহা (−1, 2) বিন্দুগামী

$\therefore 16 + 4 + k(-2 - 6 + 6) = 0 \Rightarrow -2k = -20 \therefore k = 10$

$k = 10$ বসিয়ে পাই, $(x-3)^2 + (y - 4)^2 + 10(2x - 3y + 6) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 14x - 38y + 85 = 0$ **Ans.**

Ex-04 (−2, −3) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের উপর (1, −1) বিন্দু হতে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 3 একক। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি বৃত্তের সমীকরণ, $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = a^2$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - a^2 = 0$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{1+1+4-6+13-a^2} = 3$

$\Rightarrow 13 - a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 4 \therefore a = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - 4 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ **Ans.**

For practice:

01. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$

02. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট যে বৃত্তটি $x^2 + y^2 = 2ax$ এবং $x^2 + y^2 = 2by$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x^2 + y^2 - 3ax + by = 0$

03. b ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার কেন্দ্রের ভুজ ও কোটি উভয়ে ধনাত্মক, x অক্ষ এবং $3y = 4x$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x^2+y^2-4bx-2by+4b^2 = 0$

04. (3, −1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত বৃত্তটি x অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2+y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

05. (3, −1) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + y = 10$ রেখাকে (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 + y^2 = 10$

06. মূলবিন্দু হতে (1, 2) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

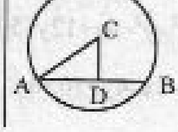
07. b ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার কেন্দ্রের ভুজ ও কোটি উভয়ে ধনাত্মক, x অক্ষ এবং $3y = 4x$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে; তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x^2 + y^2 - 4bx - 2by + 4b^2 = 0$

08. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + y = 2$ ও $x - y = 2$ সরলরেখা দুটিকে স্পর্শ করে এবং $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।
Ans. $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 1 = 0; x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$

Type-03: জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয়

Ex-01 (1, −2) বিন্দুটি $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু। জ্যাটির দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র C(3, −5) এবং AB এর মধ্যবিন্দু (1, −2)।



$\therefore$ CD রেখার ঢাল $= \frac{-5+2}{3-1} = \frac{-3}{2}$

$\therefore AB \perp CD$ হওয়ায় AB রেখার ঢাল $= \frac{2}{3}$

$\therefore$ AB জ্যা এর সমীকরণ $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$

$\therefore 2x - 3y = 8$

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55}$

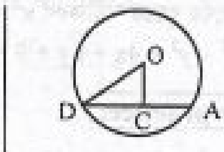
$\therefore CD = \sqrt{(3-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{13}$

$\therefore AD = \sqrt{CA^2 - CD^2} = \sqrt{55-13} = \sqrt{42}$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{42}$ **Ans.**

Ex-02 $y = mx$ রেখাটির যে অংশ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা খণ্ডিত হয়ে যে জ্যা এর সৃষ্টি হয় দেখাও যে তার দৈর্ঘ্য, $2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{1+m^2}}$ ।

Sol^n: বৃত্তের কেন্দ্র 0(0, 0) এবং ব্যাসার্ধ OD = a



DC রেখার সমীকরণ $y = mx + c$

$\therefore \quad mx - y + c = 0$

OC রেখাটি O বিন্দু হতে $y = mx + c$ রেখার উপর লম্ব

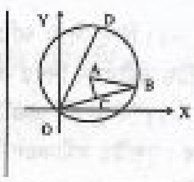
$\therefore OC = \left|\frac{m.0 - 0 + c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$

$\therefore$ জ্যা এর দৈর্ঘ্য = DA = 2DC

$= 2\sqrt{OD^2 - OC^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{1+m^2}} = 2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{1+m^2}}$ **(Showed)**

Ex-03 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ বৃত্তটির $\sqrt{2}$ একক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট মূলবিন্দুগামী জ্যা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: বৃত্তটির কেন্দ্র (1, 0); ব্যাসার্ধ = 1



চিত্রানুযায়ী OD ও OB জ্যাদ্বয়

কেন্দ্র A(1, 0), ব্যাসার্ধ AB = 1 একক,

$OB = \sqrt{2}$ একক।

$\therefore CB = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ একক।

মনে করি, মূলবিন্দুগামী জ্যা এর সমীকরণ $y = mx \Rightarrow mx - y = 0$

$\therefore AC = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$

এখন, $AC^2 = AB^2 - BC^2$

$\Rightarrow \left(\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \therefore m = \pm 1$

$\therefore$ উক্ত বিন্দুগামী জ্যাদ্বয়ের সমীকরণ হবে $y = \pm x$ **Ans.**

Ex-04 $x^2 + y^2 - 12x + 16y - 69 = 0$ এবং $x^2 - y^2 - 9x + 12y - 59 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol^n: সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$(x^2 - y^2 - 9x + 12y - 59) - (x^2 + y^2 - 12x + 16y - 69) = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y + 10 = 0 \quad \therefore x = \frac{4y-10}{3}$

প্রথম বৃত্তের সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$\left(\frac{4y-10}{3}\right)^2 + y^2 - 12\left(\frac{4y-10}{3}\right) + 16y - 69 = 0$

$\Rightarrow 25y^2 - 80y - 161 = 0$

$\Rightarrow (5y - 23)(5y + 7) = 0$

$\therefore y = \frac{23}{5}$ বা $-\frac{7}{5}$

$\therefore y = \frac{23}{5}$ হলে, $x = \frac{\frac{92}{5} - 10}{3} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5}$

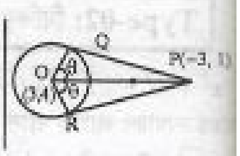
$\therefore y = \frac{-7}{5}$ হলে, $x = \frac{-\frac{28}{5} - 10}{3} = \frac{-78}{15} = -\frac{26}{5}$

$\therefore$ সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{\left(\frac{14}{5} + \frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{23}{5} + \frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{64+36} = 10$ একক

Ex-05 নির্দিষ্ট বিন্দু P(−3, 1) হতে $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16$ … অংকিত PQ ও PR স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু Q ও R. PQ এর … কর। যদি QR জ্যাটি উক্ত বৃত্তের কেন্দ্রে 2θ কোণ তৈরি করে … যে, $\tan\theta = 2$

Sol^n: ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক (3, 4) এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{9+16-16} = 3 = OR = OQ.$



এখন, OQ রেখাটি PQ এর উপর লম্ব

$\Rightarrow OP = \sqrt{(3+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$

এখন, $OP^2 = PQ^2 + OQ^2$

$\therefore 45 = PQ^2 + 9 \therefore PQ = 6 = PR$ **Ans.**

$\therefore$ PO রেখা, ∠QOR কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

সুতরাং, $\angle POQ = \theta \quad \therefore \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{6}{3} = 2$ (Sh…

For practice:

01. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর, যা … বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। **Ans.** $2x - 3y$ …

02. $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$ বৃত্তটির যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু মূলবি… অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $3x - 4y = 0$

03. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ … সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x^2 + y^2 + x + 3y$ …

04. Δ ABC-এর তিনটি শীর্ষবিন্দু A(5,3), B(2,0) এবং C(9, −1) … ভরকেন্দ্র G, পরিকেন্দ্র O, অন্তঃকেন্দ্র, I এবং লম্ববিন্দু P হয় তবে …
(a) OG = ? (b) OI = ? (c) OP = ? (d) GI = …
(e) GP = ? (f) PI = ?
Ans : (a) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$, (b) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (e) …

ΔABC-এর শীর্ষবিন্দুত্রয় A(1,12), B(5,0) এবং C(− 4, − 3) । যদি ∠A-এর সাপেক্ষে বহিঃকেন্দ্র I_A, ∠B-এর সাপেক্ষে বহিঃকেন্দ্র I_B, ∠C-এর সাপেক্ষে বহিঃকেন্দ্র I_C হয় তবে,

(a) I_AI_B = ? (b) I_BI_C = ? (c) I_CI_A = ?

(d) $I_AI_BI_C$- এর পরিবৃত্তের সমীকরণ (e) লম্বকেন্দ্রের স্থানাংকে বের কর।

Ans: (a) $20\sqrt{2}$ (b) 30 (c) $10\sqrt{5}$ (d) $x^2 + y^2 + 8x - 14y - 185 = 0$ (e) (1,12)

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 13 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ বের কর। [Ans: 45°]

P(x,y) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক PA এবং PB টানা হল। যদি $\angle APB = \frac{\pi}{3}$ হয় তবে p বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বের কর। [Ans : $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$]

দেখাও যে, $(x - 2)\cos\theta + (y - 2)\sin\theta = 1$ রেখা, θ-এর সকল মানের জন্য একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে। উক্ত বৃত্তের সমীকরণ বের কর।

[Ans: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$]

দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2x = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শকসমূহ সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

এমন বৃত্তের সমীকরণ বের কর যা $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 7x - 9y + 29 = 0$ বৃত্তত্রয়কে লম্বভাবে ছেদ করে। [Ans: $x^2 + y^2 + 6x - 18y - 4 = 0$]

যদি $x^2 + y^2 + (3 + \sin\theta)x - 2\cos\varphi y = 0$ এবং $x^2 + y^2 + (2\cos\varphi)x + 2\lambda y = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে তবে λ-এর সর্বোচ্চ মান বের কর। [Ans: λ = 1]

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ বৃত্তের উপর এমন বিন্দু P(x,y) বের কর যেন (i) ∠POX সর্বোচ্চ (ii) ∠POX সর্বনিম্ন হয় যেখানে O = মুলবিন্দু এবং OX = X-অক্ষ। $\left[\text{Ans : (i)} \left(2 + \frac{4}{\sqrt{13}}, 3 + \frac{6}{\sqrt{13}}\right) \text{(ii)} \left(\frac{36}{13}, \frac{15}{13}\right)\right]$

দেখাও যে, (1, 0), (2,−7), (8, 1) এবং (9, −16) বিন্দু চারটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থান করবে।

(2, −7) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 14x - 10y - 151 = 0$ বৃত্তের সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ দূরত্ব বের কর। [Ans : 2, 28]

(−5, 6) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ বৃত্তের নিকটতম এবং দূরবর্তী বিন্দুদ্বয় নির্ণয় কর। [Ans: (−2, 2), (4, −6)]

দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ বৃত্তটি A(−3, 6), B(−8, −2), C(7, −1) ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত।

একটি কারখানার দুইটি মডেলের পণ্য উৎপাদন সংখ্যা x এবং y এবং তাদের সম্পর্ক $x^2 + y^2 + 14x + 240y = 5151$ হলে x এবং y-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। [Ans : $x_{max} = 65.11$, $y_{max} = 19.82$]

Δ OAB-এর অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$, যেখানে OA, X-অক্ষ এবং OB, Y-অক্ষ বরাবর। দেখাও যে, Δ OAB-এর পরিবৃত্তের সঞ্চারপথের সমীকরণ, $2a(x + y) - 2xy - a^2 = 0$

$3x - 4y + 39 = 0$ সরলরেখার কোন বিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ বৃত্তের দূরত্ব সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ হবে? ঐ বিন্দু হতে উক্ত বৃত্তের নিকটতম এবং দূরবর্তী বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক এবং সর্বনিম্ন,সর্বোচ্চ দূরত্বও বের কর।

[Ans: (− 5, 6) , (− 2, 2), (4, − 6) , 5, 15]

y = 4 সরলরেখার উপর P একটি চলমান বিন্দু। P বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে স্পর্শ করে। Q বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বের কর যদি PAQB একটি সামন্তরিক গঠন করে। [Ans: $(x^2 + y^2)(y + 4) = 2y^2$]

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. A(5,3), B(−2,0) এবং C(1,1) বিন্দু তিনটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হলে বৃত্তের কেন্দ্র ও ত্রিভুজ ABC এর ভরকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [17-18]

Solⁿ ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং কেন্দ্রের স্থানাংক (x,y)

$\therefore R = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$

$= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ .... (i)

$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 34 = x^2 + y^2 + 4x + 4$

$= x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

$\Rightarrow -10x - 6y + 34 = 4x + 4 = -2x - 2y + 2$

$\Rightarrow 5x + 3y - 17 = -2x - 2 = x + y - 1$

$\Rightarrow 5x + 3y - 15 = -2x = x + y + 1$

$\Rightarrow \frac{5x + 3y - 15}{-2} = \frac{x}{1} = \frac{x + y + 1}{-2}$

$\Rightarrow \frac{5x + 3y - 15 - 5x}{-2 - 5} = \frac{x}{1} = \frac{x + y + 1 - x}{-2 - 1}$

$\Rightarrow \frac{3y - 15}{-7} = \frac{x}{1} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{3y - 15 - (3y + 3)}{-7 + 9}$

$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{-18}{2} = -9 \quad \therefore x = -9, y = 26$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র = (− 9, 26)

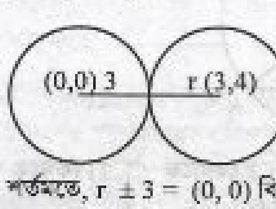
$\therefore$ আবার ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাংক $= \left(\frac{5 - 2 + 1}{3}, \frac{3 + 0 + 1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

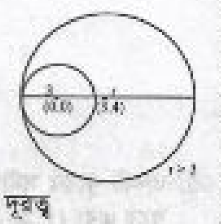
$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের দূরত্ব $= \sqrt{\left(-9 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(26 - \frac{4}{3}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{6437}}{3}$ একক **Ans.**

02. এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির কেন্দ্র (3,4) এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। [17-18]

Solⁿ ধরি বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ = r একক





শর্তমতে, r ± 3 = (0, 0) বিন্দু থেকে (3, 4) বিন্দুর দূরত্ব

$\Rightarrow r + 3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\therefore$ r = 2 যখন নির্ণেয় বৃত্তটি $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থ ভাবে স্পর্শ করে।

এবং r = 8 যখন নির্ণেয় বৃত্তটি $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে এবং r > 3।

$\therefore$ নির্ণেয় দুটি বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$

এবং $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8^2$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

এবং $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$ **Ans.**

03. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে $x + y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত। [16-17]

Solve ধরি বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .... (i)

x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g^2 = c$

কেন্দ্র $(-g, -f)$, $x + y = 3$ রেখার উপর,

$\therefore -g - f = 3 \Rightarrow f = -g - 3$ .... (ii)

(i) নং বৃত্তটি (1,1) বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore 1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$

$\Rightarrow 2 + 2g + 2(-g - 3) + g^2 = 0$

$\Rightarrow g^2 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow g^2 = 4 \Rightarrow g = \pm 2$

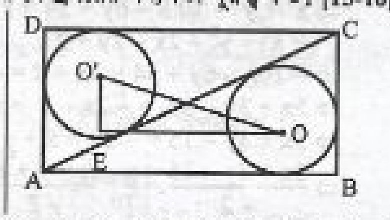
কিন্তু কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, সুতরাং $g = -2$ গ্রহণযোগ্য।

$\therefore f = -1 ; c = g^2 = 4$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ **Ans.**

04. 12 একক দৈর্ঘ্য ও 5 একক প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের একটি কর্ণের দুই পাশে দুটি বৃত্ত রাখলে তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? [15-16]

Solve



দেওয়া আছে, AB = 12 এবং AD = 5।

ধরি বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ r

$\therefore AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

$OE = AB - 2r = c - 2 \times (s - b) = c - (a + b + c) + 2b = b - a$

$O'E = AD - 2r = a - 2(s - b) = a - (a + b + c) + 2b = b - c$

$\therefore OO' = \sqrt{(b-a)^2 + (b-c)^2} = \sqrt{(13-5)^2 + (13-12)^2} = \sqrt{65}$

$\therefore$ কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব $\sqrt{65}$ একক **Ans.**

05. C কেন্দ্র বিশিষ্ট $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। x অক্ষের খণ্ডিতাংশে AB এবং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [14-15]

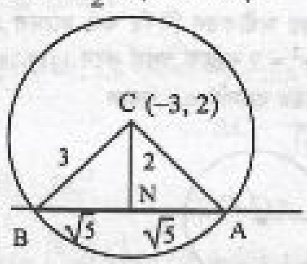
Solve $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, 2)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9 + 4 - 4} = 3$

আবার, $AB = 2\sqrt{3^2 - 4} = 2\sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5}$

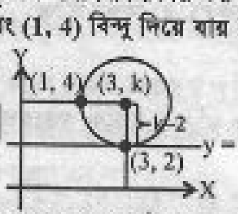
$CN = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} . 2\sqrt{5} . 2 = 2\sqrt{5}$ **Ans.**



06. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y = 2 রেখাকে (3, 2) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (1, 4) বিন্দু দিয়ে যায়। [13-14]

Solve



চিত্র থেকে দেখা যায় বৃত্তটির কেন্দ্রের x স্থানাঙ্ক 3, ধরি y স্থানাঙ্ক k

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $(k - 2)$

$\therefore (x - 3)^2 + (y - k)^2 = (k - 2)^2$

বৃত্তটি (1, 4) বিন্দু দিয়ে যায়

$\therefore (1 - 3)^2 + (4 - k)^2 = (k - 2)^2$

$\Rightarrow 4 + 16 - 8k + k^2 = k^2 - 4k + 4$

$\Rightarrow 4k = 16 \therefore k = 4$

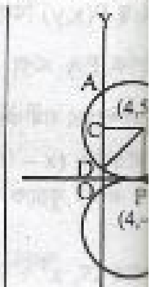
$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র (3, 4) ও ব্যাসার্ধ $(k - 2) = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

07. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x- অক্ষকে (4,0) বিন্দুতে স্পর্শ ক… y-অক্ষ হতে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে। [11-12; KUET : 0…

Solve চিত্র থেকে অংকেটা সমাধান করা সহজ।



$\therefore$ লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাই, $BC \perp AD$

চিত্রে পাই, $CD = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3$

ΔCDB এবং $BC = 4, CD = 3$

$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2$

$\Rightarrow BD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 =$ ব্যাসার্ধ

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4, \pm 5)$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $(x - 4)^2 + (y \pm 5)^2 = 5^2$

08. $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তে অংকিত ব্যাস মূল বিন্দু দিয়ে… করে। এ ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং মূল বিন্দুতে… স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [09-10; KUET:04-05; CUET:…

Solve $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - b(5x - 12y) = 0$ .... (i)

(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র $= \left(\frac{5b}{2}, -6b\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ, $\frac{x}{\frac{5b}{2}} = \frac{y}{-6b}$

$\Rightarrow 12x + 5y = 0$ .... (ii)

(ii) নং রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$5x - 12y = 0$

09. k এর মান কত হলে $3x + 4y + k = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$… স্পর্শ করবে? [09-10;CUET:03-04]

Solve প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র = (5, 0) $\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{5^2 + 0} =$…

প্রশ্নমতে, $\frac{|3 \times 5 + 4 \times 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

$\Rightarrow |15 + k| = 25 \Rightarrow k = 10, -40$

10. একটি বৃত্ত y অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (3, –4) বি… অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [07-08; RUET: 1…

Solve ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

যেহেতু, (0, 0) বিন্দুগামী তাই $c = 0$

y অক্ষকে স্পর্শ করে তাই $f^2 = c = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হবে, $x^2 + y^2 + 2gx = 0$

বৃত্তটি (3, –4) বিন্দুগামী $\therefore 9 + 16 + 2g \times 3 = 0 \therefore g = -\frac{25}{6}$

$\therefore$ বৃত্তটি, $x^2 + y^2 + 2 . \frac{-25}{6} x = 0$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 25x = 0$

[illegible] বিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। ইহার সমীকরণ ও [illegible] ইহা কি পরিমাণ অংশে ছেদ করে, তাহা নির্ণয় কর। [02-03]

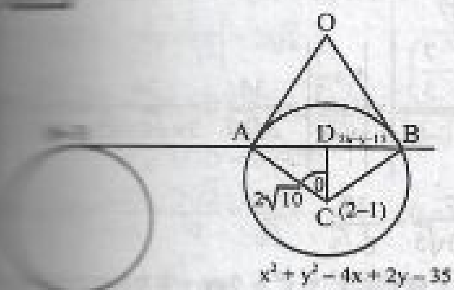
[illegible] বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্রের কোটি = 2

[illegible] বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-4y+1=0$

[illegible] থেকে ছেদিত অংশ $= 2\sqrt{f^2-c} = 2\sqrt{2^2-1} = 2\sqrt{3}$ **Ans.**

[illegible] $=45$ বৃত্তের (6, -3) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক [illegible] $-4x+2y-35=0$ বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও [illegible] B বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব। [00-01; RUET : 11-12]



[illegible] বিন্দুতে $x^2+y^2=45$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $6x-3y=45$ [illegible] $-y-15=0$।

[illegible] $x^2+y^2-4x+2y-35=0$ বৃত্তকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ [illegible] A এবং B বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

[illegible] $= \theta$ যেখানে $CD \perp AB$।

[illegible] $= \angle OBA = \angle DCB = \theta$

[illegible] $CD = \left|\frac{4+1-15}{\sqrt{2^2+1}}\right| = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

[illegible] $\cos\theta = \frac{CD}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

[illegible] $= \angle OBA = \frac{\pi}{4} \therefore \angle AOB = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

[illegible] A এবং B বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর লম্ব। (Showed)

[illegible] বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত একটি বৃত্ত x অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ [illegible] বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [99-00]

[illegible] ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-h)^2+(y-k)^2=k^2$ যা (2,0) এবং (3,–1) বিন্দুগামী

$(2-h)^2+k^2=k^2 \Rightarrow h=2$

[illegible] $(3-2)^2+(-1-k)^2=k^2$

$\Rightarrow (3-2)^2+1+2k+k^2=k^2 \Rightarrow k=-1$

[illegible] বৃত্তের সমীকরণ $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ **Ans.**

[illegible] একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূল বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, $3y+x=20$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যার একটি ব্যাসের সমীকরণ [illegible] [97-98]

[illegible] ব্যাসের সমীকরণ $y=3x$ ∴ ঢাল, $m_1=3$

[illegible] সমীকরণ $3y+x=20$; ঢাল, $m_2=-\frac{1}{3}$

$m_1 \times m_2 = -1$

[illegible] $3y+x=20$

[illegible] $+x=20 \therefore x=2 \therefore y=6$

$x' = \frac{2+0}{2} = 1, y' = \frac{6+0}{2} = 3$

কেন্দ্র = (1, 3) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2+(y-3)^2=10$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $x^2+y^2-4x-6y+c=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে c এর মান এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। [03-04]

Solve x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $2\sqrt{g^2-c}=0 \Rightarrow g^2=c$

এখানে $g=-\frac{4}{-2}=2$

$\therefore c=4$ ∴ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2-4x-6y+4=0$

x অক্ষকে স্পর্শ করলে, $y=0$

$\therefore x^2-4x+4=0 \therefore (x-2)^2=0 \therefore x=2$

∴ স্পর্শ বিন্দু (2, 0) **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1,8) বিন্দু দিয়ে গমন করে। [08-09]

Solve $(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$ যা (1, 8) বিন্দুগামী

$\therefore (1-h)^2+(8-h)^2=h^2 \therefore h=13, 5$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-13)^2+(y-13)^2=13^2$

এবং $(y-5)^2+(x-5)^2=5^2$ **Ans.**

02. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের এমন দুটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর যারা পরস্পর লম্ব। [04-05]

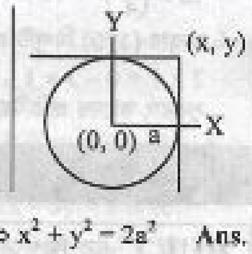
Solve বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$y=mx \pm a\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow (y-mx)^2=(a\sqrt{1+m^2})^2$

$\Rightarrow y^2-2mxy+m^2x^2=a^2(1+m^2)$

$\Rightarrow m^2(x^2-a^2)-2mxy+(y^2-a^2)=0$



শর্তমতে, $m_1m_2=-1 \Rightarrow \frac{y^2-a^2}{x^2-a^2}=-1 \Rightarrow x^2+y^2=2a^2$ **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. বৃত্ত $x^2+y^2+4x-8y+2=0$ এর স্পর্শকগুলির সমীকরণ বের কর যারা অক্ষদ্বয়কে সমান ও বিপরীত চিহ্নে খণ্ডিত করে। [09-10]

Solve ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ $x-y=a$

$\Rightarrow x-y-a=0$ ....(i)

বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক = (–2, 4)

এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4+16-2} = \sqrt{18}$

শর্তানুসারে, $\frac{|-2-4-a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \Rightarrow \frac{(6+a)^2}{2} = 18$

$\Rightarrow 36+12a+a^2=36 \Rightarrow a=-12, 0$

∴ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ, $x-y=0$ ∴ $x-y+12=0$ **Ans.**

02. y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (3, 0) ও (7, 0) বিন্দুদ্বয় দিয়ে গমনকারী বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [07-08]

Solve যেহেতু y অক্ষকে স্পর্শ করে, $\therefore (x-h)^2+(y-k)^2=h^2$

(i) নং বৃত্তটি (3,0) এবং (7,0) বিন্দুগামী

$\therefore (3-h)^2+(0-k)^2=h^2 \Rightarrow 9-6h+h^2+k^2=h^2$....(i)

এবং $(7-h)^2+(0-k)^2=h^2 \Rightarrow 49-14h+h^2+k^2=h^2$....(ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow 49-14h+(6h-9)=0$

$\Rightarrow 49-8h-9=0 \Rightarrow h=5 \therefore k^2-6\times5+9=0$

$\Rightarrow k^2=21 \therefore k=\pm\sqrt{21}$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-5)^2+(y\pm\sqrt{21})^2=25$ **Ans.**

03. r এর মান কত হলে r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট শুধু একটিই বৃত্ত পাওয়া যাবে যা (6,7) ও (12,13) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [06-07]

Solve যেহেতু বৃত্তটি প্রদত্ত বিন্দু দিয়ে যায় সেহেতু বিন্দুদ্বয় একটি ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু হবে।

$\therefore$ ব্যাস $= \sqrt{(6-12)^2+(7-13)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\therefore r =$ ব্যাসার্ধ $= \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ **Ans.**

04. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4, 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। [04-05]

Solve প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $= (-2,3)$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-4)^2+(y-5)^2=r^2$

যা $(-2, 3)$ বিন্দুগামী। $\therefore (-2-4)^2+(3-5)^2=r^2$

$\Rightarrow r^2 = 6^2+2^2 = 40$ $\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-4)^2+(y-5)^2=40$

$\Rightarrow x^2+y^2-8x-10y+1=0$ **Ans.**

05. $2x^2+2y^2-3x-4y+1=0$ এবং $16x^2+16y^2-32x-1=0$ দুটি বৃত্ত। দেখাও যে, তাদের প্রতিটির কেন্দ্র অপরটির পরিধির উপর অবস্থিত। [03-04, 08-09]

Solve প্রথম বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

২য় বৃত্তটির কেন্দ্র (1, 0) এবং $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ বিন্দুটি ২য় বৃত্তে বসিয়ে পাই,

$16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+16\times(1)^2-32\times\frac{3}{4}-1=0$

আবার (1, 0) বিন্দুটি প্রথম বৃত্তে বসিয়ে পাই,

$2\times1+0-3\times1-0+1=0$

সুতরাং তাদের প্রতিটির কেন্দ্র অপরটির পরিধির উপর অবস্থিত। **(Showed)**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (3, 0) ও (7, 0) বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাংক হবে– [13-14]

A. $(4, \pm\sqrt{20})$ B. $(4, \pm5)$ C. $(5, 21)$ D. $(5, \pm\sqrt{21})$

Ans D Solve ধরি বৃত্তের কেন্দ্র (h, k)

y অক্ষকে স্পর্শ করে এমন বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$

বৃত্তটি (3, 0) বিন্দু দিয়ে গেলে, $(3-h)^2+k^2=h^2$

$\Rightarrow 9-6h+h^2+k^2-h^2=0 \Rightarrow k^2-6h+9=0$ ...... (i)

(7, 0) বিন্দু দিয়ে গেলে, $(7-h)^2+k^2=h^2$

$\Rightarrow 49-14h+h^2+k^2-h^2=0 \Rightarrow k^2-14h+49=0$ ...... (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow$

$-6h+9+14h-49=0 \Rightarrow 8h=40$ $\therefore h=5$

h এর মান (i) এ বসাই,

$k^2-6.5+9=0 \Rightarrow k^2-30+9=0$ $\therefore k=\pm\sqrt{21}$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাংক $(5, \pm\sqrt{21})$

02. $x^2+y^2+2x+c=0$ এবং $x^2+y^2+2y+c=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করলে c এর মান হবে- [12-13]

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

Ans B Solve বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করলে এদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফলের সমান। কেন্দ্রদ্বয় (–1, 0) ও (0, –1) ও ব্যাসার্ধদ্বয় $\sqrt{1-c}$ ও $\sqrt{1-c}$

$\therefore \sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{1-c}$

$\Rightarrow 2 = 4(1-c) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1-c$

$\Rightarrow c = 1-\frac{1}{2} \Rightarrow c$

03. কোন বৃত্তের সমান্তরাল দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ $2x-4y-$ $6x-12y+7=0$ হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? [12-13]

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{17}{3\sqrt{5}}$ C. $\frac{17}{5\sqrt{3}}$ D. $\frac{17}{6\ldots}$

Ans D Solve স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্বের অর্ধেকই বৃত্তটির ব্যাসার্ধ

স্পর্শকদ্বয়, $2x-4y=9$ এবং $6x-12y=-7 \Rightarrow 2x-4y=$

$\therefore$ দূরত্ব $= \left|\frac{9-\left(-\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}\right| = \left|\frac{9+\frac{7}{3}}{\sqrt{20}}\right| = \frac{34}{3\sqrt{20}} = \frac{34}{3\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}} = \frac{17}{3\ldots}$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \frac{17}{2\times3\sqrt{5}} = \frac{17}{6\sqrt{5}}$

04. যে শর্তে $x+y=1$ রেখাটি $x^2+y^2-2ax=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে তা হল- [11-12]

A. $a^2-2a=1$ B. $a^2+2a=-1$ C. $a^2+2a=1$ D. a^2-

Ans C Solve $x^2+y^2-2ax=0$ এর কেন্দ্র (a, 0) ও ব্যাস

এখন $x+y=1$ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হলে, $\left|\frac{a+0-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| =$

$\Rightarrow a-1 = \pm\sqrt{2}a \Rightarrow a^2-2a+1=2a^2$ $\therefore a^2+2a=1$

05. (0, –1) এবং (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্ত x অক্ষ থেকে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা হচ্ছে– [10-11; CUET

A. 4 B. 2 C. 3 D. $3\sqrt{\ldots}$

Ans A Solve $(x-0)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2-2y-3=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$

$\therefore$ x অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশ $= 2\sqrt{g^2-c} = 2\sqrt{1+3} = 4$

06. মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4, 3) বিন্দুতে অবস্থিত। নি বিন্দুগুলোর মধ্যে কোন বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়? [07-0

A. (– 1, 3) B. (9, 3) C. (0, 3) D. (8, 0

Ans C Solve মূল বিন্দুগামী এবং (4, 3) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের স $x^2+y^2-8x-6y=0$ এখানে, একমাত্র (0, 3) বিন্দু দ্বারা $x^2+y^2-8x-6y=0$ সিদ্ধ হয় না,

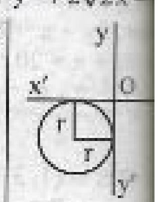
সুতরাং (0, 3) বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়।

07. একটি বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে, যার কেন্দ্র তৃতীয় কোয়াড্রেন্ট এ অ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$ হলে, বৃত্তটির সমীকরণ হবে- [06-07]

A. $x^2+y^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0$ B. $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=$

C. $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+2=0$ D. $x^2+y^2+2\sqrt{2}x=$

Ans A Solve চিত্র থেকে বুঝা যায় বৃত্তটির কেন্দ্র $(-r, -r) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$



$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ,

$(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=(\sqrt{2})^2$

$\therefore x^2+y^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0$

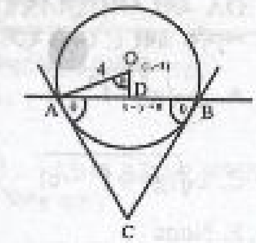
... এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... $y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ বৃত্তের $x - y = 0$ জ্যাটি পরিধির যেকোন ... বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হলো – [17-18]

B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$ E. $\frac{3\pi}{4}$

Ans C Solve $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ বৃত্তের ...(1, –3) এবং ব্যাসার্ধ = 4

... জ্যাটি বৃত্তের পরিধির A ও B বিন্দুতে ... ∠ABC এবং ∠ABC কোণদ্বয় উৎপন্ন



... $OD = \left|\frac{1+3}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 2\sqrt{2}$

... $\angle ABC = \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle OAB$

$= \angle AOD = \theta$ (ধরি)

... $= \frac{OD}{OA} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

... $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?

A. ...$\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)r+21=0$ B. $r^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)r-21=0$

C. ...$\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)r-21=0$ D. $r^2+\frac{5}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)r+21=0$

E. ...$\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)r + 21 = 0$

Ans E Solve বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক = $\left(5\cos\frac{\pi}{4}, 5\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

... সমীকরণ, $\left(x-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2^2$

... $-\frac{5}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \left(r\sin\theta - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4$

... $- 2r\cos\theta\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{25}{2} + r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{25}{2} = 4$

... $-5\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)r + 21 = 0$

... $y^2 - 8x + 24y - 17 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র হতে $x - y - 6 = 0$ জ্যা ... উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ বিন্দু হতে জ্যাটি y অক্ষকে যেখানে ছেদ ... তার দূরত্ব কত? [15-16]

A. ...$\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$ E. $7\sqrt{2}$

Ans B Solve $x^2 + y^2 - 2x + 6y - \frac{17}{4} = 0$

... $(-g, -f) = (1, -3)$

... উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $y + x + k = 0$ যা কেন্দ্রগামী

... $-3 + 1 + k = 0 \Rightarrow k = 2$

... $y + x + 2 = 0$ এবং $x - y - 6 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $(2, -4)$

... $-6 = 0$ এবং y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, -6)$

... নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ একক

... কেন্দ্র ও 6 একক ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষের খণ্ডিত অংশের ... হবে– [14-15]

A. ... B. $2\sqrt{10}$ C. $4 + 2\sqrt{10}$

D. ...$3\sqrt{5}$ E. 0

Ans E Solve $(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6x + 4 = 0$

$\therefore$ x– অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(2)^2 - 4} = 0$

05. $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 6x + 14y - 8 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা বৃহত্তর বৃত্তের কেন্দ্র হতে যে দূরত্বে অবস্থিত তা হলো– [13-14]

A. $\frac{187}{\sqrt{584}}$ B. $\frac{143}{\sqrt{584}}$ C. $\frac{243}{\sqrt{584}}$ D. $\frac{287}{\sqrt{584}}$ E. $\frac{87}{\sqrt{584}}$

Ans A Solve $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ .... (i)

$x^2 + y^2 - 6x + 14y - 8 = 0$................ (ii)

বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 - x^2 - y^2 + 6x - 14y + 8 = 0 \Rightarrow 10x - 22y + 3 = 0$

বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে, $\sqrt{(2)^2 + 4^2 - (-5)} = 5$

$\sqrt{3^2 + (-7)^2 - (-8)} = \sqrt{66}$

অর্থাৎ ২য় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ বৃহত্তম।

$\therefore$ (ii) নং বৃত্তের কেন্দ্র (3,–7) হতে দুটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর দূরত্ব,

$\frac{10 \times 3 - 22(-7) + 3}{\sqrt{10^2 + 22^2}} = \frac{187}{\sqrt{584}}$

06. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ ও $x^2 + y^2 + 32x + 24y = 0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী ও বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র সমূহের সংযোগকারী রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ হলো- [12-13]

A. $6x - y = 0$ B. $4x + 3y = 0$ C. $3x + 4y = 0$

D. $3x - 4y = 0$ E. $4x - 3y = 0$

Ans B Solve নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 32x + 24y - x^2 - y^2 + 8x + 6y = 0 \Rightarrow 40x + 30y = 0$

$\therefore 4x + 3y = 0$

07. 154 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসদ্বয় $2x - 3y = 5$ এবং $3x - 4y = 7$ হলে বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [08-09; RUET : 10-11]

A. $x^2+y^2+2x-2y = 62$ B. $x^2+y^2+2x-2y = 51$

C. $x^2+y^2-2x+2y = 47$ D. $x^2+y^2-2x+2y = 62$

E. $x^2+y^2-2x-2y = 49$

Ans C Solve ব্যাসদ্বয় সমাধান করে পাই কেন্দ্র ≡ (1, –1)

আবার $\pi r^2 = 154 \Rightarrow r = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 49$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 47 = 0$

08. (2, –3) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি, $4x + 3y + 6 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করলে, বৃত্তটির সমীকরণ নিচের কোনটি? [07-08; RUET: 10-11]

A. $x^2+y^2+6x-4y+12 = 0$ B. $x^2+y^2+4x-6y+12 = 0$

C. $x^2+y^2-4x+6y+12 = 0$ D. $x^2+y^2-4x+6y+13 = 0$

E. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 = 0$

Ans C Solve (2, –3) বিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব দূরত্ব

$= \frac{|4\times2+3\times(-3)+6|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{5}{5} = 1$ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

09. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ হল- [05-06, 06-07]

A. $x + 2y - 7 = 0$ B. $x + 2y + 7 = 0$

C. $x - 2y - 7 = 0$ D. $x - 2y + 7 = 0$

E. $-x - 2y + 7 = 0$

Ans D Solve সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow x - 2y + 7 = 0$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [15-16]

A. None of them B. $\sqrt{3}y = x - 8$
C. $y - \sqrt{3}x \pm 8$ D. $\sqrt{3}y = x \pm 8$

Ans D Solve স্পর্শকের সমীকরণ $y = \tan 30° x + c$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + c \Rightarrow \sqrt{3}y = x + \sqrt{3}c \Rightarrow x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}c = 0$...(i)

(0, 0) হতে (i) নং রেখার উপর লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 4

$\therefore 4 = \left|\frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{1+3}}\right| \Rightarrow c = \pm\frac{16}{\sqrt{3}}$

স্পর্শকের সমীকরণ $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} \times \left(\pm\frac{16}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{3}y \pm 8 = 0$

02. একটি বৃত্ত (1, 0) বিন্দুতে x অক্ষকে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির অপর বিন্দু (2, 3) দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [12-13]

A. 2 B. $\sqrt{10}$ C. 10/3 D. None

Ans C Solve ধরি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

∴ কেন্দ্র = (−g, −f), বৃত্তটি x অক্ষকে (1, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore -g = 1, g^2 = c = 1$

আবার বৃত্তটি (2, 3) বিন্দুগামী $\therefore 4 + 9 + 4g + 6f + c = 0 \therefore f = -\frac{10}{6}$

∴ ব্যাসার্ধ = $|f| = \frac{10}{6}$ ∴ ব্যাস = $\frac{10}{3}$

03. k-এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে? [11-12]

A. 2 B. −1 C. −2 D. None of these

Ans A Solve বৃত্তের সমীকরণের জন্য

$(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$-এ xy যুক্ত পদটির সহগ শূন্য হবে

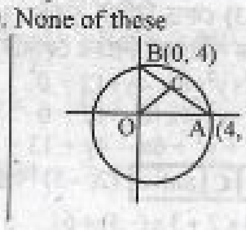
$\therefore -2 + k = 0 \Rightarrow k = 2$

04. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে AB এর উপর অংকিত লম্ব দূরত্বকে একটি বর্গের বাহু বিবেচনা করলে বর্গটির ক্ষেত্রফল কত হবে? [11-12]

A. 4sq. unit B. 6sq. unit
C. 8sq. unit D. None of these

Ans C Solve $x^2 + y^2 = 16$

বৃত্তটি x-অক্ষকে A(4, 0) এবং
y-অক্ষকে B(0, 4) বিন্দুতে ছেদ করে।
[∴ C বিন্দুর স্থানাংক (2, 2)]
[∵ C, AB এর মধ্যবিন্দু]



$\therefore OC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ ∴ বর্গের ক্ষেত্রফল = $OC^2 = 8$ বর্গ একক

05. k এর কোন মানের জন্য $x^2 + y^2 + kx + 2y + 25 = 0$, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে? [10-11]

A. 5 B. −5 C. 10 D. None

Ans C Solve x অক্ষকে স্পর্শ করলে $g^2 = c$

$\Rightarrow \left(\frac{k}{2}\right)^2 = 25 \therefore k = \pm 10$

06. $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ বৃত্তে x = 2 সরলরেখাটি একটি- [09-10]

A. জ্যা B. ব্যাস
C. স্পর্শক D. None of them

Ans C Solve $C \equiv (0, 3) \therefore r = \sqrt{0 + 3^2 - 5} = 2$

(0, 3) হতে প্রদত্ত রেখার দূরত্ব $\left|\frac{0 - 2}{\sqrt{1^2 + 0}}\right| = 2$

∴ x = 2 সরলরেখাটি একটি স্পর্শক।

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. OA এবং OB মূল বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর স্পর্শক এবং C কেন্দ্র হলে OABC চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল হবে- [10-11]

A. $\frac{1}{2}\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ B. $\sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$
C. $c\sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$ D. $\frac{\sqrt{(g^2 + f^2 - c)}}{c}$
E. None

Ans B Solve

$OC = \sqrt{g^2 + f^2}$

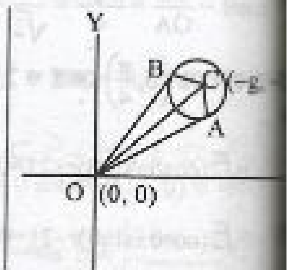
এখানে ΔOAC এবং ΔOBC সমকোণী।

AC = BC = ব্যাসার্ধ।

OC বাহু সাধারণ, ∠CAO = ∠CBO = 90°

∴ ΔOAC ≅ ΔOBC

∴ OA = OB × BC = OA × AC



□OACB = ΔOAC + ΔOBC

$= \frac{1}{2}OA \times AC + \frac{1}{2}OB$

এখানে, $AC = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

এবং $OA = \sqrt{OC^2 - AC^2} = \sqrt{g^2 + f^2 - g^2 - f^2 + c} = \sqrt{c}$

∴ □OACB = $\sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$

ঘনজ্যামিতি

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 44 সে.মি. পরিধি বিশিষ্ট একটি গোলক, সিলিন্ডারের আকার একটি বাক্সে পুরোপুরি খাপ খায়। বাক্সের খালি স্থানের আয়তন (যেখানে π-এর মান 22/7) [12-13]

A. 513.7 cm^3 B. 213 cm^3 C. 79...
D. 718.7 cm^3 E. 1308 cm^3

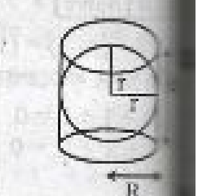
Ans D Solve

চিত্র হতে R = r, h = 2r

এখন, $2\pi r = 44 \Rightarrow r = \frac{22}{\pi}$ cm

∴ বাক্সের আয়তন = $\pi R^2 h$

$= \pi r^2(2r) = 2156$ cm^3



∴ গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{22}{\frac{22}{7}}\right)^3 = 1437.33$

∴ বাক্সের খালি স্থানের আয়তন = 2156 − 1437.33

= 718.67 cm^3 ≈ 718.7 cm^3

[illegible] এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

[illegible] ব্যাস 1, তার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সংখ্যা মান- [12-13]
[illegible] B. 4π C. $4\pi/3$
[illegible] E. None

[illegible] Solve: পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$

SELF TEST: WRITTEN (B)

[illegible] $+ 3$ এবং $3y = 7\sin\theta - 10$ পরামিতিক বিশিষ্ট বৃত্তের [illegible] বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বের কর।
[illegible] $- 12y - 92 = 0$

[illegible] একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a। AB ও AD কে অক্ষদ্বয়ের [illegible] বর্গক্ষেত্রটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[illegible] $+ y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

[illegible] $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের যেকোন বিন্দু হতে [illegible] $+ 2gx + 2fy + c_1 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{c_1 - c}$ [illegible] $c_1 > c$

[illegible] $+ (y - q)^2 = r^2$ এবং $(x - q)^2 + (y - p)^2 = r^2$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ [illegible] নির্ণয় কর।
[illegible] জ্যা এর দৈর্ঘ্য, $\sqrt{4r^2 - 2(p - q)}$ একক

[illegible] $+ 4x - 2y + 3 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$ বৃত্ত দুইটির [illegible] জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
[illegible] $- 2y + 7 = 0$

[illegible] বিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ এবং [illegible] $+ 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের উপর অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য [illegible] বিন্দুর সঞ্চার পথ বের কর।
[illegible] $+ 6y + 5 = 0$

[illegible] $- 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয় নির্ণয় কর যা x অক্ষের সঙ্গে [illegible] উৎপন্ন করে।
[illegible] $y = \sqrt{3}x + 13 - 2\sqrt{3}$

SELF TEST: MCQ (B)-01

[illegible] $+\sqrt{2}$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শবিন্দুর [illegible]?
[illegible] B. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
[illegible] D. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

[illegible] মান কত হলে $3x - 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে?
[illegible] $-8, 32$ B. $-32m$
[illegible] D. $81, 3$

[illegible] রেখাটি $x^2 + y^2 = ax + by$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত–
[illegible] B. $a+m=0$
[illegible] D. $a+bm=0$

[illegible] $+ y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে [illegible] সমীকরণ–
[illegible] B. $x - 3 = 0$
[illegible] A ও B উভয়ই D. None

05. (4,–11) বিন্দুতে $x^2+y^2-3x+10y = 15$ বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ–
A. $12x + y + 14 = 0$ B. $24x + 2y + 14 = 0$
C. $12x + 2y + 7 = 0$ D. None

06. যে বিন্দুর কোটি 3, উক্ত বিন্দুতে $x^2+y^2=13$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ–
A. $2x + 3y = 13$ B. $2x + 3y + 13 = 0$
C. $2x - 3y + 13 = 0$ D. A ও C উভয়ই

07. (1, –3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x–y–4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে, বৃত্তটির সমীকরণ–
A. $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$
B. $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y - 49 = 0$
C. $5x^2 + 5y^2 + 10x + 30y + 49 = 0$
D. None

08. (7, 2) বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 15 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য–
A. 4 একক B. 8 একক
C. 16 একক D. 32 একক

09. $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (4, –6) বিন্দুতে অবস্থিত–
A. $2x + 3y = 26$ B. $x - \frac{3}{2}y = 13$
C. $2x - 13y = 26$ D. $3x - 2y = 26$

10. $x^2+y^2-2x-4y - 20 = 0$ বৃত্তের উপরস্থ (–4, 2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ–
A. $x + 3 = 0$ B. $x - y = 0$
C. $x + 4 = 0$ D. $x - 4 = 0$

11. $x^2+y^2-4x-6y+c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক–
A. (0, 2) B. (2, 0)
C. (0, 3) D. (4, 0)

12. (5, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটি x অক্ষকে যে অংশে ছেদ করে তার পরিমাণ–
A. 8 B. 7
C. 7 D. 4

13. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ–
A. $x + y + 3 = 0$ B. $x - y + 3 = 0$
C. $x - y = 0$ D. $x + y = 0$

14. $y = mx$ রেখাটি $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক হলে m এর মান–
A. $\sqrt{\frac{g^2 - c}{c}}$ B. $\sqrt{\frac{g^2 - c}{2}}$
C. $\pm\sqrt{\frac{g^2 - c}{c}}$ D. None

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	
04. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

14.C	13.B	12.A	11.B	10.C	09.B	08.B
07.A	06.D	05.D	04.D	03.D	02.A	01.C

SELF TEST: MCQ (B)-02

01. $x = 5\cos\theta - 1;\ y = 5\sin\theta + 3$ পরামিতিক সমীকরণ বিশিষ্ট বৃত্ত $3y - 4x + 2 = 0$ রেখা হতে কত দৈর্ঘ্যের জ্যা খণ্ডিত করে?
   A. $8\sqrt{2}$ একক B. $7\sqrt{2}$ একক
   C. 8 একক D. 16 একক

02. $x^2 + y^2 + 2x - 7y + 5 = 0$ বৃত্তটি–
   A. x অক্ষকে ছেদ করে না
   B. y অক্ষকে ছেদ করে না
   C. উভয় অক্ষকে ছেদ করে
   D. A ও B

03. $(2, -3)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 - 6x - y + 2 = 0$ বৃত্তের–
   A. ভেতরে B. বাইরে
   C. উপরে D. কোনোটিই নয়

04. $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে যদি–
   A. $a^2m^2 - 2al = 1$
   B. $a^2m^2 + 2al = 1$
   C. $a^2m^2 - al = 0$
   D. A এবং B

05. মূলবিন্দু হতে, $2x^2 + 2y^2 - 2ax - 4by + 2b^2 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি–
   A. $a^2-b^2 = 1$ B. $a^2-b^2 = 0$
   C. $a = 2b$ D. A ও B

06. $2x^2 + 2y^2 + 3x - 4y + \frac{9}{8} = 0$ বৃত্তটি স্পর্শ করে–
   A. x অক্ষ B. y অক্ষ
   C. উভয় অক্ষ D. কোনোটিই নয়

07. $(x-1)^2 + y^2 = a^2$ এবং $(x+2)^2 + y^2 = b^2$ বৃত্তদ্বয় বহিস্থঃভাবে স্পর্শ করলে কোন সম্পর্ক সঠিক?
   A. $a-b = 3$ B. $a^2+b^2 = 1$
   C. $a+b = 1$ D. $a+b = 3$

08. $y - 3x + 10 = 0$ সরলরেখা $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
   A. (3, 1) B. (3, –1)
   C. (–3, 1) D. (1, 1)

09. $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত (1, 2) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ–
   A. $x + 5y + 11 = 0$
   B. $2x + 5y + 1 = 0$
   C. $x + 5y - 11 = 0$
   D. $2x + 5y + 11 = 0$

10. $2x - 3y - 9 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 4y - c = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে, c = ?
   A. 4 B. 2
   C. 6 D. 8

11. একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4, –7) এবং এটি $y + 13 = 0$ কে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ হবে–
   A. $x^2 + y^2 + 8x + 14y + 29 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 29 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 29 = 0$
   D. None

12. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বর্ণিত যে ব্যাসটি (2, 5) বিন্দু অতিক্রম করে তার সমীকরণ কোনটি?
   A. $x+4y=13$ B. $x-4y=13$
   C. $4x-y=13$ D. $4x+y=13$

13. কি শর্তে $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করবে?
   A. $4c = a^2$ B. $a^2 = 3c$
   C. $4c^2 = a$ D. $a = 4c$

14. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ পরস্পর অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?
   A. $3x + 4y + 19 = 0$
   B. $3x - 4y + 19 = 0$
   C. $x + 4y - 10 = 0$
   D. $3x + y - 19 = 0$

15. $x^2 + y^2 = 4$ এবং $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 24$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক সংখ্যা–
   A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

16. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 8y - 4 = 0$ বৃত্ত–
   A. বহিঃস্পর্শ করে
   B. অন্তঃস্পর্শ করে
   C. স্পর্শ করে না
   D. None

17. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের (5, 12) ও (12, –5) বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়–
   A. সমান্তরাল B. লম্ব
   C. একই D. None

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

17.B	16.B	15.B	14.B	13.A	12.D	11.C	10.D	[illegible]
08.B	07.D	06.A	05.C	04.B	03.B	02.A	01.C	

বিন্যাস ও সমাবেশ (Permutation & Combination)

[illegible] সূত্র : যদি একটি ঘটনা m সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে এবং অপর একটি [illegible] সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা যায় তবে ঘটনাদ্বয় একত্রে $m \times n$ সংখ্যক [illegible] যাবে।

[illegible] 'এবং' থাকলে গুণের সূত্র প্রয়োগ করতে হয়।

[illegible] সূত্র : যদি একটি ঘটনা m সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে এবং অপর একটি [illegible] সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে করা যায় এবং ঘটনাদ্বয়ের একটি ঘটলে অপরটি [illegible] এমন ক্ষেত্রে ঘটনাদ্বয়ের যেকোন একটি $(m + n)$ সংখ্যক উপায়ে করা [illegible]

[illegible] 'অথবা' থাকলে যোগের সূত্র প্রয়োগ করতে হয়।

[illegible] কিছু বৈশিষ্ট্য:

$|\underline{n} = n|\underline{n-1} = n(n-1)|\underline{(n-2)}$

$|\underline{0} = |\underline{1} = 1$

$|\underline{2n} = 2^n |\underline{n}\, [1.3.5 \ldots\ldots\ldots (2n-1)]$

$\dfrac{|\underline{n}}{|\underline{r}} = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (r+1)$

$\dfrac{|\underline{n}}{|\underline{n-r}} = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n-r+1)$

$\dfrac{1}{|\underline{n}} + \dfrac{1}{|\underline{n+1}} = \dfrac{\lambda}{|\underline{n+2}}$ হলে $\lambda = (n+2)^2$

যদি $|\underline{x} = |\underline{y}$ হয় তবে $x = y$ অথবা $x = 0, y = 1$ অথবা $x = 1, y = 0$

$\dfrac{1}{-n!} = 0, \dfrac{k}{-n!} = 0$ [n অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা]

$|\underline{n}$ এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা P এর ঘাত নির্ণয়

যদি $|\underline{n}$ এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা P এর ঘাত $E_p(n!)$.

[illegible] $E_p(n!) = \left[\dfrac{n}{P}\right] + \left[\dfrac{n}{P^2}\right] + \left[\dfrac{n}{P^3}\right] + \text{- - - - - - - - -} + \left[\dfrac{n}{P^s}\right]$

[illegible] s বৃহত্তম স্বাভাবিক সংখ্যা যাতে $P^s \le n < P^{s+1}$

[illegible] $[x]$ = Greatest integer Function.

[illegible] $|\underline{100}$ এর মধ্যে 3 এর সর্বোচ্চ ঘাত বের কর।

Sol^n :

$|\underline{100}$ এর মধ্যে 3 এর সর্বোচ্চ ঘাত $E_3(100!)$

$= \left[\dfrac{100}{3}\right] + \left[\dfrac{100}{3^2}\right] + \left[\dfrac{100}{3^3}\right] + \left[\dfrac{100}{3^4}\right] + \text{- - - - - - -}$

$= 33 + 11 + 3 + 1 + 0 = 48$। সুতরাং 3 এর সর্বোচ্চ ঘাত 48 Ans:

Ex-02 $|\underline{100}$ এর শেষে কতগুলো শূন্য থাকবে?

Sol^n :

$|\underline{100}$ এর শেষে মোট শূন্য সংখ্যা $= \left[\dfrac{100}{5}\right] + \left[\dfrac{100}{5^2}\right] + \left[\dfrac{100}{5^3}\right] + \ldots$

$= 20 + 4 + 0 = 24$ Ans:

❑ **Inclusion এবং Exclusion এর মূলনীতি**

i. $n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum n(A_i) - \sum n(A_i \cap A_j) + \sum n(A_i \cap A_j \cap A_k) \ldots\ldots + (-1)^n n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n)$

ii. $n(A_1' \cup A_2' \cup \ldots\ldots \cup A_n') = n(U) - n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots A_n)$

iii. $n(A_1' \cap A_2' \cap \ldots\ldots \cap A_n') = n(U) - n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n)$

Ex-01 1 থেকে 1000 এর মধ্যে কতগুলো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা আছে যারা 2, 3 এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য।

Sol^n : ধরি, A_k = 1 থেকে 1000 এর মধ্যে ধনাত্মক সংখ্যার সেট যারা k দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore n(A_2) = \left[\dfrac{1000}{2}\right] = 500$

$n(A_3) = \left[\dfrac{1000}{3}\right] = 333$

$n(A_5) = \left[\dfrac{1000}{5}\right] = 200$

$n(A_2 \cap A_3) = \left[\dfrac{1000}{2 \times 3}\right] = 166$

$n(A_3 \cap A_5) = \left[\dfrac{1000}{3 \times 5}\right] = 66$

$n(A_2 \cap A_5) = \left[\dfrac{1000}{2 \times 5}\right] = 100$

এবং $n(A_2 \cap A_3 \cap A_5) = \left[\dfrac{1000}{2 \times 3 \times 5}\right] = 33$

Inclusion এবং Exclusion এর মূলনীতি অনুযায়ী

$n(A_2 \cap A_3 \cap A_5) = n(A_2) + n(A_3) + n(A_5)$
$- n(A_2 \cap A_3) - n(A_3 \cap A_5)$
$- n(A_2 \cap A_5) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)$
$= 500 + 333 + 200 - 166 - 66 - 100 + 33$
$= 734$

সুতরাং 1 থেকে 1000 এর মধ্যে 2, 3, 5 দ্বারা বিভাজ্য ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সংখ্যা = 734। Ans:

বিন্যাস

গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী

❑ কয়েকটি জিনিস হতে কিছু সংখ্যক বা সবকয়টি জিনিস নিয়ে কত রকমভাবে সাজানো যেতে পারে এরূপ গাণিতিক সমস্যা সমাধানকল্পে গণিতবিদরা বিন্যাস (Permutation) নামক স্বতন্ত্র বিষয় প্রবর্তন করেন।

❑ বিন্যাস: 'বিন্যাস' কথাটির সাধারণ অর্থ 'সাজানো', কয়েকটি জিনিস থেকে কিছু সংখ্যক জিনিস নিয়ে বা সবকয়টি জিনিস একত্রে নিয়ে বিভিন্ন প্রকারে সাজালে, এক এক প্রকার সাজানো কে এক একটি বিন্যাস বলে।

উদাহরণ: a, b, c তিনটি অক্ষর হতে প্রতিবার একটি করে নিয়ে সাজালে a, b, c এই তিনটি উপায়ে সাজানো যায় এবং এর প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলে। আবার দু'টি করে নিলে ab, ba, bc, cb, ca, ac এই ছয় উপায়ে সাজানো যায় এবং এদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলে। সবগুলোকে নিয়ে সাজালে abc, acb, bac, bca, cab, cba এই ছয়টি উপায়ে সাজানো যায় এবং এ ধরনের সাজানোর প্রত্যেকটি এক একটি বিন্যাস বলে।

❑ **বিন্যাস সংখ্যা (Number of Permutation):** কয়েকটি জিনিস থেকে কিছু সংখ্যক জিনিস নিয়ে বা সবকয়টি জিনিস নিয়ে যত রকমে সাজানো যায় সেই সংখ্যাকে বিন্যাস সংখ্যা বলে। আগের উদাহরণে বিন্যাস সংখ্যা যথাক্রমে 3, 6 ও 6।

❒ **বিন্যাস সংখ্যার প্রতীক:** n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস হতে r সংখ্যক নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় সেই সংখ্যাকে ^nP_r বা P(n, r) বা, P_r^n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এখানে- n, r ∈ N এবং n > r, $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

❒ **! চিহ্নের ব্যাখ্যা:** প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা (অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যার) ক্রমিক গুণফলকে গৌণিক n বা n! বলা হয়। n! কে ফ্যাক্টরিয়াল n বা গৌণিক n বলে পড়তে হয়।

যেমন: 4! = 1.2.3.4 = 24

❒ **বিন্যাসের ধর্ম (Propertion of Permutation ; ^nP_r):**

i. $^nP_n = \underline{|n}$

ii. $^nP_0 = 1$, $^nP_1 = n$ এবং $^nP_{n-1} = {^nP_n} = \underline{|n}$

iii. $^nP_r = n\left({^{n-1}P_{r-1}}\right) = n\,(n-1)\left({^{n-1}P_{r-2}}\right)$

$= n(n-1)\,(n-2)\left({^{n-1}P_{r-3}}\right)$

= - - - - - - - - - - - - - - - - - -

iv. $^{n-1}P_r = (n-r).\,{^{n-1}P_{r-1}}$

v. $\frac{^nP_r}{^nP_{r-1}} = n - r + 1$

vi. $^nP_r = {^{n-1}P_r} + r \times {^{n-1}P_{r-1}}$

❒ **বিন্যাসের সমতা ও বৃহত্তম মান:**

(1) ^nP_r এর মান বৃহত্তম হবে যদি r = n বা r = n − 1 হয়

(2) $^nP_r = {^nP_s}$ হবে যখন r = s হয়

(i) n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু একবার মাত্র নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা $^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\,(n-r+1)$

$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}\, n, r \in N,\ 0 \le r \le n$

(ii) n সংখ্যক বস্তুর p সংখ্যক একজাতীয়, q সংখ্যক আরেক জাতীয়, r সংখ্যক আরেক জাতীয় এবং বাকীগুলো ভিন্ন ভিন্ন এবং তা হতে সবগুলো বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা হবে $= \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\ \underline{|q}\ \underline{|r}}$

(iii) n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস (যেখানে যেকোন বস্তু যেকোন সংখ্যকবার পর্যন্ত পুনরাবৃত্তি হতে পারে)= n^r

❒ **নির্দিষ্ট শর্তাধীনে বিন্যাস সংখ্যা :**

i. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস (যখন একটি বিশেষ বস্তু অবশ্যই থাকবে) = $r\left({^{n-1}P_{r-1}}\right)$

ii. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস (যখন p সংখ্যক বিশেষ বস্তুসমূহ অবশ্যই থাকবে) = $\underline{|p}\,(r-p+1)\left({^{n-p}P_{r-p}}\right)$

iii. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস (যখন একটি বিশেষ বস্তু অবশ্যই থাকবে না) = $^{n-1}P_r$

iv. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে সবগুলো বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস (যখন m সংখ্যক বিশেষ বস্তুসমূহ সর্বদা একত্রে থাকবে) = $\underline{|m}\ \underline{|n-m+1}$

v. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে সবগুলো বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস (যখন m সংখ্যক বিশেষ বস্তুসমূহ কখনোই একত্রে থাকবে না)

$= \underline{|n} - \underline{|m}\ \underline{|n-m+1}$

❒ **চক্রবিন্যাস (Circular Permutation):** কতগুলো জিনিসকে যখন বৃত্ত... সাজানো হয় তখন ঐ বিন্যাসকে চক্রাকার/বৃত্তাকার বিন্যাস বলে। এ... কোন বিন্যাসের প্রান্ত থাকে না কিন্তু বাস্তব আপেক্ষিক অবস্থান মুখ্য... চক্র বিন্যাস ভিন্ন হবে যদি এদের আপেক্ষিক অবস্থান একই না হয়, A, B, C, D চারটি অক্ষরের সবগুলোকে নিয়ে আমরা 4! সংখ্যক সারি বিন্যাস... এদের মধ্যে A, B, C, D; B, C, D, A; C, D, A, B; D, A, B, C... বিন্যাস। যাদের প্রান্ত বিন্দুগুলো ভিন্ন এদেরকে চক্রাকার বিন্যাসে বি... করলে নিচের চিত্র হতে এটা সুস্পষ্ট হয় যে এ চারটি বিন্যাস অভি... এদেরকে A, B, C, D দ্বারা নির্দেশ করা যায়।



❒ (i) n সংখ্যক চক্রাকারে ঘূর্ণনশীল বস্তু বা n সংখ্যক গোলাকার ... অবস্থানরত বস্তু হতে সবগুলো বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস $= \frac{\underline{|n}}{n} = \underline{|n-1}$

(ii) n সংখ্যক বস্তু হতে সবগুলো বস্তু নিয়ে গোলাকার মালা তৈরি ... গঠিত বিন্যাস $= \frac{\underline{|n-1}}{2}$

❒ **বিভিন্ন শর্তাধীনে চক্রবিন্যাস :**

i. যদি বিন্যাসের ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিক এবং ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক... ক্রম ভিন্ন হয় তবে n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত

চক্রবিন্যাস $= \frac{^nP_r}{r} = \frac{\underline{|n}}{r\,\underline{|n-r}}$

ii. যদি বিন্যাসের ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিক এবং ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দি... ক্রম একই হয় তবে n সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত

চক্রবিন্যাস $= \frac{^nP_r}{2r} = \frac{\underline{|n}}{2r\,\underline{|n-r}}$

Note: (1) n সংখ্যক একজাতীয় বস্তু হতে প্রতিবারে 1, 2, 3 .... nটি বস্তু... বিন্যাস সর্বদাই 1 হবে।

(2) n অংকের কোন সংখ্যার চেয়ে ক্ষুদ্রতর সংখ্যা 1, 2, 3 .... (n − 1) ... হতে পারে, যেমন- 1000 এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর সংখ্যা 1, 2 বা 3 অংকের হতে পা...

❒ **বিন্যাসের ক্ষেত্রে:** নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে বিন্যাস করতে হবে-

সাজানো, বিন্যাস করা, বিন্যস্ত করা, শব্দ গঠন, সংখ্যাগঠন, সংকেত ... মন্ত্রীসভা গঠন, টেলিফোন সংযোগ, মালা/হার গাথা, আসন গ্রহণ, ভো... খেলার ফলাফল, নিমন্ত্রণের উপায়, পুরস্কার প্রদান করা ইত্যাদি বলা ... বিন্যাস করতে হয়।

❒ **মনে রাখা প্রয়োজন:**

i. পুস্তকের কপি বললে একজাতীয় ও খন্ড বললে ভিন্ন জাতীয় বুঝাবে

ii. অন্যূন, কমপক্ষে, অন্তত: সবগুলোর অর্থ একই।

iii. n সংখ্যক একজাতীয় বস্তু হতে 0, 1, 2, 3.......n টি বস্তু নিয়ে বিন্যা... সমাবেশ উভয়ই ^nP_r বা ^nC_r এর পরিবর্তে 1 হবে।

iv. n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে একজাতীয় কিছু সংখ্যক জিনিস থাকলে... এদের থেকে প্রতিবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস করতে বল... সমাবেশের মাধ্যমে বিন্যাস করা সুবিধাজনক।

v. n সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস বের করতে... যেখানে যদি কোন বিশেষ শ্রেণীর জিনিস কমপক্ষে 1, 2 বা 3 ইত্যাদি স... নিতে বলা হয় তবে সেক্ষেত্রে সমাবেশের মাধ্যমে বিন্যাস করতে হয়।

[illegible] সমস্যা সমাধানের নিয়মাবলী:

[illegible] শব্দের মোট বর্ণ, একজাতীয় বর্ণ, স্বরবর্ণ বা ব্যঞ্জনবর্ণের সংখ্যা [illegible] হবে (Required অনুযায়ী)

[illegible] ক্ষেত্রে প্রদত্ত অংকের মোট সংখ্যা, একজাতীয় অংকে লিখতে হয়, [illegible] স্থানে শূন্য থাকলে তা অর্থপূর্ণ অংকের সংখ্যা হয় না। কিন্তু সংখ্যা [illegible] ক্ষেত্রে অর্থপূর্ণ সংখ্যা চাওয়া হয়।

[illegible] নিয়মানুযায়ী solve করতে হবে।

[illegible] সাজানো ব্যবস্থা:

[illegible] বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r সংখ্যক বিভিন্ন দলসমূহ যত উপায়ে [illegible] তার উপায়

$$[illegible]\,(r+1)(r+2)\,.....\,(r+n-1) = \frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r-1} =$$

[illegible] P_n (যেখানে যেকোনো দল খালি থাকতে পারে।)

[illegible] বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r সংখ্যক বিভিন্ন দলসমূহ যত উপায়ে [illegible] তার উপায় $= \lfloor n\ {}^{n-1}C_{r-1}$ (যেখানে কোনো দলই খালি [illegible] না।)

[illegible] বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r সংখ্যক বিভিন্ন দলসমূহ যত উপায়ে ভাগ [illegible] তার উপায়

$$[illegible] - {}^rC_1(r-1)^n + {}^rC_2(r-2)^n - ..... + (-1)^{r-1}\,{}^rC_{r-1}$$

$$= \sum (-1)^p\,{}^rC_p(r-p)^n = \frac{\lfloor n}{(e^x-1)^r} \text{ এর বিস্তারে } x^n \text{ এর সহগ}$$

[illegible] কোন দলই খালি থাকবে না।)

[illegible] ভিন্ন ভিন্ন বল সমূহ 3টি ভিন্ন ভিন্ন বাক্সে কত উপায়ে সাজানো যায় [illegible] বাক্সই খালি থাকবে না।

[illegible] উপায় $= \lfloor 5 \times {}^{5-1}C_{3-1} = \lfloor 5 \times {}^4C_2 = 720$ Ans.

[illegible] ভিন্ন ভিন্ন বল সমূহ 3টি ভিন্ন ভিন্ন বাক্সে কত উপায়ে ভাগ করা যায় [illegible] বাক্সই খালি থাকবে না।

[illegible] উপায় $= 3^5 - {}^3C_1(3-1)^5 + {}^3C_2(3-2)^5 = 150$ Ans.

[illegible] একই রকম বস্তু দ্বারা r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন দল সমূহ যত উপায়ে [illegible] তার উপায় ${}^{n+r-1}C_{r-1}$ (যেখানে যেকোন দল খালি থাকতে [illegible]

[illegible] একই রকম বস্তু দ্বারা r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন দলসমূহ যত উপায়ে [illegible] তার উপায় $= {}^{n-1}C_{r-1}$ (যেখানে কোন দলই খালি থাকবে না।)

[illegible] এই রকম বস্তু দ্বারা r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন দলসমূহ যত উপায়ে [illegible] তার উপায় $= (1-x^{m-l+1})^r(1-x)^{-r}$–এর বিস্তৃতিতে x^{n-lr} [illegible] যেখানে কোন দলেই l এর থেকে কম এবং m এর থেকে বেশি [illegible] পারবে না।)

[illegible] একটি দলে n সংখ্যক বস্তুসমূহের মধ্যে p সংখ্যক বস্তু একই রকম [illegible] ঐ দল থেকে r সংখ্যক বস্তু বাছাই করার উপায়

$$\sum_{k=0}^{r} {}^{n-p}C_k \quad \text{যখন } r \le p$$

$$\sum_{k=r-p}^{r} {}^{n-p}C_k \quad \text{যখন } r > p$$

□ যেকোন বস্তু নিজের অবস্থান ব্যতীত ভুল স্থানে বসবে সংক্রান্ত সমস্যাবলী:

(i) n সংখ্যক চিঠি n সংখ্যক ভুল খামে যাওয়ার উপায়

$$= \lfloor n\left[1 - \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + ... + (-1)^n\frac{1}{\lfloor n}\right]$$

(ii) n সংখ্যক চিঠির মধ্যে r সংখ্যক চিঠি ভুল খামে যাওয়ার উপায়

$$= {}^nC_r \times \lfloor r\left[1 - \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + ... + (-1)^r\frac{1}{\lfloor r}\right]$$

$$= {}^nP_r\left[1 - \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + ... + (-1)^r\frac{1}{\lfloor r}\right]$$

(iii) n সংখ্যক চিঠির মধ্যে কমপক্ষে p সংখ্যক চিঠি ভুল খামে যাওয়ার উপায় $= \sum_{r=p}^{n} {}^nC_rD_r$

যেখানে $D_r = \lfloor r\left[1 - \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + ... + (-1)^r\frac{1}{\lfloor r}\right]$

বহুপদী উপপাদ্যের প্রয়োগ সংক্রান্ত সমস্যাবলী (অজানাকে জানো)

i. যদি (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তুর মধ্যে l সংখ্যক বস্তু ১ম প্রকারের, m সংখ্যক বস্তু ২য় প্রকারের, n সংখ্যক বস্তু ৩য় প্রকারের .... ইত্যাদি হয় তবে (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ $= (1 + x + x^2 + ... x^l)(1 + x + x^2 + ... + x^m) \times (1 + x + x^2 + ... + x^n)$ ....এর বিস্তারে x^r এর সহগ (যেখানে প্রত্যেক প্রকারের বস্তু থাকতেও পারে বা নাও থাকতে পারে।)

ii. যদি (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তুর মধ্যে l সংখ্যক বস্তু ১ম প্রকারের, m সংখ্যক বস্তু ২য় প্রকারের, n সংখ্যক বস্তু ৩য় প্রকারের .... ইত্যাদি হয় তবে (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ $= (x + x^2 + ... + x^l) \times (x + x^2 + ... + x^m) \times (x + x^2 + ... + x^n)$ .... এর বিস্তারে x^r এর সহগ (যেখানে প্রত্যেক প্রকারের বস্তুর কমপক্ষে একটি অন্তর্ভুক্ত থাকবে।)

iii. যদি (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তুর মধ্যে l সংখ্যক বস্তু ১ম প্রকারের, m সংখ্যক বস্তু ২য় প্রকারের, n সংখ্যক বস্তু ৩য় প্রকারের .... ইত্যাদি হয় তবে (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস

$$= \lfloor r\left(1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + ... + \frac{x^l}{\lfloor l}\right) \times \left(1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + ... + \frac{x^m}{\lfloor m}\right) \times \left(1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + ... + \frac{x^n}{\lfloor r}\right)$$

.......-এর বিস্তারে x^r এর সহগ (যেখানে প্রত্যেক প্রকারের বস্তু থাকতেও পারে বা নাও থাকতে পারে।)

iv. যদি (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তুর মধ্যে l সংখ্যক বস্তু ১ম প্রকারের, m সংখ্যক বস্তু ২য় প্রকারের, n সংখ্যক বস্তু ৩য় প্রকারের .... ইত্যাদি হয় তবে (l + m + n + ...) সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস

$$= \lfloor r\left(x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + ... + \frac{x^l}{\lfloor l}\right) \times \left(x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + ... + \frac{x^m}{\lfloor m}\right) \times \left(x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + ... + \frac{x^n}{\lfloor n}\right)$$

.... এর বিস্তারে x^r এর সহগ (যেখানে প্রত্যেক প্রকারের বস্তু কমপক্ষে একটি অন্তর্ভুক্ত থাকবে।)

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: সরাসরি ^nP_r সংক্রান্ত অংক

Ex-01 LAUGHTER শব্দটির অক্ষরগুলো হতে প্রতিবারে 5টি করে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা কত?

Solⁿ: LAUGHTER শব্দটিতে বর্ণের সংখ্যা 8টি। 8টি বর্ণ হতে 5টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^8P_5 = 6720.$ **Ans.**

Ex-02 EQUATION শব্দটির সবগুলো অক্ষর নিয়ে কতটি শব্দ গঠন করা যায়?

Solⁿ: EQUATION শব্দটিতে বর্ণের সংখ্যা 8টি। সবগুলো বর্ণ ব্যবহার করে গঠিত শব্দের সংখ্যা $= \lfloor 8 = 40320$ টি। **Ans.**

Ex-03 আরিচা ও দৌলতদিয়ার মধ্যে 12টি ফেরি ষ্টিমার যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কত প্রকারে একটি ফেরিতে আরিচা হতে দৌলতদিয়া গিয়ে ভিন্ন ফেরিতে ফিরবে।

Solⁿ: ধরি, দুটি ফেরি স্টিমার A ও B

তাহলে একজন যাত্রী A ফেরিতে গিয়ে B ফেরিতে ফিরতে পারে। আবার B ফেরিতে গিয়ে A ফেরিতে ফিরতে পারে। সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা = 12টি ভিন্ন জিনিস হতে প্রত্যেকবার 2টি করে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{12}P_2 = 132$। তাই একটি লোক এক ফেরিতে গিয়ে অন্য ফেরিতে ফিরতে পারে 132 উপায়ে। **Ans.**

For practice:

01. ARTICLE শব্দটি হতে প্রতিবারে 4টি করে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা? **Ans.** $^7P_4$
02. EQUATION শব্দটি হতে প্রতিবারে 5টি করে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা? **Ans.** $^8P_5$
03. ARTICLE শব্দটির সবগুলো অক্ষর নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা? **Ans.** $\lfloor 7$
04. 6 জন ভ্রমণকারী একটি শহরে পৌঁছে দেখল সেখানে 8টি আবাসিক হোটেল আছে। প্রত্যেকে ভিন্ন হোটেলে থাকতে চাইলে কত প্রকারে তারা হোটেল ভাড়া করতে পারবে। **Ans.** 20160
05. দিনাজপুর পার্বতীপুর রেলপথে 6টি ষ্টেশন আছে। শোভন শ্রেণীর মোট কত প্রকারের টিকেট ছাপতে হবে যাতে যে কোন এক ষ্টেশন হতে অপর ষ্টেশনে যাওয়া যায়? **Ans.** 30

Type-02: সবগুলো ভিন্ন নয় বা কিছু সংখ্যক একজাতীয় এরূপ ক্ষেত্রে বিন্যাস

Ex-01 PARTICIPATION শব্দের অক্ষরগুলোকে মোট কত রকমে সাজানো যায়?

Solⁿ: PARTICIPATION শব্দটিতে মোট 13টি অক্ষর আছে। এর মধ্যে 2টি P; 3 টি I; 2 টি A; 2টি t।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{\lfloor 13}{(\lfloor 2)^3 \lfloor 3} = 129729600$ **Ans.**

For practice:

01. নিম্নলিখিত শব্দগুলোর প্রত্যেকের অক্ষরগুলোকে মোট কত রকমে সাজানো যায়?

(a) COMMITTEE ans. $\dfrac{9!}{2^3}$

(b) millennium ans. $\dfrac{10!}{2^4}$

(c) PARALLEL Ans. $\dfrac{8!}{2!\times 3!}$

(d) MATHEMA[TICS] Ans. $\dfrac{11!}{2^3}$

Type-03

➲ কতগুলো বর্ণ বা বস্তু সর্বদা একত্রে থাকবে– যেগুলো একত্রে থাক[বে] একটি উপাদান ধরে বাকিগুলোর সাথে 1 যোগ করে প্রাপ্ত সং[খ্যার] বিন্যাস করতে হবে। অতঃপর যাদেরকে একটি ধরা হয়েছে তাদে[র] করতে হবে। দুই বিন্যাস গুণ করে নির্ণেয় বিন্যাস পাওয়া যাবে।

Ex-01 DAUGHTER শব্দটির স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে ক[ত] কতভাবে সাজানো যায়?

Solⁿ: মোট বর্ণের সংখ্যা = 8 এবং বর্ণগুলো ভিন্ন। স্বরবর্ণ তিনটিকে এ[কটি] ধরলে বর্ণের সংখ্যা $= 8 - 3 + 1 = 6$

$\therefore$ ছয়টি বর্ণ $\lfloor 6$ উপায়ে বিন্যস্ত হতে পারে। স্বরবর্ণগুলো নিজে[দের মধ্যে] $\lfloor 3$ উপায়ে বিন্যস্ত হতে পারে।

নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= \lfloor 6 \times \lfloor 3 = 4320$

For practice:

01. গণিতের 5 খানা, পদার্থ বিজ্ঞানের 3 খানা ও রসায়ন বিজ্ঞানে[র] ... পুস্তককে একটি তাকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে এক[ই বিষয়ের] পুস্তকগুলো একত্রে থাকবে? An[s.]
02. IDENTITY শব্দটির বর্ণগুলো কতভাবে সাজানো যায় যাতে ... দুটি একত্রে থাকবে? Ans[.]
03. 'POSTAGE' শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যে[তে পারে] যাতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে থাকবে? An[s.]
04. 'MATHEMATICS' শব্দটির বর্ণগুলোকে কত প্রকারে সাজা[নো যায়] বের কর এবং এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণ একত্রে থাকবে? **Ans.** $\dfrac{11!}{2!2!2!}$

Type-04 : একত্রে না রেখে বিন্যাস

➲ একত্রে না রেখে বিন্যাস = মোট বিন্যাস – একত্রে রেখে বিন্যাস।

Ex-01 POSTAGE শব্দটির অক্ষরগুলো কতভাবে সাজানো [যায় যাতে] ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে থাকবে না?

Solⁿ: POSTAGE শব্দটিতে বর্ণের সংখ্যা = 7। সবগুলো নিয়ে বিন্যাস সং[খ্যা] ...

ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 4 \times \lfloor 4 = 576$

$\therefore$ ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে না নিয়ে বিন্যাস $= \lfloor 7 - 576 = 4464$

For practice:

01. সর্বোৎকৃষ্ট ও সর্বনিকৃষ্ট খাতা দুটি একত্রে না রেখে 6টি পরীক্ষার খা[তা] সাজানো যায়?
02. MATHEMATICS শব্দটির অক্ষরগুলোকে কতভাবে সাজানো [যায় যাতে] স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকবে না। Ans.
03. তিনটি একই রকম অংক কখনও একত্রে না রেখে 1, 234, ... সংখ্যাটির অংকগুলো কতভাবে বিন্যস্ত করা যায়? An[s.]

Type-05: পাশাপাশি থাকবে না

[illegible] একত্রে রেখে/ পৃথক না রেখে, পাশাপাশি রেখে কথাগুলোর মানে [illegible] একত্রে না রেখে/ পৃথক রেখে, পাশাপাশি না রেখে কথাগুলোর [illegible]।

[illegible] যে দুইটি পাশাপাশি থাকবে না তাদেরকে অবশিষ্ট বর্ণ বা বস্তুর মাঝে [illegible] হবে এবং অবশিষ্ট বর্ণগুলো বিন্যস্ত করে দুই বিন্যাসের গুণফলই [illegible] হবে।

[illegible] BIOGRAPHY শব্দটির বর্ণগুলো কতভাবে সাজানো যায় যাতে [illegible] পাশাপাশি থাকবে না?

[illegible] BIOGRAPHY বর্ণের সংখ্যা = 9; স্বরবর্ণের সংখ্যা = 3, স্বরবর্ণ বাদে [illegible] মাঝে 5টি এবং সামনে ও পিছনে মিলে মোট 7টি স্থান আছে। [illegible] $^7P_3$ উপায়ে সাজানো যায়। অবশিষ্ট বর্ণগুলো $\lfloor 6$ উপায়ে [illegible] পারে।

[illegible] সংখ্যা = $\lfloor 6 \times {^7P_3} = 151200$ **Ans.**

For practice:

[illegible] শব্দটির বর্ণগুলো কতভাবে সাজানো যায় যাতে স্বরবর্ণগুলো [illegible] থাকবে না। **Ans.** 1440

[illegible] EQUATION শব্দটির বর্ণগুলোকে কতভাবে সাজানো যায় যাতে দুটি [illegible] পাশাপাশি থাকবে না? **Ans.** 14400

[illegible] ARRANGE' শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে r দুইটি [illegible] থাকবে না? **Ans.** 900

[illegible] পাশাপাশি না রেখে 'TRIANGLE' শব্দটির অক্ষরগুলো কত [illegible] সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। **Ans.** 14400

Type-06: কতগুলো বস্তু কিছু বিশেষ স্থানে থাকবে

[illegible] নির্দিষ্ট স্থানে থাকবে প্রথমেই ঐ বস্তুগুলোকে ঐ নির্দিষ্ট স্থানে [illegible] হবে। অতঃপর বাকি বর্ণগুলো বাকি স্থানে সাজিয়ে দুই সাজানো [illegible] গুণ করলেই নির্ণেয় বিন্যাস পাওয়া যাবে।

[illegible] DOLPHIN শব্দটির অক্ষরগুলো কতভাবে বিন্যস্ত করা যায় যাতে D ও [illegible] বা শেষে থাকবে না কিন্তু সবসময়ই বিজোড় স্থানে থাকবে?

[illegible] অক্ষরের সংখ্যা = 7। প্রথম ও শেষ স্থান দুটি বিজোড় কিন্তু D ও N [illegible] পারবে না।

[illegible] দুটি বিজোড় স্থানে $^2P_2$ ভাবে দখল করতে পারে। বাকি 5টি [illegible] $\lfloor 5$ উপায়ে দখল করতে পারবে।

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $\lfloor 2 \times \lfloor 5 = 240$ **Ans.**

[illegible] 4, 5, 3, 4, 5, 6 অংকগুলোর মধ্য হতে বিজোড় অংকগুলো সর্বদাই বিজোড় [illegible] সাত অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?

[illegible] স্থানের মধ্যে 4টি বিজোড় স্থান আছে। দুইটি 3 ও দুইটি 5 আছে। 4টি [illegible] স্থানে চারটি বিজোড় অংককে $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2}$ ভাবে বসানো যায়। 3টি অংকের মধ্যে দুইটি 4 ও একটি 6 আছে। এদের 3টি স্থানে $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$ ভাবে বসানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 18$ **Ans.**

For practice:

01. EQUATION শব্দগুলোর কতভাবে সাজানো যায় যাতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো বিজোড় স্থানে বসবে। **Ans.** 2880
02. 3 ও 7 কে প্রথমে বা শেষে রেখে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অংকগুলোকে কত রকমে সাজানো যায়? **Ans.** 240
03. প্রত্যেক অংককে একবার মাত্র ব্যবহার করে 6, 5, 3, 2, 0 অংকগুলো দ্বারা পাঁচ অংকের কতগুলো অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে। **Ans.** 36
04. SECOND শব্দটির অক্ষরগুলো থেকে তিন অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো শব্দ গঠন করা যায় যাতে স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করে। **Ans.** 24
05. a, b, c, d, e, f অংকগুলো থেকে তিনটি অক্ষর দ্বারা গঠিত বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় কর যেখানে প্রতিটি বিন্যাসে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ বর্তমান থাকবে। **Ans.** 96

Type-07: কতগুলো বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত থাকবে

Ex-01 10টি বস্তু থেকে একবারে 5টি নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে?

Sol^n: 5টি স্থানের মধ্যে 2টি স্থান দুটি বিশেষ বস্তু দ্বারা $^5P_2$ প্রকারে পূরণ করা যেতে পারে। বাকি 8টি বস্তু তিনটি স্থানে $^8P_3$ উপায়ে বিন্যস্ত হতে পারে।
$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $^5P_2 \times {^8P_3} = 6720$ **Ans.**

For practice:

01. একটি বালকের 11টি বিভিন্ন বস্তু আছে যার মধ্যে 5টি কালো এবং 6টি সাদা। একটি কালো বস্তু মাঝখানে রেখে সে তিনটি বস্তু এক সারিতে কতভাবে সাজাতে পারে। **Ans.** 450
02. CHEMISTRY শব্দটি হতে পাঁচটি করে নিয়ে কতভাবে সাজানো যাবে যদি M, Y বর্ণ দুটি অবশ্যই থাকে। **Ans.** 4200
03. ZEPHYR শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত রকমে এক সারিতে সাজানো যায় যেন y ও z সারির প্রথমে বা শেষে না থাকে? **Ans.** 288

Type-08: কতগুলো বস্তু কখনোই থাকবে না

৩ n সংখ্যক জিনিস হতে প্রতিবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস করতে হবে যাতে q সংখ্যক জিনিস কখনোই থাকবে না = $^{n-q}P_r$

Ex-02 EQUATION শব্দটি হতে 4টি অক্ষর নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যাবে যাতে T, N থাকবে না?

Sol^n: T, N বাদ দিলে বাকি বর্ণ 6টি, এই 6টি হতে 4টি নিয়ে শব্দ গঠন করা যায়, $^6P_4 = 360$ উপায়ে। **Ans.**

For practice:

01. 10টি বিন্যাসের 5টি একেবারে নিয়ে কতগুলো বিন্যাসের মধ্যে দুটি বিশেষ বস্তু কখনোই থাকবে না? **Ans.** 6720
02. COMPUTER শব্দটির 5টি অক্ষর নিয়ে কতগুলো বিন্যাস করা যায় যাতে M ও U থাকবে না? **Ans.** 720

Type-09: কিছু থাকবে কিছু থাকবে না

Ex-01 REACTION শব্দটির বর্ণগুলো হতে চার অক্ষরবিশিষ্ট কতগুলো বিভিন্ন শব্দ গঠন করা যাবে যেখানে সর্বদা N থাকবে কিন্তু R থাকবে না।

Sol^n: প্রদত্ত শব্দটির বর্ণের সংখ্যা ৪। যেহেতু R থাকবে না সেহেতু R বিবেচনার বাইরে থাকবে। সেক্ষেত্রে বর্ণের সংখ্যা 7। যেহেতু N অবশ্যই থাকবে সেহেতু একে চারটি স্থানে ${}^4P_1$ উপায়ে বসানো যাবে। বাকি ৩টি স্থানে ৬টি বর্ণ ${}^6P_3$ উপায়ে বসানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^4P_1 \times {}^6P_3 = 480$ **Ans.**

Ex-02 DAUGHTER শব্দটির অক্ষরগুলো কতভাবে সাজানো যায় যদি প্রথমে D ও শেষে R না থাকে–

Sol^n: প্রদত্ত শব্দটিতে শব্দের সংখ্যা ৪

$\therefore$ সব বর্ণকে সাজানো যায় $\lfloor 8$ উপায়ে।

$\therefore$ প্রথমে D ও শেষে R রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 6$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 8 - \lfloor 6 = 39600$ **Ans.**

For practice:

01. EQUATION শব্দটির অক্ষরগুলো হতে চার অক্ষরবিশিষ্ট কতগুলো বিভিন্ন শব্দ গঠন করা যাবে যেখানে সর্বদা Q থাকবে কিন্তু N থাকবে না? **Ans.** 480

Type-10: অবস্থান পরিবর্তন না করে

➲ কতগুলো বর্ণ বা বস্তু অবস্থান পরিবর্তন করবে না। যাদের অবস্থান পরিবর্তিত হবে না তাদেরকে তাদের নিজ নিজ স্থানে রাখতে হবে অর্থাৎ তাদের বিন্যাস হবে না। অবশিষ্ট বস্তুগুলোর বিন্যাসই হবে নির্ণেয় বিন্যাস।

Ex-01 PERMUTATION শব্দটির বর্ণগুলোর কোন স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে কত রকমে পুনর্বিন্যাস করা যায়?

Sol^n: প্রদত্ত শব্দটির 11টি অক্ষরের মধ্যে 5টি স্বরবর্ণ ও 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ। যেহেতু স্বরবর্ণগুলো অবস্থান পরিবর্তন করবে না সেহেতু তাদের স্থান নির্দিষ্ট করে 6টি ব্যঞ্জনবর্ণের সাজানো সংখ্যা বের করতে হবে যার মধ্যে T দু'বার আসে এবং তা $\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2}$ উপায়ে গঠন করা যেতে পারে।

PERMUTATION নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা $= 360 - 1 = 359$ **Ans.**

For practice:

01. স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন না করে DIRECTOR শব্দটি কত প্রকারে পুনরায় সাজানো যায়? **Ans.** 59
02. VIOLENT শব্দটি কত প্রকারে বিন্যস্ত করা যায় যখন স্বরবর্ণের স্থান পরিবর্তন হবে না? **Ans.** 24

Type-11: একই ক্রমে থাকবে

➲ কতগুলো বর্ণ বা বস্তু একই ক্রমে থাকবে– এক্ষেত্রে বিন্যাসের অন্তর্ভুক্ত বস্তুসমূহের বর্তমানে যে ক্রম আছে সেই ক্রমে থাকবে অর্থাৎ বস্তু বা বর্ণসমূহ একজাতীয় হলে যে ঘটনা হত, তাই হবে। এ কারণে বর্ণ বা বস্তু একই ক্রমে থাকলে তাদের একজাতীয় বর্ণ ধরতে হবে।

Ex-01 EQUATION শব্দটির বর্ণগুলো হতে কতগুলো শব্দ গঠন যাতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলো ক্রম পরিবর্তন করে না?

Sol^n: ব্যঞ্জনবর্ণগুলো ক্রম পরিবর্তন না করলে এদেরকে একজাতীয় ধরি,

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস $= \frac{\lfloor 8}{\lfloor 3} = 6720$

For practice:

01. স্বরবর্ণের ক্রম পরিবর্তন না করে DIRECTOR শব্দটিকে ক পুনরায় সাজানো যায়? **An**
02. স্বরবর্ণগুলোর ক্রম পরিবর্তন না করে PARALLELISM বর্ণগুলোকে কতভাবে বিন্যস্ত করা যায়? **Ans.**

Type-12: আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে

আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন করবে না– যাদের আপেক্ষি পরিবর্তিত হবে না তাদেরকে নিজ নিজ গোত্রের মধ্যে সাজাতে হবে স্বরবর্ণ ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তিত না হলে স্বরবর্ণের মধ্যে এবং ব্যঞ্জনবর্ণকে ব্যঞ্জনবর্ণের মধ্যে সাজাতে হবে।

Ex-01 DIRECTOR শব্দটির স্বরবর্ণ ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষি পরিবর্তন না করে কতভাবে সাজানো যায়?

Sol^n: বর্ণের সংখ্যা ৪টি, স্বরবর্ণের 3টি এবং ব্যঞ্জনবর্ণ 5টি এর মধ্যে আছে। স্বরবর্ণগুলো $\lfloor 3$ এবং ব্যঞ্জনবর্ণগুলো $\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}$ উপায়ে সাজানো

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor 3 \times \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2} = 360$

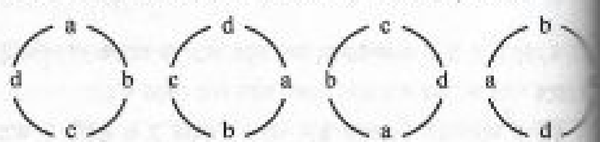
➲ প্রশ্নে পুনর্বিন্যাস বলা থাকে তাহলে শর্ত সাপেক্ষে মোট বিন্যাস হতে 1 বিয়োগ করতে হবে।

For practice:

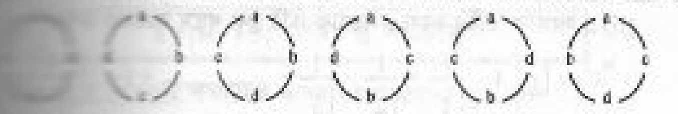
01. স্বরবর্ণ ও ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে EQU শব্দটি কত ভাবে সাজানো যায়।
02. COMPOSER শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায়। যখন ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে।

Type-13: চক্রবিন্যাস

কতগুলো জিনিসকে যখন বৃত্তাকারে সাজানো হয় তখন ঐ বিন্যাস বিন্যাস বলে। এ ক্ষেত্রে কোন বিন্যাসের প্রান্ত থাকে না কিন্তু বাস্তব অবস্থান মুখ্য। দুইটি চক্র বিন্যাস ভিন্ন হবে যদি এদের আপেক্ষি একই না হয়। a, b, c, d সবগুলোকে একত্রে নিয়ে বিন্যা $\lfloor 4 = 24$। তন্মধ্যে 4টি ভিন্ন বিন্যাস নিম্নরূপ– abcd; dab bcda। যদি উক্ত চারটি বিন্যসাকে চক্রবদ্ধ করা হয় তবে–



সুতরাং আমরা দেখি যে, চক্রবিন্যাস চারটি অভিন্ন শুধু চক্রটি হয়েছে। অতএব চক্রবিন্যাসের ক্ষেত্রে প্রকৃত বিন্যাস পাবার জন্য একটি বস্তুকে স্থির রেখে বাকিদের বিন্যস্ত করতে হবে।



[illegible] বিন্যাস হবে (4টি বস্তু নিয়ে) $= |\underline{4-1} = 6$

[illegible] বিভিন্ন বস্তুর সবগুলো নিয়ে চক্রবিন্যাস $= |\underline{n-1}$

[illegible] তিনভাগে বিবেচনা করা যেতে পারে।

[illegible] অবস্থান বিবেচনায় না এনে জিনিসের আপেক্ষিক অবস্থান [illegible] n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের যে কোন একটির অবস্থানকে স্থির [illegible] $(n-1)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= |\underline{n-1}$

[illegible] করার সময় স্বতন্ত্র অবস্থান বিবেচনা করে (স্বতন্ত্র অবস্থান [illegible], বা বিশেষ কোন স্থানে নির্ধারিত বস্তু থাকা)ঃ এক্ষেত্রে কোন [illegible] অবস্থানকে স্থির ধরার প্রয়োজন নেই। n সংখ্যক জিনিসকে যত [illegible] যায় তার বিন্যাস সংখ্যা $= |\underline{n}$ ।

[illegible] বিন্যাসের ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিক এবং ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকের [illegible] হয় তবে n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত

[illegible] $= \frac{^nP_r}{r} = \frac{|\underline{n}}{r|\underline{n-r}}$

[illegible] বিন্যাসের ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিক এবং ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকের [illegible] হয় তবে n সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত

[illegible] $= \frac{^nP_r}{2r} = \frac{|\underline{n}}{2r|\underline{n-r}}$

[illegible] জন লোক একটি গোলটেবিলে বৈঠক করবেন। কত উপায়ে আসন [illegible] পারেন?

[illegible] যেহেতু টেবিলের পার্শ্বের আসনগুলো স্বতন্ত্র নয়। সুতরাং একজনকে [illegible] স্থির রেখে বাকি 11 জনকে বসানো যায় $|\underline{11}$ উপায়ে। **Ans**

[illegible] জন শিক্ষককে গোল টেবিলের সাপেক্ষে কতভাবে সাজানো যাবে?

[illegible] সাপেক্ষে প্রত্যেকের অবস্থান স্বতন্ত্র। ∴ মোট বিন্যাস $= |\underline{15}$ **Ans.**

[illegible] মালার ক্ষেত্রে বিন্যাস সংখ্যা $\frac{|\underline{n-1}}{2}$ কারণ মুক্তা বা মালা উল্টালো [illegible]

[illegible] টি মুক্তা দ্বারা কতভাবে মালা গঠন করা যায়?

[illegible] উপায় $\frac{|\underline{10-1}}{2} = 181440$ **Ans.**

For practice:

[illegible] জন শিক্ষক কতভাবে চক্রাকারে বসতে পারেন? **Ans.** $|\underline{14}$

[illegible] অন্য বিভাগের ছাত্রকে একত্রে না বসিয়ে 5 জন বিজ্ঞানের ছাত্র ও [illegible] জন অন্য বিভাগের ছাত্র কত রকমে একটি গোল টেবিলের পাশে আসন [illegible] পারে? **Ans.** 2880

[illegible] জন B.S.C ক্লাসের ছাত্রকে গোল টেবিলের সাপেক্ষে কতভাবে বসানো [illegible] **Ans.** $|\underline{30}$

[illegible] টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা কত রকমে একটি ব্যান্ডে লাগিয়ে একটি হার তৈরি করা [illegible] পারে? **Ans.** 2520

Type-14: পুনরাবৃত্তিমূলক বিন্যাস

➲ n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তু দ্বারা পুনরাবৃত্তিমূলক বিন্যাস n^r; $[n, r \in N]$

Special case:

যে কোন বস্তু/ অংকের যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে n সংখ্যক বস্তু হতে সর্বোচ্চ r সংখ্যক বস্তু নিয়ে বিন্যাস, $n^1 + n^2 + n^3 + \text{........} + n^r = \frac{n(n^r - 1)}{n-1}$

Ex-01 3টি পুরস্কার 5 জন ছাত্রের মধ্যে কতভাবে দেয়া যায়?

Solⁿ: নির্ণেয় উপায় $= 5^3 = 125$ **Ans.**

Ex-02 যে কোন অংককে যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে 1, 2, 3, 4, 5, 6 অংকগুলো দ্বারা 4 অংকের বেশি নয় এমন কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে?

Solⁿ: সংখ্যা গঠন করার উপায় $= 6^1 + 6^2 + 6^3 + 6^4 = \frac{6(6^4 - 1)}{6-1} = 1554$ **Ans.**

Ex-03 Banglalink বাজারে যে মোবাইল সংযোগ ছেড়েছে তা 11 অংকের যার মধ্যে প্রথম তিনটি 019 নির্দিষ্ট, কোম্পানি কতগুলো লাইন সংযোগ দিতে পারবে?

Solⁿ: ইহা পুনরাবৃত্তিমূলক বিন্যাস, যেহেতু প্রথম তিনটি ঘর নির্দিষ্ট সেহেতু এদের কোন বিন্যাস হবে না। অবশিষ্ট 8টি শূন্য স্থান 0 হতে 9 পর্যন্ত 10টি অংক দ্বারা পূরণ করার উপায় $= 10^8$

∴ নির্ণেয় সংযোগকৃত লাইন সংখ্যা $= 10^8$ **Ans.**

For practice:

01. তিনটি পোস্ট বক্সে 5টি চিঠি কতভাবে ফেলানো যায়? **Ans.** 243
02. পরপর চারটি ফুটবল খেলার ফলাফল কত উপায়ে হতে পারে? **Ans.** 81
03. 5টি আংটি চারটি আঙ্গুলে কতভাবে পরানো যাবে যদি যে কোন সংখ্যক আংটি একটি আঙ্গুলে থাকে। **Ans.** 1024
04. একটি তালার 5টি রিংয়ের প্রতিটিতে 8 অক্ষর আছে। 5টি অক্ষরের একটি মাত্র বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা কতগুলো বিন্যাসের জন্য তালাটি খোলা যাবে না? **Ans.** 32767
05. প্রত্যেক অংককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করে 0, 1, 2, 3, 4 অংকগুলো দ্বারা তিন অংকের বেশি নয় এরূপ কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর। **Ans.** 68
06. 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলোর প্রত্যেকটিতে যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে তিন অঙ্কে কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলোতে দুই বা ততোধিক সমান অঙ্ক থাকবে। **Ans.** 125, 65
07. যে কোন অংককে যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে 1 হতে 9 পর্যন্ত অংকগুলো দ্বারা সর্বোচ্চ তিন অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়? **Ans.** 819

Type-15: অংক ব্যবহার করে সংখ্যা গঠন

Ex-01 1 হতে 9 অংকগুলো ও 0 প্রতীক দ্বারা তৈরি ও 5 দ্বারা বিভাজ্য 1000 এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর কয়টি সংখ্যা আছে, যাদের কোনটিতেই একই অংকের পুনরাবৃত্তি নাই?

Solⁿ: i. তিন অংকের সংখ্যা $= {}^9P_2 + {}^9P_2 - {}^8P_1 = 136$

শেষে 5 থাকলে বাকি 9টি ${}^9P_2$ উপায়ে, শেষে শূন্য থাকলে বাকি 9টি ${}^9P_2$ উপায়ে বসতে পারে। এদের মধ্যে ${}^8P_1$ উপায়ে শুরুতে 0 বসতে পারে।

ii. দুই অংকের সংখ্যা $= {}^9P_1 + {}^9P_1 - 1$ [অনুরূপ যুক্তি]

iii. এক অংকের সংখ্যা = 1 [শুধুমাত্র 5]

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 136 + 17 + 1 = 154 **Ans.**

For practice:

01. 2, 3, 4, 5 অংকগুলো একবার এবং 6 দুইবার পর্যন্ত ব্যবহার করে তিন অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়? **Ans.** 72

02. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অংকগুলোর সবকটি নিয়ে কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে যেন সংখ্যার প্রথমে বা শেষে 4 এবং 5 না থাকে। **Ans.** 2400

Type-16: গঠিত সংখ্যার সমষ্টি

➲ i. n সংখ্যক অংকের একটিকেও পুণরাবৃত্তি না করে r সংখ্যক অংক নিয়ে যে সংখ্যাগুলো গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি, S = $^{n-1}P_{r-1} \times$ r সংখ্যক 1 × (অংকগুলোর যোগফল)

ii. n সংখ্যক অংকের একটিকেও পুণরাবৃত্তি না করে সবকটি অংক নিয়ে যে সংখ্যাগুলো গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি S = $\underline{|n-1} \times$ n সংখ্যক 1 × (অংকগুলোর যোগফল)

iii. n সংখ্যক অংকের যেকোনটিকে পুণরাবৃত্তি করে r সংখ্যক অংক নিয়ে যে সংখ্যাগুলো গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি, S = $n^{r-1} \times$ r সংখ্যক 1 × (অংকগুলোর যোগফল)

iv. n সংখ্যক অংকের যেকোনটিকে পুনরাবৃত্তি করে সবকটি অংক নিয়ে যে সংখ্যাগুলো গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি S = $n^{n-1} \times$ n সংখ্যক 1 × (অংকগুলোর যোগফল)

Ex-01 1, 2, 3, 4, 5 অংকগুলো পুণরাবৃত্তি না করে প্রতিবারে 4 অংকের যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি কত?

Sol^n: নির্ণেয় সমষ্টি, S = $^{5-1}P_{4-1} \times 1111 \times (1+2+3+4+5)$
= 399960 Ans.

Ex-02 1, 2, 3, 4, 5 অংকগুলো পুণরাবৃত্তি না করে প্রতিবারে সবকটি অংক নিয়ে যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি কত?

Sol^n: নির্ণেয় সমষ্টি = $\underline{|5-1} \times 11111 \times (1+2+4+6+9)$
= 5866608 Ans.

Ex-03 1, 2, 3, 4, 6,8 অংকগুলোর যেকোনটি পুণরাবৃত্তি করে প্রতিবারে 5 অংক নিয়ে যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি কত?

Sol^n: নির্ণেয় সমষ্টি = $6^{5-1} \times 11111 \times (1+2+3+4+6+8)$
= 345596544 Ans.

Ex-04 1, 2, 5, 7, 8, 9 অংকগুলো যেকোনটিকে পুণরাবৃত্তি করে প্রতিবারে সবকটি অংক নিয়ে যতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় তাদের সমষ্টি কত?

Sol^n: নির্ণেয় সমষ্টি = $6^{6-1} \times 111111 \times (1+2+5+7+8+9)$
= 27647972352 Ans

For practice:

01. 1, 2, 4, 6, 8 অংকগুলো হতে প্রতিবারে সবগুলো নিয়ে যে সংখ্যাগুলো গঠন করা যায় তাদের যোগফল কত? **Ans:** 5599944

Type-17: ভুল ঠিকানায় চিঠি পোস্ট সংক্রান্ত

➲ (i) n টি চিঠি n টি ভুল ঠিকানায় পোস্ট করার উপায়

$$= \underline{|n}\left[1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{\underline{|n}}\right]$$

(ii) n সংখ্যক চিঠির মধ্যে r সংখ্যক চিঠি ভুল খামে যাওয়ার উপায়

$$= {}^nC_r \times \underline{|r}\left[1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^r \frac{1}{\underline{|r}}\right]$$

$$= {}^nP_r\left[1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^r \frac{1}{\underline{|r}}\right]$$

(iii) n সংখ্যক চিঠির মধ্যে কমপক্ষে p সংখ্যক চিঠি ভুল খামে যাও...

উপায় = $\sum_{r=p}^{n} {}^nC_r D_r$

যেখানে $D_r = \underline{|r}\left[1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^r \ldots\right.$

Ex-01 5 টি চিঠি 5 টি ভুল ঠিকানায় পোস্ট করার উপায় বের কর।

Sol^n: $5!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right] = 44$

For practice:

01. 6 টি চিঠি 6 টি ভুল ঠিকানায় পোস্ট করার উপায় বের কর। An...

Type-18: অভিধান (Dictionary) সংক্রান্ত

Ex-01 **'RANDOM' শব্দের সবগুলো letter সকল সম্ভব উপায়ে ... করে যদি একটি Dictionary তে সাজানো হয়, তাহলে RAN... শব্দটির ক্রম কততম হবে?**

Sol^n: RANDOM শব্দটির word গুলোর alphabetical order A, D, ... O, R।

A দিয়ে শুরু করে মোট শব্দ = $\underline{|5}$ = 120

D দিয়ে শুরু করে মোট শব্দ = $\underline{|5}$ = 120

M দিয়ে শুরু করে মোট শব্দ = $\underline{|5}$ = 120

N দিয়ে শুরু করে মোট শব্দ = $\underline{|5}$ = 120

O দিয়ে শুরু করে মোট শব্দ = $\underline{|5}$ = 120

R দিয়ে গঠিত মোট শব্দও = 120, তাদের মধ্যে একটি হলো RAN...

RAD দিয়ে শুরু শব্দ = $\underline{|3}$ = 6, RAM দিয়ে শব্দ শুরু = $\underline{|3}$ = 6

এখন, RAN দিয়ে শুরু শব্দও = $\underline{|3}$ = 6, তাদের মধ্যে একটি RANDOM,

এই পর্যন্ত মোট word (শব্দ) = 5 × 120 + 6 + 6 = 612

613 তম word (শব্দ) হবে RANDMO এবং 614 তম word (শব্দ) RANDOM।

সুতরাং RANDOM শব্দটি Dictionary এর 614 তম word (শব্দ)...

For practice:

01. **'MOTHER' শব্দের সবগুলো letter সকল সম্ভব উপায়ে বিন্... যদি একটি Dictionary তে সাজানো হয়, তাহলে MOTHER... ক্রম কততম হবে?** An...

Type-19: সেটতত্ত্ব সংক্রান্ত

DAUGHTER শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় যেন
প্রথমে D এবং শেষে R থাকে।
প্রথমে D অথবা শেষে R থাকে।
প্রথমে D থাকে না এবং শেষে R থাকে না।
প্রথমে D থাকে না অথবা শেষে R থাকে না।
প্রথমে D থাকে কিন্তু শেষে R থাকে না।
প্রথমে D থাকে অথবা শেষে R থাকে না।
প্রথমে এবং শেষের কোন স্থানেই D এবং R থাকে না।

মোট বিন্যাস $= n(S) = 8!$
প্রথমে D থাকবে বিন্যাস $= n(D) = 7!$
শেষে R থাকবে বিন্যাস $= n(R) = 7!$
প্রথমে D এবং শেষে R থাকবে বিন্যাস $= n(D \cap R) = 6!$
প্রথমে D এবং শেষে R থাকে বিন্যাস $= n(D \cap R) = 6!$
প্রথমে D অথবা শেষে R থাকে বিন্যাস
$n(D \cup R) = n(D) + n(R) - n(D \cap R) = 7! + 7! - 6! = 9360$
প্রথমে D থাকে না এবং শেষে R থাকে না বিন্যাস $= n(D' \cap R')$
$= n(S) - n(D \cup R) = n(S) - n(D) - n(R) + n(D \cap R)$
$= 8! - 7! - 7! + 6! = 30960$
প্রথমে D থাকে না অথবা শেষে R থাকে না বিন্যাস $= n(D' \cup R')$
$= n(S) - n(D \cap R) = 8! - 6! = 39600$
প্রথমে D থাকে কিন্তু শেষে R থাকে না বিন্যাস $= n(D \cap R')$
$= n(D) - n(D \cap R) = 7! - 6! = 4320$
প্রথমে D থাকে অথবা শেষে R থাকে না বিন্যাস $= n(D \cup R')$
$= n(S) - n(R) + n(D \cap R) = 8! - 7! + 6! = 36000$
প্রথমে এবং শেষের কোন স্থানেই D এবং R থাকে না বিন্যাস
$= \ldots + 6! = 21600$ **Ans.**

For practice:

DAUGHTER শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় যেন প্রথমে R থাকে অথবা শেষে D থাকে না। **Ans: 36000**

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. EXAMINATION শব্দটির ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে কত প্রকারে সাজানো যায়? [17-18]

Solve EXAMINATION এ ব্যঞ্জনবর্ণগুলো X, M, N, T, N এবং স্বরবর্ণগুলো E, A, I, A, I, O

ব্যঞ্জনবর্ণগুলো একত্রে না রেখে সাজানো যাবে

$$= \frac{\lfloor 11}{\lfloor 2\ \lfloor 2\ \lfloor 2} - \frac{\lfloor 7}{\lfloor 2\ \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}$$

$= 4914000$ উপায়ে **Ans.**

02. CALCULUS শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলোকে একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায়? এই বিন্যাসগুলোর কতগুলোতে প্রথমে ও শেষে একই অক্ষর থাকবে? [16-17]

Solve CC ; A ; LL ; UU ; S

মোট বিন্যাস $= \frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040$

১ম ও শেষে C → | C | | | | | | C |

$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$

অনুরূপে L ও U এর ক্ষেত্রেও 180 হবে।

$\therefore$ ১ম ও শেষে একই অক্ষর বিশিষ্ট মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 3 \times 180 = 540$ **Ans.**

03. 4, 5, 6, 7 এবং 8 এর প্রত্যেকটি একটি সংখ্যায় একবার মাত্র ব্যবহার করিয়া তিন অংকের কয়টি বিজোড় সংখ্যা তৈরী করা যায়? [95-96]

Solve শেষ স্থানে 5, 7 কে স্থির রেখে তিন অংকের সংখ্যা $= 2 \times {}^4P_2 = 24$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একজন সংকেতকারকের ছয়টি পতাকা আছে, যাদের মধ্যে একটি সাদা, দুটি সবুজ এবং তিনটি লাল; (i) এক সঙ্গে ছয়টি পতাকা ব্যবহার করে (ii) এক সঙ্গে পাঁচটি পতাকা ব্যবহার করে কতটি বিভিন্ন সংকেত পাবে। [04-05; CUET : 13-14, 04-05]

Solve (i) $\frac{6!}{2!3!} = 60$

(ii)

	W	G	R
a)	1	2	2
b)	1	1	3
c)	0	2	3

(a) এর ক্ষেত্র $= \frac{5!}{2!2!} = 30$ (b) এর ক্ষেত্র $= \frac{5!}{3!} = 20$

(c) এর ক্ষেত্র $= \frac{5!}{3!2!} = 10$

$\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 30 + 20 + 10 = 60$ **Ans.**

02. MATHEMATICS শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকারে সাজানো যায়? তাদের মধ্যে কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে? [03-04]

Solve Total বর্ণ সংখ্যা = 11

M = 2, A = 3, T = 2 H, E, C, I = 1

(i) মোট বিন্যাস $= \frac{11!}{2!3!2!} = 1663200$

(ii) মোট স্বরবর্ণ পাঁচটি স্বরবর্ণগুলোকে একটি ধরে

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{7!}{2! \times 2!} \times \frac{5!}{3!} = 25200$ **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অংকগুলো একবার মাত্র ব্যবহার করে গঠিত ও 5 দ্বারা অবিভাজ্য 7 অংকে বিশিষ্ট সংখ্যাগুলো মানের উর্ধক্রমানুসারে সাজান হল। উক্ত তালিকায় 2000তম সংখ্যাটি কত? [15-16]

Solve প্রথমে 1 রেখে বাকি 6টি অঙ্ক সাজানোর উপায় 6!। এদের মধ্যে 5 দ্বারা অবিভাজ্য সংখ্যা হল $= (6! - 5!) = 600$ টি

সুতরাং প্রথমে 2 দিয়ে শুরু হয় 600×2 তম সংখ্যা পর্যন্ত

" 3 " " " $600 \times 3 = 1800$ তম সংখ্যা পর্যন্ত

" 4 " " " $600 \times 4 = 2400$ " "

$\therefore$ 2000 তম সংখ্যাটি 4 দিয়ে শুরু হবে।

শুরুতে 4 তারপর 1 এমন ক্রমের 5 দ্বারা অবিভাজ্য সংখ্যা $= 5! - 4! = 96$টি

শুরুতে 4 তারপর 2 এমন ক্রমের 5 দ্বারা অবিভাজ্য সংখ্যা $= 96 \times 2 = 192$টি

$\therefore$ শুরুতে 4 তারপর 2 এমন ক্রমের 5 দ্বারা অবিভাজ্য সর্বপরিষ্ঠ সংখ্যাটি হবে 4276531 যা 1992 তম সংখ্যা।

শুরুতে 431 তারপর 2 এমন ক্রমের 5 দ্বারা অবিভাজ্য সংখ্যা $= 3! - 2! = 4$ এবং এই ক্রমের সর্বশেষ সংখ্যা 4312756 যা 1996 তম সংখ্যা।

সুতরাং 1997 তম সংখ্যা 4315267

1998 তম সংখ্যা 4315276

1999 তম সংখ্যা 4315627

$\therefore$ 2000 তম সংখ্যা 4315672 **Ans.**

02. 'COMPUTER' শব্দের অক্ষরগুলো হতে 3টি অক্ষর নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা নির্ণয় কর যার প্রত্যেকটিতে কমপক্ষে একটি স্বরবর্ণ থাকে। [09-10]

Solve স্বরবর্ণ আছে, 3টি।

ব্যঞ্জনবর্ণ আছে 5টি। মোট শব্দ সংখ্যা 8টি।

উপযুক্ত শর্ত মেনে গঠিত শব্দের সংখ্যা $= {}^8P_3 - {}^5P_3 = 276$ **Ans.**

03. 'ENGINEERING' শব্দটির সবকটি বর্ণকে কত বিভিন্ন রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে E তিনটি একত্রে স্থান দখল করবে এবং কতগুলোতে এরা প্রথম স্থান দখল করবে? [08-09]

Solve মোট বর্ণ 11টি, E = 3টি, N = 3টি, G = 2টি, I = 2টি, R = 1টি

$\therefore$ মোট বিন্যাস $= \dfrac{11!}{3!\,3!\,2!\,2!}$

3টি E কে 1টি বর্ণ ধরলে মোট বর্ণ হয় $(11 - 3 + 1) = 9$টি

$\therefore$ 3টি E একত্রে থাকবে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{9!}{3!\,2!\,2!}$

E তিনটিকে ১ম স্থানে রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{8!}{3!\,2!\,2!}$ **Ans.**

04. MATHEMATICS শব্দটির বর্ণগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর এবং স্বরবর্ণগুলো কতভাবে একত্রে থাকবে? [07-08]

Solve

Mathematics শব্দগুলোকে সাজানো যায় $= \dfrac{11!}{2!2!2!}$

4 টি স্বরবর্ণকে 1টি বর্ণ ধরে মোট $(1+7) = 8$ টি অক্ষর নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{8!}{2!2!}$

এখন, 4 টি স্বরবর্ণের নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{4!}{2!}$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকবে $= \dfrac{8!}{2!2!} \times \dfrac{4!}{2!} = 120960$ উপায়ে

Ans.

05. প্রমাণ কর যে, 'Rajshahi' শব্দটির অক্ষরগুলোর বিন্যাস সংখ্যা 'Barisal' শব্দটির অক্ষরগুলোর বিন্যাস সংখ্যার চারগুণ। [06-07]

Solve

Rajshahi-র বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{8!}{2!2!} = 10080$

Barisal এর বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!} = 2520$

$\therefore$ Rajshahi-এর বিন্যাস সংখ্যা $= 4 \times$ Barisal এর বিন্যাস সংখ্যা **(Proved)**

06. TECHNOLOGY শব্দের স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে মো... শব্দ গঠন করা যাবে? [05-06]

Solve

TECHNOLOGY শব্দটিতে

স্বরবর্ণ আছে 3টি (E, O, O) $\therefore$ মোট বর্ণ আছে 10টি

স্বরবর্ণগুলোর নিজেদের মধ্যে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{3!}{2!} = 3$

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো কে পাশাপাশি রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= 3 \times 8!$

07. 'IMMEDIATE' শব্দটির অক্ষরগুলো কত প্রকার সাজানো যা... মধ্যে কতগুলোতে প্রথমে T এবং শেষে A থাকবে? [04-05; CUET...

Solve IMMEDIATE শব্দটিতে 9 টি অক্ষরের মধ্যে

I = 2টি, M = 2টি, E = 2টি, A = 1টি, T = 1টি, D = 1টি

$\therefore$ মোট সাজানোর উপায় $= \dfrac{9!}{2!2!2!} = 45360$

এবং প্রথমে T এবং শেষে A কে রেখে গঠিত শব্দসংখ্যা $= \dfrac{7!}{2!2!2!}$

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে স...

01. 8 (আট) টি ভিন্ন ধরনের মুক্তা কত রকমে একটি ব্যাণ্ডে লাগি... হার তৈরি করা যেতে পারে? [12-13]

A. $7!$ B. $8!$ C. $\dfrac{7!}{2}$ D. $\dfrac{8!}{2}$

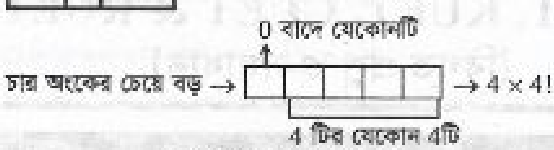
Ans C Solve n সংখ্যক মুক্তা ব্যাণ্ডে লাগিয়ে $\dfrac{(n-1)!}{2}$ ভাবে হার তৈরি করা যাবে।

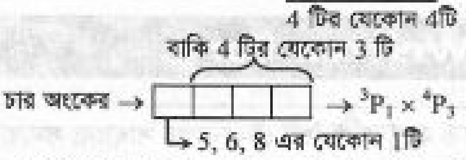
$\therefore$ n = 8 হলে, $\dfrac{(8-1)!}{2} = \dfrac{7!}{2}$ ভাবে সাজানো যায়।

02. 0, 3, 5, 6, 8 অঙ্কগুলো দিয়ে কোন অঙ্কের পুনরাবৃত্তি না করে 4... চেয়ে বড় কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়? [11-12; CUET :14-...

A. 144 B. 192 C. 168 D. কোন...

Ans C Solve





$\therefore$ মোট গঠনকৃত সংখ্যা $= 4 \times 4! + 3 \times {}^4P_3 = 168$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে স...

01. স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে 'ADMISSION' শব্দটির ... কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যাবে? [16-17]

A. 90720 B. 88600 C. 86400 D. 4320 E. ...

Ans C Solve A D M I S S I O N-এর

স্বরবর্ণ A I I O ব্যঞ্জনবর্ণ D M S S N

$\therefore$ স্বরবর্ণ পাশাপাশি না রেখে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{9!}{2! \times 2!} - \dfrac{6!}{2!} \times \dfrac{4!}{2!} = ...$

..., 5, 6, 7 এবং 8 এর প্রত্যেকটি একবার মাত্র ব্যবহার করে তিন অংকের ...টি বিজোড় সংখ্যা তৈরি করা যায়? [15-16]

A. ...টি B. 24টি C. 25টি D. 12টি E. 36টি

Ans B Solve 4, 5, 6, 7, 8 বিজোড় অংক 2 টা

...এর স্থানে একটি বিজোড় $^2C_1$ প্রকারে বসবে।

...2 টি স্থানে 4 টি হতে 2 টির সাজানো সংখ্যা $^4P_2$

নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^2C_1 \times {}^4P_2 = 2 \times 4 \times 3 = 24$

..."Examination" শব্দটি হতে 4 টি অক্ষর নিলে তাদের সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা কত হবে? [14-15]

A. 147, 2324 B. 136, 2454 C. 3021, 226
D. 2150, 215 E. 334, 2354

Ans B Solve Examination শব্দটিতে 11 টি অক্ষরের মাঝে 2টি i, ...2টি n রয়েছে। নিম্নরূপে 4 টি অক্ষর নেওয়া যায়

	সমাবেশ সংখ্যা	বিন্যাস সংখ্যা
...টি বর্ণ একই এবং অপর দুইটি ...।	$^3C_2 = 3$	$\frac{4!}{2!2!} \times {}^3C_2$
...টি বর্ণ একই এবং অপর দুইটি ভিন্ন।	$^3C_1 \times {}^7C_2 = 63$	$63 \times \frac{4!}{2!}$
...সবগুলোই ভিন্ন	$^8C_4 = 70$	$4! \times 70$
	136	2454

...মোট সমাবেশ সংখ্যা = 136, মোট বিন্যাস সংখ্যা = 2454

...শহরের টেলিফোন নম্বর 72, 73 বা 76 দিয়ে শুরু এবং 6 অংক ...হইলে মোট সম্ভাব্য সংযোগ সংখ্যা কত? [10-11]

A. 10^6 B. 10^4 C. 3×10^6 D. 3×10^4 E. 7×10^4

Ans D Solve নির্ণেয় সম্ভাব্য সংযোগ সংখ্যা $= 3 \times 10^4$

..., 6, 0, 5, 9 অংকগুলো দ্বারা ছয় অংক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন ...যেতে পারে? [06-07]

A. 720 B. 120 C. 6 D. 600 E. 480

Ans D Solve 6 টি অংকের 6 টি নিয়ে শব্দ সংখ্যা $= {}^6P_6$

...প্রথমে 0 কে স্থির রেখে বাকী 5 টি অংক নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $= {}^5P_5$

নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^6P_6 - {}^5P_5 = 600$

...যদি $^nP_4 = 14.{}^{n-2}P_3$ হয়, তবে n এর মান হবে- [05-06]

A. 5 বা, 6 B. −7 বা, 8 C. −5 বা, 6 D. 7 বা, 8

Ans D Solve $^nP_4 = 14.{}^{n-2}P_3$

$\frac{n!}{(n-4)!} = 14\frac{(n-2)!}{(n-5)!} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-4)(n-5)!} = 14\frac{(n-2)!}{(n-5)!}$

$\Rightarrow n^2 - n = 14n - 56 \Rightarrow n^2 - 15n + 56 = 0 \therefore n = 7 \text{ or } 8$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

...থেকে 999 সংখ্যাগুলো মধ্যে যেসব সংখ্যায় 1টি জোড় ও 2টি বিজোড় অঙ্ক আছে তাদের মোট সংখ্যা কত? [15-16]

A. None of them B. 300 C. 200 D. 150

Ans B Solve 1টি জোড় ও 2টি ভিন্ন বিজোড় অংক বিশিষ্ট 3 অংকের সংখ্যা $= {}^4C_1 \times {}^5C_2 \times {}^3P_3 = 240$

..., 1টি জোড় ও 2টি অভিন্ন বিজোড় অংক বিশিষ্ট 3 অংকের সংখ্যা

$= {}^4C_1 \times {}^5C_1 \times \frac{3!}{2!} = 60$ $\therefore$ মোট সংখ্যা $= 240 + 60 = 300$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 'courage' শব্দটির বর্ণগুলি নিয়ে কতগুলো বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করা যায় যেন প্রত্যেক বিন্যাসের প্রথমে একটি ব্যঞ্জনবর্ণ থাকে- [13-14]

A. 720 B. 2106 C. 2160
D. 1260 E. None

Ans C Solve ব্যঞ্জনবর্ণ = 3টি $\therefore {}^3P_1 \times {}^6P_6 = 2160$

02. যদি $^nP_r = 240$ এবং $^nC_r = 120$ হয়, তবে n ও r-এর মান নির্ণয় কর। [12-13]

A. 4, 2 B. 16, 4 C. 16, 2
D. 2, 16 E. 4, 16

Ans C Solve $^nP_r = 240 \Rightarrow \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} = 240$ ..... (i)

$^nC_r = 120 \Rightarrow \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \cdot \lfloor r} = 120$ ..... (ii)

$\therefore$ (i) ÷ (ii) $\Rightarrow \lfloor r = 2 \therefore r = 2$

$\therefore \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} = 240 \Rightarrow \frac{n(n-1)\lfloor n-2}{\lfloor n-2} = 240$

$\Rightarrow n^2 - n - 240 = 0 \therefore n = 16$ [যেহেতু $n \neq -15$]

03. 7 টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 3টি স্বরবর্ণ হতে কয়টি শব্দ গঠন করা যাবে যেখানে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ থাকে। [10-11]

A. 120 B. 25200 C. 4200
D. 25000 E. None

Ans E Solve নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^7C_3 \times {}^3C_2 \times 5! = 12600$

04. "PERMUTATION" শব্দটির বর্ণগুলির কোন স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে কত রকমে পুনর্বিন্যাস করা যেতে পারে। [10-11]

A. 359 B. 720 C. 719
D. 358 E. None

Ans A Solve PERMUTATION শব্দটি ব্যঞ্জনবর্ণ 6 টি, স্বরবর্ণ 5 টি এখানে, 2 টি T রয়েছে।

স্বরবর্ণগুলোকে স্থির ধরে ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে নিম্নোক্ত উপায়ে সাজানো যায়।

$\frac{6!}{2!} = 360 \therefore$ পুনর্বিন্যাস সংখ্যা $= 360 - 1 = 359$ টি

05. $\frac{n!}{(n-2)!\,3!} = 5$ হলে n = ? [09-10]

A. −5 B. 0 C. 3!
D. 5 E. 4

Ans Blank Solve $\frac{n!}{(n-2)!\,3!} = 5 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30$

$\Rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \therefore n = 6$ [যেহেতু $n \neq -5$]

06. 6 জন বালক 3 আসনের একটি বেঞ্চে কতভাবে বসতে পারবে? [09-10]

A. 3! B. 6! C. $\frac{6!}{3!}$
D. $^6C_3$ E. None

Ans C Solve $^6P_3 = \frac{6!}{3!}$

SELF TEST [MCQ]

01. ${}^{n}P_4 = 14\ {}^{n-2}P_3$ হয় তবে n এর মান–
A. 7 B. 8 C. A ও B D. None

02. স্বরবর্ণ গুলোকে একত্রে না রেখে **triangle** শব্দটির অক্ষরগুলো কত রকমে সাজানো যায়–
A. 36000 B. 40320 C. 4320 D. Done

03. **Postage** শব্দটির অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় যাতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে?
A. 144 B. 140 C. 122 D. Done

04. 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে?
A. 50 B. 60 C. 70 D. 80

05. 10টি বর্ণ আছে যাদের কিছু সংখ্যক একজাতীয় এবং বাকিগুলো ভিন্ন ভিন্ন। যদি তাদের সবগুলোকে নিয়ে 30240টি শব্দ গঠন করা যায়, তবে কতগুলো বর্ণ এক জাতীয়?
A. 6 B. 50 C. 5 D. 4

06. **Courage** শব্দটির সবগুলো নিয়ে কতগুলো বিন্যাস করা যায় যাদের প্রথমে একটি স্বরবর্ণ থাকবে–
A. 2870 B. 2880 C. 1440 D. None

07. একজন প্রফেসর পদের জন্য 3 জন পদপ্রার্থী এবং 5 জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবে, কত প্রকারে ভোট দেয়া যেতে পারে–
A. 244 B. 245 C. 243 D. None

08. দুইজন **B.Sc.** ক্লাশের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে 14 জন **I.Sc** ক্লাসের ও 10 জন **B.Sc.** ক্লাসের ছাত্রকে কত রকমে একটি লাইনে সাজানো যায়–
A. $\underline{\lfloor 14}$ B. $\underline{\lfloor 14} \times {}^{15}P_{10}$ C. $\underline{\lfloor 15} \times {}^{10}P_5$ D. None

09. 7টি সবুজ, 4টি নীল এবং 2টি লাল কাউন্টার কত রকমে এক সারিতে সাজানো যাবে যার মধ্যে লাল কাউন্টার দুইটি একত্রে থাকবে–
A. 4960 B. 3950 C. 3960 D. 4000

10. একজন লোকের 1টি সাদা, 2টি লাল এবং তিনটি সবুজ পতাকা আছে। একটির উপর আর একটি সাজিয়ে চারটি পতাকা নিয়ে সে কতগুলো বিভিন্ন সংকেত তৈরি করতে পারবে–
A. 40 B. 37 C. 38 D. None

11. **Permutations** শব্দটির বর্ণগুলো থেকে একটি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে যেখানে প্রতি ক্ষেত্রে স্বরবর্ণটি মাঝখানে থাকবে–
A. $\frac{\lfloor 6}{4} + 25$ B. $\frac{\lfloor 6}{4} - 25$ C. 155 D. B ও C

12. 6, 7, 8, 9 অংকগুলো যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে 4 অংকের বেশি নয় এমন কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়?
A. 349 B. 340 C. 350 D. None

13. 6, 7, 8, 9 অংকগুলোর একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে সবকটি অংক নিয়ে যে সংখ্যাগুলো গঠন করা যায় তাদের যোগফল–
A. 19980 B. 199970 C. 199980 D. None

14. ${}^{n+1}P_2 = {}^{3n-3}P_2$ হলে n = ?
A. 9 B. 2 C. A ও B উভয়ই D. None

15. 7 জন মেয়ে বৃত্তাকারে নাচবে। কত প্রকারে পৃথক পৃথকভাবে তারা বৃত্তাকারে দাঁড়াবে?
A. 720 B. 360 C. 340 D. None

16. **Abridgment** শব্দটি হতে 5 টি বর্ণ নিয়ে a ও r সহ 5 অক্ষরবিশিষ্ট কয়টি শব্দ গঠন করা যায়–
A. 6730 B. 6720 C. 5720 D. 5730

17. **Mississippi** শব্দের সবকটি বর্ণকে কতভাবে বিন্যস্ত করা যায়?
A. 34550 B. 34650 C. 35650 D. 3450

18. **Bengali** শব্দটিকে কতভাবে সাজানো যায় যাতে স্বরবর্ণের আ অবস্থান পরিবর্তন না হয়?
A. 35 B. 70 C. 36 D. None

19. 4টি চিঠি ও 4টি নির্দিষ্ট ঠিকানাবিশিষ্ট খাম আছে। কত প্রত্যেকটিই ভুল ঠিকানাবিশিষ্ট খামে রাখা যায়?
A. 90 B. 80 C. 9 D. 8

20. একটি শ্রেণীতে প্রত্যহ 6 পিরিয়ড করে ক্লাশ হয়, কত উপায়ে 5টি বিষয়কে প্রত্যহ বিন্যস্ত করা যায়?
A. 1800 B. 1700 C. 900 D. Done

21. ${}^{(2n+1)}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3:5$ হলে n এর মান-
A. 4 B. 3 C. 5 D. None

22. 10 জন বালকের মধ্যে 3 টি পুরস্কার কতভাবে বিতরণ করা সম্ভব?
A. 10^3 B. 3^{10} C. 10_{P_3} D. 10_{C_3}

23. যদি ${}^{n}P_4 = 6 \times {}^{n}P_3$ হয়, তবে n = ?
A. 6 B. 4 C. 8 D. 9

24. 'daughter' শব্দটির অক্ষরগুলো কতভাবে সাজানো যায় যদি প্রথ ও শেষে 'r' না থাকে?
A. 30960 B. 36960 C. 39660 D. 30960

25. কোনটি বৃহত্তর?
A. ${}^{31}C_{17}$ B. ${}^{31}P_{17}$ C. ${}^{31}C_{18}$ D. ${}^{31}C_{19}$

26. যদি, n! = 2n – 1 হয় তবে n = ?
A. 7 B. 3 C. 1 D. 0

27. স্বরবর্ন ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান পরিবর্তন না করে direct কতভাবে সাজানো যায়?
A. 180 B. 360 C. 900 D. 350

28. দুজন বালিকাকে পাশাপাশি না রেখে x সংখ্যক বালিকাকে y বালকের সাথে (y > x) এক লাইনে কতভাবে বসানো যায়?
A. ${}^{y+1}P_x (y!)$ B. ${}^{y+1}P_x$ C. ${}^{y+1}P_x (x!)$ D. ${}^{x+1}P$

29. **Security** শব্দটির অক্ষরগুলো কত উপায়ে সাজানো যায় স্বরবর্নগুলো একত্রে না থাকে?
A. 4880 B. 36000 C. 1800 D. 1440

30. যদি Time শব্দটির অক্ষরগুলোকে পুনর্বিন্যাস করা হয় তবে ক স্বরবর্ন দ্বারা শুরু হবে?
A. 8 B. 12 C. 11 D. 4

31. প্রথম ও শেষে u রেখে calculus শব্দটির অক্ষরগুলোকে ক সাজানো যায়?
A. 488 B. 3600 C. 180 D. 1440

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	17. ⒶⒷⒸⒹ	25. ⒶⒷ
02. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	18. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷ
03. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	19. ⒶⒷⒸⒹ	27. ⒶⒷ
04. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	20. ⒶⒷⒸⒹ	28. ⒶⒷ
05. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	21. ⒶⒷⒸⒹ	29. ⒶⒷ
06. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	22. ⒶⒷⒸⒹ	30. ⒶⒷ
07. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ	23. ⒶⒷⒸⒹ	31. ⒶⒷ
08. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ	24. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

31.C	30.C	29.B	28.A	27.B	26.C	25.B	[illegible]
23.D	22.A	21.A	20.A	19.C	18.D	17.B	[illegible]
15.A	14.B	13.C	12.B	11.D	10.C	09.C	[illegible]
07.C	06.B	05.C	04.B	03.A	02.A	01.C	[illegible]

সমাবেশ

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী

Introduction: কয়েকটি জিনিস হতে কিছু সংখ্যক জিনিস নিয়ে কত উপায়ে ... করা যায়, এই সমস্যা সমাধানের জন্যই সমাবেশ বিষয়ের প্রবর্তন।

সমাবেশের সংজ্ঞা: কিছু সংখ্যক জিনিস হতে কয়েকটি করে বা সবকটি ... নিয়ে ক্রম নিরপেক্ষভাবে যত রকমে বিভিন্ন দল গঠন বা বাছাই করা ... তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে। abc বর্ণত্রয় হতে ... 2টি করে নিয়ে ab,bc,ca তিনটি দল গঠন করা সম্ভব। এখানে ab ... ভিন্ন দল নয় কেননা সমাবেশের ক্ষেত্রে জিনিসগুলোর ক্রম বিবেচ্য নয়।

সমাবেশ সংখ্যা: কতগুলো জিনিস হতে কয়েকটি করে নিয়ে বা সবগুলো একত্রে ... যত প্রকারে দল গঠন করা যায় সেই সংখ্যাকে সমাবেশ সংখ্যা বলে। ... উদাহরণে a, b, c তিনটি জিনিস হতে প্রতিবারে ২টি করে নিয়ে ... টি দল গঠন করা যায়।

সমাবেশ সংখ্যা = 3

সমাবেশ সংখ্যার প্রতীক: n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিস ... গঠিত সমাবেশ সংখ্যাকে ^nC_r ; C_r^n . C(n, r) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

... নির্ণয়: $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$; n, r ∈ N এবং n ≥ r.

বিন্যাস ও সমাবেশের মধ্যে পার্থক্য:

... বিন্যাসে জিনিসগুলোর ক্রম বিবেচনা করা হয় কিন্তু সমাবেশে জিনিসগুলোর ক্রম বিবেচনা করা হয় না। যেমন :a,b,c জিনিস তিনটি হতে দুইটি করে নিয়ে গঠিত দলগুলো হল : ab,bc,ca ; এখানে ba,ab দুইটি ভিন্ন দল নয়, কিন্তু দুটি ভিন্ন বিন্যাস।

... $^nP_r > {}^nC_r$; (n ≥ r > 1).

... $^nP_r = {}^nC_r$ হবে যদি r = 1 অথবা 0 হয়।

... $^nP_r = {}^nC_r \times r!$

^nC_r এর ধর্মাবলী (অনুসিদ্ধান্ত):

... $^nC_r \in N$

... $^nC_r = 0$ যদি r > n হয়

... $^nC_0 = {}^nC_n = 1$, $^nC_1 = n$

... $^nP_r = {}^nC_r$ হলে r = 0 অথবা r = 1

... $^nC_r = {}^nC_{n-r}$

... $^nC_x = {}^nC_y$ হলে x = y অথবা x + y = n

... $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ [n ≥ r ≥ 1]

... $^nC_r = \dfrac{n}{r}({}^{n-1}C_{r-1})$

... $n({}^{n-1}C_{r-1}) = (n-r+1)\,{}^nC_{r-1}$

... $\dfrac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$

... $^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \text{-----} + {}^nC_n = 2^n$

... $^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \text{-----} = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \text{----} = 2^{n-1}$

... $^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + \text{-----} = {}^{2n+1}C_n = 2^{2n}$

... $^nC_n + {}^{n+1}C_n + {}^{n+2}C_n + {}^{n+3}C_n + \text{-----} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_{n+1}$

^nC_r এর বৃহত্তম মান নির্ণয়:

... n জোড় হলে ^nC_r এর মান বৃহত্তম হবে যদি $r = \dfrac{n}{2}$ হয়

... n বিজোড় হলে ^nC_r বৃহত্তম হবে যদি $r = \dfrac{n-1}{2}$ বা $r = \dfrac{n-1}{2}$ হয়।

⇨ সমাবেশের ক্ষেত্র: কখন সমাবেশ করতে হয়-

প্রশ্নে নিম্নলিখিত কথা উল্লেখ থাকলে সমাবেশ করতে হয়-

i) বেছে নেয়া ii) বাছাই করা iii) দল গঠন iv) কমিটি গঠন v) উপকমিটি গঠন	vi) টিম গঠন vii) ক্ষেত্র গঠন vii) ত্রিভুজের সংখ্যা ix) নিমন্ত্রণ করা x) ভ্রমণ করা	xi) প্রার্থী নির্বাচন xii) সরলরেখা বা কর্ণের সংখ্যা xiii) সংকেত তৈরি xiv) ভাগ করে দেয়া xv) উৎপাদক সংখ্যা

⇨ ভালভাবে পর্যবেক্ষণ কর:

(i) দুটি যোগবোধক চিহ্ন পাশাপাশি না রেখে p সংখ্যক যোগবোধক ও q সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন কতপ্রকারে সাজানো যায় ইহা সমাবেশ কিন্তু দু'জন বালককে পাশাপাশি না রেখে m জন বালক ও n জন বালিকাকে সাজানোর উপায় বিন্যাস।

(ii) একজন ব্যক্তির 12 জন বন্ধুর মধ্যে 8 জন আত্মীয়। কত প্রকারে 7 জন বন্ধুকে আমন্ত্রণ করতে পারেন যাতে 5 জন আত্মীয় থাকবে? কোন ব্যক্তি তার 7 বন্ধুর এক বা একাধিককে একসঙ্গে কতভাবে নিমন্ত্রণ করতে পারে- এগুলো সমাবেশ। কিন্তু কোন ব্যক্তি তার 6 জন বন্ধুকে 3 জন পত্রবাহকের সাহায্যে কতভাবে নিমন্ত্রণ করতে পারবেন ইহা বিন্যাস (পুনরাবৃত্তিমূলক)

(iii) একটি প্রফেসর পদের জন্য 3জন প্রার্থী আছে এবং 5জন লোকের ভোটে একজন নির্বাচিত হবে; কত প্রকারে ভোট দেয়া যেতে পারে- ইহা পুনরাবৃত্তি মূলক বিন্যাস। কিন্তু কোন নির্বাচনে 3 টি শূন্য পদের জন্য 10 জন প্রার্থী এবং একজন নির্বাচক শূন্য পদ সংখ্যার চেয়ে বেশি নয় এমন যে কোন সংখ্যক প্রার্থীর জন্য ভোট দিলে কতপ্রকারে নির্বাচক ভোট দিতে পারেন- ইহা সমাবেশ।

(iv) ঢাকা ও সিলেটে মোট 15 টি বাস যাতায়াত করে। একজন ব্যক্তি কত প্রকারে একটি বাসে ঢাকা হতে সিলেট গিয়ে ভিন্ন বাসে ফিরতে পারবে? ইহা বিন্যাস, আবার, ঢাকা হতে ফরিদপুর যাবার 5টি উপায় আছে ফরিদপুর হতে বরিশাল যাবার 3টি উপায় আছে। একজন লোক কত প্রকারে ঢাকা হতে ফরিদপুর হয়ে বরিশাল যেতে পারবে- ইহা বিন্যাস কিন্তু 9 জন লোকের একটি দলের ভ্রমণের জন্য 2টি গাড়ি আছে। একটিতে অনধিক 7 জন ও অপরটিতে অনধিক 4 জন বসতে পারে। উক্ত দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে- ইহা সমাবেশ।

(v) পতাকা দ্বারা সংকেত গঠন বিন্যাস। তবে কোন কোন ক্ষেত্রে বিন্যাস সমাবেশের মিশ্রিত সমস্যা।

⇨ n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু একবার মাত্র নিয়ে গঠিত

সমাবেশ = $^nC_r = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor r \, \lfloor n-r}$, n, r ∈ N, 0 ≤ r ≤ n

⇨ বিভিন্ন শর্তাধীনে সমাবেশ:

i. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু একবার মাত্র নিয়ে গঠিত সমাবেশ = $^{n-k}C_{r-k}$ (যখন k সংখ্যক বিশেষ বস্তু সর্বদা থাকবে)।

ii. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু একবার মাত্র নিয়ে গঠিত সমাবেশ = $^{n-k}C_r$ (যখন k সংখ্যক বিশেষ বস্তু কখনোই থাকবে না)

iii. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ $^nC_r - {}^{n-k}C_{r-k}$ (যখন k সংখ্যক বিশেষ বস্তু যেকোন বাছাইয়ে একত্রে থাকবে না)

iv. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ $= {}^{n-p-q}C_{r-p}$ (যখন p সংখ্যক বিশেষ বস্তু অবশ্যই থাকবে কিন্তু q সংখ্যক বিশেষ কখনোই থাকবে না)।

Note: A. n সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু ধারাবাহিক ভাবে একটি সারিতে বাছাই করার উপায় = n − r + 1

B. n সংখ্যক বস্তু হতে r সংখ্যক বস্তু ধারাবাহিকভাবে গোলচক্রভাবে বাছাই করার উপায় = $\begin{cases} n \text{ যখন } r < n \\ 1 \text{ যখন } r = n \end{cases}$

v. n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে কমপক্ষে একটি বস্তু একবার মাত্র নিয়ে গঠিত সমাবেশ = $2^n - 1$ = n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে মোট সমাবেশ সংখ্যা

vi. n সংখ্যক একই রকম বস্তু হতে ঠিক r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ = 1 $(r \le n)$

vii. n সংখ্যক একই রকম বস্তু হতে শূন্য বা যেকোন সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ = n + 1

viii. যদি $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n)$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে x_1 সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু ১ম প্রকারের, x_2 সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু ২য় প্রকারের, x_3 সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু ৩য় প্রকারের . . . ., x_n সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু n তম প্রকারের হয়, তবে তা হতে কমপক্ষে একটি বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা = $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) \ldots\ldots (x_n + 1) - 1$ ।

ix. যদি $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n + k)$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে x_1 সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু ১ম প্রকারের, x_2 সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু ২য় প্রকারের, x_3 সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু ৩য় প্রকারের ... , x_n সংখ্যক সমজাতীয় বস্তু n তম প্রকারের এবং বাকী k সংখ্যক বস্তু ভিন্ন ভিন্ন হয় তবে তা হতে কমপক্ষে একটি বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা

$= (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) \ldots\ldots (x_n + 1)2^k - 1$

x. যদি $A = P_1^{x_1} . P_2^{x_2} \ldots\ldots P_k^{x_k}$ হয় যেখানে $P_1 < P_2 < \ldots\ldots < P_k$ ভিন্ন ভিন্ন মৌলিক সংখ্যা এবং $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots, x_k \in N$ হয় তবে

a. 1 এবং A সহ A এর মোট উৎপাদক সংখ্যা
$= (x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1)$

b. 1 এবং A বাদে A এর মোট উৎপাদক সংখ্যা
$= (x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1) - 2$

c. হয় 1 থাকবে অথবা A থাকবে এমন শর্তাধীনে A এর মোট উৎপাদক সংখ্যা $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1) - 1$

d. 1 এবং A সহ A এর সকল উৎপাদক সংখ্যার সমষ্টি

$$= \left(\frac{P_1^{x_1+1} - 1}{P_1 - 1}\right)\left(\frac{P_2^{x_2+1} - 1}{P_2 - 1}\right) \ldots\ldots \left(\frac{P_k^{x_n+1} - 1}{P_k - 1}\right)$$

e. 1 এবং A বাদে A এর সকল উৎপাদক সংখ্যার সমষ্টি $= \left(\frac{P_1^{x_1+1} - 1}{P_1 - 1}\right)$
$$\times \left(\frac{P_2^{x_2+1} - 1}{P_2 - 1}\right) \ldots\ldots \times \left(\frac{P_k^{x_k+1} - 1}{P_k - 1}\right) - (A + 1)$$

f. A এর মোট জোড় উৎপাদক সংখ্যা (যখন P_1 = জোড়) = $x_1 (x_2 + 1)(x_3 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1)$

g. A এর মোট বিজোড় উৎপাদকের সংখ্যা

$$= \begin{cases} (x_2 + 1)(x_3 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1) & \text{যখন } P_1 = 2 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1) & \text{যখন } P_1 \ne 2 \end{cases}$$

h. A কে দুইটি উৎপাদকের গুণফল আকারে প্রকাশ করার উপায়

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1) & \text{যখন A পূর্নবর্গ সংখ্যা নয় ।} \\ \frac{1}{2}\{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots\ldots (x_k + 1) + 1\} & \text{যখন A পূর্নবর্গ সংখ্যা ।} \end{cases}$$

i. A কে দুইটি সহমৌলিক উৎপাদকের গুণফল আকারে প্রকাশ করার উপায় $= 2^k - 1$, যেখানে k , A এর মধ্যে বিভিন্ন মৌলিক উৎপাদকের মোট সংখ্যা

⇨ **বিভিন্ন বস্তুসমূহকে বিভিন্ন দলে বিভক্তিকরণ:**

(A) বস্তু সমূহকে অসমান বিভিন্ন দলে বিভক্তিকরণ ঃ

i. (m + n) সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে দুটি অসমান দলে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম দলে m সংখ্যক এবং ২য় দলে n সংখ্যক বস্তু থাকে) $= \dfrac{\lfloor\underline{m+n}}{\lfloor\underline{m}\ \lfloor\underline{n}}$

ii. (m + n) সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে দুইজন ব্যক্তির মধ্যে অসমান ভাগে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম ব্যক্তি m সংখ্যক এবং ২য় ব্যক্তি n সংখ্যক বস্তু পায়)

$$= \frac{\lfloor\underline{m+n}}{\lfloor\underline{m}\ \lfloor\underline{n}} \times \lfloor\underline{2}$$

iii. (m + n + p) সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে তিনটি অসমান দলে ভাগ ক... উপায় (যাতে ১ম দলে m সংখ্যক,২য় দলে n সংখ্যক এবং ৩য় দ... সংখ্যক বস্তু থাকে) $= \dfrac{\lfloor\underline{m+n+p}}{\lfloor\underline{m}\ \lfloor\underline{n}\ \lfloor\underline{p}}$

iv. (m + n + p) সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে তিন জন ব্যক্তির মধ্যে অ... ভাগে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম ব্যক্তি m সংখ্যক, ২য় ব্যক্তি n স... এবং ৩য় ব্যক্তি p সংখ্যক বস্তু পায়) $= \dfrac{\lfloor\underline{m+n+p}}{\lfloor\underline{m}\ \lfloor\underline{n}\ \lfloor\underline{p}} \times \lfloor\underline{3}$

v. $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে n স... অসমান দলে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম দলে x_1 সংখ্যক, ২য় দ... সংখ্যক, ৩য় দলে x_3 সংখ্যক, ... n তম দলে x_n সংখ্যক বস্তু থাকে...

$$= \frac{\lfloor\underline{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}}{\lfloor\underline{x_1}\ \lfloor\underline{x_2}\ \lfloor\underline{x_3} \ldots\ldots \lfloor\underline{x_n}}$$

vi. $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে n স... ব্যক্তির মধ্যে অসমান ভাগে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম ব্যক্তি x_1 স... ২য় ব্যক্তি x_2 সংখ্যক, ৩য় ব্যক্তি x_3 সংখ্যক, ... n তম ব... সংখ্যক বস্তু পায়)

$$= \frac{\lfloor\underline{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}}{\lfloor\underline{x_1}\ \lfloor\underline{x_2}\ \lfloor\underline{x_3} \ldots\ldots \lfloor\underline{x_n}} \times \lfloor\underline{n}$$

(B) বস্তু সমূহকে সমান বিভিন্ন দলে বিভক্তিকরণ ঃ

i. mn সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে m সংখ্যক সমান দলে ভাগ করার উপা... (যাতে প্রত্যেক দলে n সংখ্যক বস্তু থাকে)

i. $\dfrac{\lfloor\underline{mn}}{(\lfloor\underline{n})^m} \times \dfrac{1}{\lfloor\underline{m}}$ যদি দলগুলোর ক্রম গুরুত্বহীন বা অনির্দিষ্ট হয় ।

ii. $\dfrac{\lfloor\underline{mn}}{(\lfloor\underline{n})^m}$ যদি দলগুলোর ক্রম গুরুত্বপূর্ন বা নির্দিষ্ট হয় ।

Note:

i. 14n সংখ্যক বস্তুগুলোকে 6টি ভাগে যথাক্রমে 2n, 2n, 2n, 2n, 3n, 3... সংখ্যক বস্তু ধারণকারী দলে ভাগ করার উপায় $= \dfrac{\lfloor\underline{14n}}{(\lfloor\underline{2n})^4 (\lfloor\underline{3n})^2} \times \dfrac{1}{\lfloor\underline{4}\ \ldots}$

ii. 14n সংখ্যক বস্তুগুলোকে 6জন ব্যক্তির মাঝে যথাক্রমে, 2n, 2n, 2n... 3n, 3n সংখ্যক বস্তু ভাগ করার উপায় $= \dfrac{\lfloor\underline{14n}}{(\lfloor\underline{2n})^4 (\lfloor\underline{3n})^2} \times \dfrac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{4}\ \lfloor\underline{2}}$

⇨ **বিন্যাস ও সমাবেশের জ্যামিতিক প্রয়োগ**

(A) যদি n সংখ্যক সমতলীয় বিন্দুসমূহের মধ্যে m সংখ্যক বিন্দু... সমরেখ এবং বাকী বিন্দু সমূহের যেকোন তিনটি বিন্দু অসমরেখ হয় ত...

i. n সংখ্যক বিন্দুসমূহ সংযোজন করে $({}^nC_2 - {}^mC_2 + 1)$ সংখ্যক ভি... সরলরেখা পাওয়া যাবে ।

ii. n সংখ্যক বিন্দুসমূহ সংযোজন করে $({}^nC_3 - {}^mC_3)$ সংখ্যক ভি... ত্রিভুজ গঠন করা যাবে ।

iii. n সংখ্যক বিন্দু সমূহ সংযোজন করে $({}^nC_4 - {}^mC_3\ {}^nC_1 - {}^mC_4 \ldots$ সংখ্যক ভিন্ন চতুর্ভুজ গঠন করা যাবে ।

[illegible] সংখ্যক সমতলীয় বিন্দুসমূহের মধ্যে যেকোন তিনটি বিন্দু অসমরেখ [illegible]

[illegible] বিন্দুর সাহায্যে সংযোজক সরলরেখাসমূহের ছেদ বিন্দুর সংখ্যা =

[illegible] সংখ্যক বিন্দুসমূহ কোন n বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ হয় [illegible] বহুভুজের মোট কর্ণের সংখ্যা = $^nC_2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$ এবং এই [illegible] বহুভুজের অভ্যন্তরে ছেদবিন্দুর সংখ্যা = $^nC_4$

[illegible] একটি নির্দিষ্ট সমতলে n সংখ্যক সরলরেখার যেকোন দুইটি [illegible] সমান্তরাল না হয় এবং যেকোন তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু না হয় [illegible] সরলরেখাসমূহ দ্বারা ঐ সমতলের বিভাজন সংখ্যা হবে,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n+2}{2}$$

[illegible] m সংখ্যক সমান্তরাল সরলরেখা এবং n সংখ্যক সমান্তরাল [illegible] একটি নির্দিষ্ট সমতলে পরস্পরকে ছেদ করে তবে ঐ সমতলে [illegible] সংখ্যা হবে = $^mC_2 \times {^nC_2} = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$

[illegible] যদি n সংখ্যক সমান্তরাল সরলরেখা এবং n সংখ্যক সমান্তরাল [illegible] একটি নির্দিষ্ট সমতলে পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে তবে ঐ [illegible] যেকোন আকারের মোট আয়তক্ষেত্রের সংখ্যা = $\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ এবং [illegible] সংখ্যা

$\frac{[illegible](2n-1)}{6}$

[illegible] সংখ্যক সমান্তরাল সরলরেখা এবং p সংখ্যক ($n < p$) সমান্তরাল [illegible] একটি নির্দিষ্ট সমতলে পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে তবে ঐ [illegible] যেকোন আকারের মোট আয়তক্ষেত্রের সংখ্যা = $\frac{np}{4}(n-1)(p-$ [illegible]

[illegible] ক্ষেত্রের সংখ্যা = $\sum_{r=1}^{n}(n-r)(p-r)$ ।

[illegible] সারি এমন থাকে যে, ১ম সারিতে x_1 সংখ্যক বর্গ, ২য় সারিতে [illegible] বর্গ, ৩য় সারিতে x_3 সংখ্যক .... এবং n–তম সারিতে x_n [illegible] বর্গ আছে। যদি m সংখ্যক 'y' দ্বারা ঐ বর্গসমূহ এমন ভাবে পূরণ [illegible] যাতে প্রত্যেক সারিতে কমপক্ষে একটি 'y' থাকে তবে তার পূরন [illegible] উপায়

$[illegible] + {^{x_1}C_2}x^2 + \ldots + {^{x_1}C_{x_1}}x^{x_1}) \times ({^{x_2}C_1}x + {^{x_2}C_2}x^2 + \ldots +$
$[illegible]) \times ({^{x_3}C_1}x + {^{x_3}C_2}x^2 + \ldots + {^{x_3}C_{x_3}}x^{x_3}) \times \ldots$
$[illegible] + {^{x_n}C_2}x^2 + \ldots + {^{x_n}C_{x_n}}x^{x_n})$ এর বিস্তারে x^m এর সহগ ।

মনে রাখার গুরুত্বপূর্ণ টেকনিক

[illegible] ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করলে উপরের পৃষ্ঠের সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল r [illegible] উপায় = $\begin{cases} r-1 & \text{যখন } 2 \le r \le 7 \\ 13-r & \text{যখন } 8 \le r \le 12 \end{cases}$

[illegible] ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করলে উপরের পৃষ্ঠের সংখ্যাত্রয়ের যোগফল r [illegible] উপায় = $\begin{cases} {^{r-1}C_2} & \text{যখন } 3 \le r \le 8 \\ 25 & \text{যখন } r = 9 \\ 27 & \text{যখন } r = 10 \text{ এবং } 11 \\ 25 & \text{যখন } r = 12 \\ {^{20-r}C_2} & \text{যখন } 13 \le r \le 18 \end{cases}$

iii. ^nC_r, n দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি n মৌলিক সংখ্যা ($1 \le r \le n-1$) হয়।

iv. n বাহু বিশিষ্ট বাহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর সাহায্যে ত্রিভুজের সংখ্যা $= \frac{1}{6}(n-4)(n-5)$ ($n > 5$) (যেখানে ত্রিভুজগুলোর কোন বাহুই বহুভুজের কোন বাহুর সাধারণ হবে না।)

v. একটি সমতলে n সংখ্যক সরলরেখা আছে, যার যেকোন দুটি সরলরেখা সমান্তরাল নয় এবং যেকোন তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু নয়। তাদের ছেদবিন্দুসমূহ সংযোগ করা হল। এই ছেদবিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত নতুন সরলরেখা সমূহের সংখ্যা-

$= \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: ^nC_r এর মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

Ex-01 $^nC_2 = \frac{2}{5} \times {^nC_4}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $5 \times \frac{\lfloor n}{\lfloor 2 \, \lfloor n-2} = \frac{2\lfloor n}{\lfloor 4 \, \lfloor n-4}$

$\Rightarrow \frac{5}{2(n-2)(n-3)\lfloor n-4} = \frac{2}{24\lfloor n-4}$

$\Rightarrow (n-2)(n-3) = 30$

$\Rightarrow n^2 - 5n - 24 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+3) = 0$

$\therefore n = 8$ [$\because n \neq -3$] **Ans.**

Ex-02 $^{18}C_r = {^{18}C_{r+2}}$ হলে $^rC_5$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $^{18}C_r = {^{18}C_{r+2}} \Rightarrow r + r + 2 = 18 \Rightarrow 2r = 16 \therefore r = 8$

$\therefore {^rC_5} = {^8C_5} = 56$ **Ans.**

For practice:

01. $^nC_r : {^nC_{r+1}} : {^nC_{r+2}} = 1:2:3$ হলে n ও r এর মান নির্ণয় কর। Ans. $n = 14$; $r = 4$
02. $^{20}C_r$ এর বৃহত্তম মান নির্ণয় কর। Ans. 184756
03. $^{39}C_r$ এর বৃহত্তম মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{39!}{20!\,19!}$

Type-02: বিভিন্ন কমিটি/টিম/দল গঠন ও ভ্রমন করা সংক্রান্ত

Ex-01 13 জন বালকের একটি দলে 5 জন বালক সেনা আছে। কত প্রকারে 7 জন বালক বাছাই করা যায় যাতে –
(i) ঠিক 3 জন বালক সেনা থাকবে।
(ii) অন্তত 3 জন বালক সেনা থাকবে।
(iii) বড়জোড় 2 জন বালক সেনা থাকবে।

Sol^n: (i) বাছাই করার উপায় = $^5C_3 \times {^8C_4} = 700$

(ii) দলটি নিম্নোক্ত উপায়ে বাছাই করা যায় –

বালক সেনা (5)	অন্যান্য বালক (8)	সমাবেশ সংখ্যা
3	4	$^5C_3 \times {^8C_4} = 700$
4	3	$^5C_4 \times {^8C_3} = 280$
5	2	$^5C_5 \times {^8C_2} = 28$
		মোট সংখ্যা = 1008

(iii) বালক সেনা (5)	অন্যান্য বালক (8)	সমাবেশ সংখ্যা
2	5	${}^5C_2 \times {}^8C_5 = 560$
1	6	${}^5C_1 \times {}^8C_6 = 140$
0	7	${}^5C_0 \times {}^8C_7 = 8$
		মোট সংখ্যা = 708 **Ans.**

Ex-02 9 জন লোকের একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করবে যার একটিতে সাতজনের বেশি এবং অপরটিতে 4 জনের বেশি ধরে না। দলটি কত রকমে ভ্রমণ করতে পারবে?

Sol^n: দলটির ভ্রমণ করার উপায় ঃ

প্রথম যানবাহন (A)	দ্বিতীয় যানবাহন (B)	ভ্রমণের উপায়
(i) 7	2	${}^9C_7 \times {}^2C_2 = 36$
(ii) 6	3	${}^9C_6 \times {}^3C_3 = 84$
(iii) 5	4	${}^9C_5 \times {}^4C_4 = 126$

যখন গাড়ি A তে 7 জন যাবে অবশিষ্ট 2 জনই গাড়ি B তে যাবে, অর্থাৎ দুই জনের মধ্যে দুই জনই যাবে।

$\therefore$ মোট ভ্রমণের উপায়= 36 +84 + 126 = 246 **Ans.**

Ex-03 দুটি গাড়ি নিয়ে 20 জনের একদল ছাত্র বনভোজনে যাবে। প্রতিটি গাড়ির ধারণ ক্ষমতা 20। কতভাবে এরা গাড়িতে যেতে পারে?

Sol^n: A ও B গাড়িতে নিম্নোক্ত উপায়ে ভ্রমন করা যেতে পারে,

গাড়ি (A)	গাড়ি (B)
20	0
19	1
18	2
………	………
1	19
0	20

$\therefore$ মোট ভ্রমণ উপায়-

$= {}^{20}C_{20} + {}^{20}C_{19} \times {}^1C_1 + {}^{20}C_{18} \times {}^2C_2 + \text{-------} + {}^{20}C_0 \times {}^{20}C_{20}$

$= {}^{20}C_{20} + {}^{20}C_{19} + {}^{20}C_{18} + \text{--------} + {}^{20}C_0$

$= 2^{20} = 1048576$ **Ans.**

Ex-04 8 জন ভদ্রলোক ও 6 জন ভদ্রমহিলা পরিচালকবৃন্দের সমন্বয়ে গঠিত একটি পরিষদ থেকে 5 জন ভদ্রলোক ও 3 জন ভদ্রমহিলার সমন্বয়ে একটি কমিটি কত রকমে গঠন করা যেতে পারে?

Sol^n: 8 জন ভদ্রলোক হতে 5 জন ভদ্রলোক ${}^8C_5$ উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে। অনুরূপভাবে 6 জন ভদ্রমহিলা হতে 3 জন ভদ্রমহিলা হতে ${}^6C_3$ উপায়ে বাছাই করা যেতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট কমিটির সংখ্যা = ${}^8C_5 \times {}^6C_3 = 1120$ **Ans.**

For practice:

01. তিন জন কলা বিভাগের ও পাঁচ জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্রের মধ্য হতে চার জনের একটি কমিটি গঠন করতে যদি প্রত্যেক কমিটিতে অন্তত একজন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র থাকে তাহলে কত ভাবে কমিটি বাছাই করা যাবে? **Ans. 70**

02. 14 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বল করতে পারে এবং 2 জন উইকেট রক্ষা করতে পারে। অন্তত একজন উইকেট রক্ষক ও 3 জন বোলার নিয়ে কত প্রকারে 11 জনের একটি ক্রিকেট টিম গঠন করা যেতে পারে? **Ans. 342**

Type-03: সরলরেখা/কর্ণ/ক্ষেত্রের সংখ্যা নির্ণয় সংক্রান্ত

Ex-01 10 টি বাহু বিশিষ্ট একটি সমতল ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলো সংযোজন করে কত গুলো (i) ত্রিভুজ (ii) সরলরেখা (iii) কর্ণ (iv) চতুর্ভুজ পাওয়া যাবে।

Sol^n: (i) ত্রিভুজের সংখ্যা = ${}^{10}C_3 = 120$

(ii) সরলরেখার সংখ্যা = ${}^{10}C_2 = 45$

(iii) কর্ণের সংখ্যা = ${}^{10}C_2 - 10 = 35$

(iv) চতুর্ভুজের সংখ্যা = ${}^{10}C_4 = 210$

Ex-02 কোন সমতলে অবস্থিত 15টি বিন্দুর মধ্যে 5টি বিন্দু সমরেখ অন্য তিনটি বিন্দু সমরেখ নয়। ঐ 15টি বিন্দু সংযোজন করে ক… সরলরেখা ও ত্রিভুজ পাওয়া যাবে?

Sol^n: যে কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ না হলে, 15টি হতে যে কোন দুইটি … ${}^{15}C_2$ টি রেখা পাওয়া যায় কিন্তু 5 টি বিন্দু একই সরলরেখা আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সংখ্যা = ${}^{15}C_2 - {}^5C_2 + 1 = 96$

অনুরূপভাবে, ত্রিভুজের সংখ্যা = ${}^{15}C_3 - {}^5C_3 = 455 - 10 = 445$

Ex-03 কয়টি ত্রিভুজের বাহুর মান 4,5,6,7 এর একটি হবে?

Sol^n: 4,5,6,7এর যে কোন দুইটি সংখ্যার যোগফল অপর সংখ্যা অপেক্ষা… সুতরাং প্রতিটি ব্যবহার করে গঠিত ত্রিভুজ সংখ্যা = ${}^4C_3 = 4$।

$\therefore$ একটি সংখ্যা একাধিকবার ব্যবহার করা সম্ভব সুতরাং নিম্নলি… দ্বারা ত্রিভুজ সম্ভবঃ

{4,4,5},{4,4,6},{4,4,7},{4,4,4}

{5,5,5} ———————

{6,6,4} ———————

{7,7,5} ———————

$\therefore$ মোট ত্রিভুজ সংখ্যা = 16 + 4 = 20

Ex-04 দুটি সমান্তরাল সরলরেখার উপর 5টি ও 12টি বিন্দু দেয়া … বিন্দুগুলো ব্যবহার করে কতগুলো ত্রিভুজ গঠন করা যাবে?

Sol^n: 5টি বিন্দুর যেকোন একটির সাথে 12টি বিন্দুর যেকোন দুইটি … ত্রিভুজ পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে ত্রিভুজের সংখ্যা $5 \times {}^{12}C_2$। একই… বিন্দুর একটির সাথে 5 টি বিন্দুর দুইটি যোগ করলে ত্রিভু… $= 12 \times {}^5C_2$।

$\therefore$ মোট ত্রিভুজের সংখ্যা = $5 \times {}^{12}C_2 + 12 \times {}^5C_2$

For practice:

01. একই তলে সমবিন্দু রেখার দুটি সেটের একটিতে 8টি এবং অপর… সরলরেখা অবস্থিত এবং কোন দুইটি সমান্তরাল নয়। এদের … সংখ্যা নির্ণয় কর।

02. শূন্যে অবস্থিত n সংখ্যক বিন্দুর মধ্যে কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ … কোন চারটি এক সমতলে নয়, কেবল P সংখ্যক বিন্দু এক সমতলে … ঐ বিন্দুগুলো দ্বারা কতগুলো ভিন্ন সমতল গঠন করা যেতে পারে।

Ans: $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \frac{1}{6}P(P-1)(P-2)$…

03. দেখাও যে, n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের $\frac{1}{2}n(n-3)$ সংখ্যক ক… আরও দেখাও যে, এর কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখা দ্বারা $\frac{1}{6}n(n-$… সংখ্যক বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে।

Type-04: মোট সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয়

➲ n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রতিবারে যে কোন সংখ্যক নিয়ে গঠি…
$= {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \text{.........} + {}^nC_n = 2^n - 1$

➲ n সংখ্যক বস্তুর p সংখ্যক এক প্রকার, q সংখ্যক অপর এক প্রকার, … ভিন্ন এক প্রকার, বাকিগুলো বিভিন্ন s সংখ্যক হলে এদের মধ্যে যে … যেকোন সংখ্যক বার নিয়ে মোট সমাবেশ = (p+1) (q+1) (r+1)2…

[illegible] জন পরীক্ষায় কৃতকার্য হতে হলে 6টি বিষয়ের প্রতিটিতে ন্যূনতম নম্বর [illegible] হয়, পরীক্ষার্থী কত উপায়ে অকৃতকার্য হতে পারে?

[illegible] একজন ছাত্র প্রতিটি বিষয়েই হয় পাস করবে নয়তো ফেল করবে। উহা [illegible] 2^6 উপায়ে। উহাদের মধ্যে একটি উপায় আছে যাতে সবগুলো [illegible] পাস।

[illegible] উপায় সংখ্যা $= 2^6 - 1$ **Ans.**

[illegible] একটি ফলের ঝুড়িতে 5টি আম, 4টি কলা ও 3টি আপেল আছে। কত [illegible] এক বা একাধিক ফল ঝুড়িটি হতে বেছে নেওয়া যায়?

[illegible] ঝুড়ি হতে আম নেয়া যায় 6 ভাবে। কারণ 1 থেকে 5 যে কোন সংখ্যক [illegible] ভাবে)+ কোনটি নয় (1 ভাবে) অনুরূপে কলা ও আপেল নেয়া যায় 5 [illegible] ভাবে। কিন্তু একটি ক্ষেত্রে একটি উপায় আছে যাতে কোন ঝুড়ি থেকেই [illegible] নেয়া হয়নি।

[illegible] উপায় সংখ্যা $= (5+1)(4+1)(3+1) - 1 = 119$ **Ans.**

[illegible] একটি ঝুড়িতে 3টি আম, 4টি কলা, 5টি আনারস ও 2টি কমলা [illegible] আনারস আছে। যদি প্রত্যেক প্রকারের ফল বিভিন্ন আকারের [illegible] প্রত্যেক প্রকারের ফল অন্তত একটি করে নিয়ে কতভাবে [illegible] করা যাবে?

[illegible] করার উপায় $= (2^3-1)(2^4-1)(2^5-1)(2^2-1)(2^1-1)$
$= 9765$ **Ans.**

[illegible] একটি প্রশ্নপত্রে 10টি প্রশ্ন আছে। এর মধ্যে 3টির বিকল্প আছে। [illegible] হতে এক বা একাধিক প্রশ্ন কতভাবে বাছাই করা যাবে?

[illegible] বিকল্পসহ প্রশ্ন বাছাই করা যাবে 3 ভাবে এবং বিকল্পসহ 3টি প্রশ্ন [illegible] যে কোন একটি বাছাই করা যাবে 2 উপায়ে।

[illegible] বাছাই সংখ্যা $= 3^3 \times 2^7 - 1 = 3455$ **Ans.**

[illegible] জন পরীক্ষায় 8টি আলাদা বিষয়ের প্রতিটিতে আলাদা আলাদা ভাবে [illegible] করতে হয়।
[illegible] শিক্ষার্থী কত ভাবে ফেল করতে পারে?

[illegible] ফেল করতে পারে $^8C_1$ ভাবে
[illegible] ফেল করতে পারে $^8C_2$ ভাবে
[illegible] মোট ফেল করতে পারে $= {^8C_1} + {^8C_2} + \dots + {^8C_8}$ ভাবে
$= 2^8 - 1$ ভাবে। **Ans.**

[illegible] একজন I.S.C পরীক্ষার্থীর 5 খানা বীজগণিত, 6 খানা জ্যামিতি, 3 খানা [illegible] ও একখানা করে পদার্থ, রসায়ন, জীববিদ্যা বই আছে, প্রতিবারে যে [illegible] যে কোন সংখ্যকবার নিয়ে কত রকমে বই বাছাই করা যায়?

[illegible] করার উপায় $= (5+1)(6+1)(3+1)2^3 - 1 = 1343$ **Ans.**

For practice:

[illegible] প্রশ্নের প্রত্যেকটির বিকল্প থাকলে একজন পরীক্ষার্থী এক বা একাধিক [illegible] কতভাবে নির্বাচন করতে পারে? **Ans.** 59048

[illegible] চিঠির 6টি একটি বাড়িতে ও 4টি অন্য1টি বাড়িতে একজন পিওন [illegible] বিতরণ করতে পারে। **Ans.** 420

[illegible] থলিতে 14টি 10 টাকার, 9টি 5টাকার, 4টি 2 টাকার এবং 7টি এক [illegible] নোট আছে। তুমি কত বিভিন্নভাবে কোন দাতব্য তহবিলে দান করতে [illegible] **Ans.** 5999

[illegible] ব্যক্তির 6 জন বন্ধু আছে। তিনি কত প্রকারে এক বা একাধিক বন্ধুকে [illegible] দিতে পারেন? **Ans.** 63

Type-05: বিশেষ বস্তু বা ব্যক্তিকে রেখে বা বাদ দিয়ে

(A) দুইজন নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে

Ex-01 (i) সর্বদা অন্তর্ভুক্ত করে
(ii) সর্বদা বর্জন করে 12 জন ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনকে কত প্রকারে বাছাই করা যায়?

Sol^n: (i) বাছাই করার উপায় $= {^{12-2}C_{5-2}} = 120$
(ii) বাছাই করার উপায় $= {^{12-2}C_5} = 252$ **Ans.**

Ex-02 দুইজনকে একত্রে না নিয়ে 7 জন ব্যক্তি হতে 5 জনকে কতভাবে বাছাই করা যায়?

Sol^n: 2 জনকে একত্রে নিয়ে 7 জন হতে 5 জনকে ${^{7-2}C_{5-2}} = {^5C_3} = 10$
7 জন এর 5 জনকে $^7C_5$ ভাবে বাছাই করা যায়।
$\therefore$ 2 জনকে একত্রে না নিয়ে বাছাই সংখ্যা $= {^7C_5} - 10 = 11$ **Ans.** 11

For practice:

01. EQUATION শব্দটি হতে প্রতিবারে 5 টি অক্ষর নিয়ে কত ভাবে বাছাই করা যায় যাতে ব্যাঞ্জনবর্ণ তিনটি সর্বদাই থাকবে? **Ans :** 10
02. EQUATION শব্দটি হতে প্রতিবারে 5টি বর্ণ নিয়ে সমাবেশ কর যাতে q, n থাকবে কিন্তু c, t থাকবে না। **Ans.** 4
03. দুইজন লোকের যথাক্রমে 10 খানা ও 12 খানা পুস্তক আছে। কত রকমে এগুলো বিনিময় করা যেতে পারে (a) যদি একখানার পরিবর্তে একখানা (b) দুখানার পরিবর্তে দুইখানা পুস্তক নেয়া হয়। **Ans.** 120, 2970

Type-06: যখন একজাতীয় কিছু একই সঙ্গে থাকে

Ex-01 DEGREE শব্দটির অক্ষরগুলো হতে প্রতিবারে যে কোন 4টি অক্ষর নিয়ে কতভাবে বাছাই করা যায়?

Sol^n: DEGREE শব্দটিতে 3টি e এবং বাকি তিনটি ভিন্ন। নিম্নোক্ত উপায়ে বাছাই করা যায়-
(i) 3টি e ও 1 টি ভিন্ন $\rightarrow 1 \times {^3C_1} = 3$
(ii) 2টি e ও 2 টি ভিন্ন $\rightarrow 1 \times {^3C_2} = 3$
(iii) 1টি e ও 3 টি ভিন্ন $\rightarrow 1 \times {^3C_3} = 1$
মোট সংখ্যা = 7 **Ans.** 7

Ex-02 MOHAMMADAN শব্দটি হতে চারটি বর্ণের কতগুলো সমাবেশ গঠন করা যাবে ?

Sol^n: বর্ণের সংখ্যা = 10, 3টি A ও 3টি M ও 4টি ভিন্ন
(i) 3 টি A এবং (M,O,H,D,N) হতে 1 টি $\rightarrow 1 \times {^5C_1} = 5$
(ii) 2 টি A এবং 2 টি M $\rightarrow 1 = 1$
(iii) 2 টি A এবং (M,O,H,D,N) হতে ভিন্ন দুইটি $\rightarrow 1 \times {^5C_2} = 10$
(iv) 3 টি M এবং (A,O,H,D,N) হতে একটি $\rightarrow 1 \times {^5C_1} = 5$
(v) 2 টি M এবং (A,O,H,D,N) হতে ভিন্ন দুইটি $\rightarrow 1 \times {^5C_2} = 10$
(vi) (A, M, O, H, D, N) হতে 4 টি $\rightarrow {^6C_4} = 15$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা = 5+1+10+5+10+15 = 46 **Ans.**

For practice:

01. TITOO শব্দটির তিনটি বর্ণ নিয়ে কতগুলো সমাবেশ গঠন করা যাবে। **Ans:** 5
02. WAKYTAKY শব্দটির অক্ষরগুলো হতে প্রতিবার চারটি করে নিয়ে কত ভাবে বাছাই করা যায়? **Ans:** 26
03. PROFESSOR শব্দটির অক্ষরগুলো থেকে প্রতিবার চারটি করে নিয়ে কতভাবে বাছাই করা যাবে? **Ans :** 48

Type-07: দলে বিভক্তকরণ

i. $(m + n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে দুটি অসমান দলে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম দলে m সংখ্যক এবং ২য় দলে n সংখ্যক বস্তু থাকে) $= \dfrac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}$

ii. $(m + n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে দুইজন ব্যক্তির মধ্যে অসমান ভাগে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম ব্যক্তি m সংখ্যক এবং ২য় ব্যক্তি n সংখ্যক বস্তু পায়) $= \dfrac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n} \times \lfloor 2$

iii. $(m + n + p)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে তিনটি অসমান দলে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম দলে m সংখ্যক,২য় দলে n সংখ্যক এবং ৩য় দলে p সংখ্যক বস্তু থাকে) $= \dfrac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \lfloor n \lfloor p}$

iv. $(m + n + p)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে তিন জন ব্যক্তির মধ্যে অসমান ভাগে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম ব্যক্তি m সংখ্যক, ২য় ব্যক্তি n সংখ্যক এবং ৩য় ব্যক্তি p সংখ্যক বস্তু পায়) $= \dfrac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m \lfloor n \lfloor p} \times \lfloor 3$

v. $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে n সংখ্যক অসমান দলে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম দলে x_1 সংখ্যক, ২য় দলে x_2 সংখ্যক, ৩য় দলে x_3 সংখ্যক, ... n তম দলে x_n সংখ্যক বস্তু থাকে)

$$= \frac{\lfloor x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n}{\lfloor x_1 \lfloor x_2 \lfloor x_3 \dots\dots \lfloor x_n}$$

vi. $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে n সংখ্যক ব্যক্তির মধ্যে অসমান ভাগে ভাগ করার উপায় (যাতে ১ম ব্যক্তি x_1 সংখ্যক, ২য় ব্যক্তি x_2 সংখ্যক, ৩য় ব্যক্তি x_3 সংখ্যক, ... n তম ব্যক্তি x_n সংখ্যক বস্তু পায়)

$$= \frac{\lfloor x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n}{\lfloor x_1 \lfloor x_2 \lfloor x_3 \dots\dots \lfloor x_n} \times \lfloor n$$

(B) বস্তু সমূহকে সমান বিভিন্ন দলে বিভক্তিকরণ ঃ

i. mn সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে m সংখ্যক সমান দলে ভাগ করার উপায় (যাতে প্রত্যেক দলে n সংখ্যক বস্তু থাকে)

i. $\dfrac{\lfloor mn}{(\lfloor n)^m} \times \dfrac{1}{\lfloor m}$ যদি দলগুলোর ক্রম গুরুত্বহীন বা অনির্দিষ্ট হয়।

ii. $\dfrac{\lfloor mn}{(\lfloor n)^m}$ যদি দলগুলোর ক্রম গুরুত্বপূর্ন বা নির্দিষ্ট হয়।

Note:

i. 14n সংখ্যক বস্তুগুলোকে ৬টি ভাগে যথাক্রমে 2n, 2n, 2n, 2n, 3n, 3n সংখ্যক বস্তু ধারণকারী দলে ভাগ করার উপায় $= \dfrac{\lfloor 14n}{(\lfloor 2n)^4 (\lfloor 3n)^2} \times \dfrac{1}{\lfloor 4 \lfloor 2}$

ii. 14n সংখ্যক বস্তুগুলোকে 6 জন ব্যক্তির মাঝে যথাক্রমে, 2n, 2n, 2... 3n, 3n সংখ্যক বস্তু ভাগ করার উপায় $= \dfrac{\lfloor 14n}{(\lfloor 2n)^4 (\lfloor 3n)^2} \times \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \lfloor ...}$

Ex-01 52 খানা তাসকে কত উপায়ে

i. চারজন খেলোয়াড়ের মধ্যে সমভাবে ভাগ করা যায়?

ii. সমান চার সেটে ভাগ করা যায়?

iii. চার সেটে ভাগ করা যায় যাতে যেকোন তিনটি সেটের প্রত্যেকটি... তাস এবং অপর সেটে 1টি তাস থাকে।

Sol^n : i. $\dfrac{\lfloor 52}{(\lfloor 13)^4}$ ii. $\dfrac{\lfloor 52}{\lfloor 4 (\lfloor 13)^4}$ iii. $\dfrac{\lfloor 52}{(\lfloor 17)^3 \lfloor 3}$

Ex-02 16টি ভিন্ন ভিন্ন বই সমূহ তিনজন ছাত্র A, B, C এর মাঝে ক... ভাগ করা যায় যেখানে B, A থেকে 1টি বই বেশি এবং C, B থেকে... বেশি পায়।

Sol^n : ধরি , A পায় n টি বই $\therefore$ B পায় (n+1)টি বই এবং C পায়... বই।

প্রশ্নমতে, $n + (n + 1) + (n + 3) = 16 \therefore n = 4$

$\therefore$ A পায় 4 টি বই , B পায় 5টি বই এবং C পায় 7টি বই।

$\therefore$ নির্ণেয় উপায় $= \dfrac{\lfloor 16}{\lfloor 4 \lfloor 5 \lfloor 7} \times \lfloor 3$

Ex-03 : 9 টি ভিন্ন ভিন্ন বই সমূহ হতে তিনজন ছাত্রীর মধ্যে কত উপা... করা যাবে যেখানে প্রত্যেক ছাত্রী কমপক্ষে ২টি বই পায়?

Sol^n : $\left[\dfrac{\lfloor 9}{\lfloor 2 (\lfloor 2)^2 \lfloor 5} + \dfrac{\lfloor 9}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 4} + \dfrac{\lfloor 9}{(\lfloor 3)^3 \lfloor 3}\right] \times \lfloor 3 = 115...$

Ex-04 12টি জিনিস 4 জন ব্যক্তির মধ্যে কত উপায়ে ভাগ করে দেওয়া যা...

Sol^n: নির্ণেয় সংখ্যা $= \dfrac{\lfloor 12}{(\lfloor 3)^4}$

Ex-05 বাংলাদেশ গণিত সমিতির চারটি বিভাগে সমিতির কা... 5,8,10,12 জন লোকের দরকার। যদি 35 জন স্বেচ্ছাসেবক নি... করতে চায়, তবে তাদের বিভিন্ন বিভাগে কত উপায়ে নিয়োগ করা যা...

Sol^n: প্রতি বিভাগে নিযুক্ত সদস্যদের অভিন্ন মনে করে 35 জনের সদ... চার দলে ভাগ করা যাবে তাদের সংখ্যা $= \dfrac{\lfloor 35}{\lfloor 5 \lfloor 8 \lfloor 10 \lfloor 12}$

Ex-06 বাংলাদেশের সেরা 22 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়দের মধ্যে হতে... দল ও প্রধানমন্ত্রীর দল কত উপায়ে গঠন করা যাবে?

Sol^n:ক্রিকেট টিমে 11 জন খেলোয়াড় থাকে তাই 22 জন হতে... প্রধানমন্ত্রী নির্দিষ্ট করে সমান দুই দলে ভাগ করতে হবে যাতে প্র... 11 জন থাকে।

$\therefore$ নির্ণেয় উপায় $= \dfrac{\lfloor 22}{(\lfloor 11)^2}$

[illegible] practice:

[illegible] কতভাবে সমান ভাগ করে দেয়া যাবে
[illegible] (b) দুজন ব্যক্তির মধ্যে
[illegible] (d) 4 টি ব্যক্তির মধ্যে ?

A. $\frac{\lfloor 52}{\lfloor 2 (\lfloor 26)^2}$ B. $\frac{\lfloor 52}{(\lfloor 26)^2}$

C. $\frac{\lfloor 52}{\lfloor 4 (\lfloor 13)^4}$ D. $\frac{\lfloor 52}{(\lfloor 13)^4}$

Type-08: পুনরাবৃত্তিমূলক সমাবেশ

[illegible] বিভিন্ন বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তু দ্বারা গঠিত পুনরাবৃত্তিমূলক [illegible] $= {}^{n+r-1}C_{r-1} = {}^{n+r-1}C_n$ [n, r ∈ N]
[illegible] কোন বস্তু নাও থাকতে পারে অথবা n সংখ্যকবার পর্যন্ত পুনরাবৃত্তি [illegible])

[illegible] বিভিন্ন বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তু দ্বারা গঠিত পুনরাবৃত্তিমূলক [illegible] $= {}^{n-1}C_{r-1}$ [n ≥ r ; n, r ∈ N]
[illegible] কোন বস্তু কমপক্ষে একবার থেকে n সংখ্যকবার পর্যন্ত পুনরাবৃত্তি [illegible])

[illegible] বিভিন্ন বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তু দ্বারা গঠিত পুনরাবৃত্তিমূলক [illegible] $= {}^{n-(p-1)r-1}C_{r-1}$ [n > pr ; p > 1; n,r ∈ N]
[illegible] কোন বস্তু কমপক্ষে p সংখ্যকবার থেকে n সংখ্যকবার পর্যন্ত [illegible] হতে পারে)

[illegible] টি আম রকিব,রফিক,শফিক,শরিফের মধ্যে কতভাবে বন্টন করা যায়?
[illegible] উপায় $= {}^{20+4-1}C_{4-1} = {}^{23}C_3 = 1771$ **Ans.**

[illegible] টি "জয়কলি বুয়েট গাইড" বই রকিব,রফিক,শফিক,শরিফের মধ্যে [illegible] যায় যেখানে প্রত্যেকেই অন্তত 1টি "জয়কলি বুয়েট গাইড" [illegible]?
[illegible] উপায় $= {}^{15-1}C_{4-1} = {}^{14}C_3 = 364$ **Ans.**

[illegible] $+ p + q + r + s = 23$ সমীকরনের কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন [illegible] সমাধান সম্ভব যেখানে $2 \le x, y, z, p, q, r, s \le 23$ ।
[illegible] সমাধানের উপায় $= {}^{23-(2-1)\times 7-1}C_{7-1} = {}^{15}C_6 = 5005$ **Ans.**

[illegible] practice:

[illegible] $+ p + q = 19$ সমীকরনের কতগুলো পূর্নসংখ্যায় সমাধান আছে । [illegible] $\le x, y, z, p, q \le 31$] **Ans.** 3060

[illegible] $= 1260$ সমীকরনের কতগুলো ধনাত্মক পূর্নসংখ্যায় সমাধান [illegible] **Ans.** 5625

[illegible] $+ 4z = 24$ সমীকরনের কতগুলো ধনাত্মক পূর্নসংখ্যায় সমাধান [illegible] **Ans.** 19

Type-09: বিন্যাস ও সমাবেশের মিশ্রিত সমস্যা

[illegible] করতে হয়–
[illegible] জিনিসের মধ্যে এক জাতীয় কিছু সংখ্যক জিনিস এবং এখান হতে [illegible] সংখ্যক জিনিস নিয়ে সাজাতে বললে সমাবেশের মাধ্যমে বিন্যাস [illegible] সুবিধাজনক ।

➲ n সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিসের বিন্যাস বের করতে বলা হলে যেখানে কোন বিশেষ শ্রেণীর জিনিস কমপক্ষে 1,2 বা 3 ইত্যাদি সংখ্যক নিতে হবে । এরুপ ক্ষেত্রে সমাবেশের মাধ্যমে বিন্যাস করতে হবে ।

Ex-01 ABAIIONI শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রতিবার তিনটি নিয়ে কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায়?

Solⁿ: মোট বর্ণ 7 টি । A – 2 টি, 5 টি ভিন্ন ধরনের ।

নির্বাচনের উপায়	সমাবেশ সংখ্যা	বিন্যাস সংখ্যা
1টি A ও বাকি দুটি ভিন্ন	$1 \times {}^5C_2$	${}^5C_2 \times \lfloor 3 = 60$
2টি A ও 1টি ভিন্ন	$1 \times {}^5C_1$	${}^5C_1 \times \frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 15$
5টি ভিন্ন বর্ণ হতে 3টি নিয়ে	${}^5C_3$	${}^5C_3 \times \lfloor 3 = 60$

∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = 60 + 15 + 60 = 135 **Ans.**

Ex-02 EXPRESSION শব্দটির অক্ষরগুলো হতে প্রত্যেকবার 4টি অক্ষর নিয়ে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় কর ।

Solⁿ: EXPRESSION শব্দটিতে 2টি s 2টি E বাকি 6টি ভিন্ন ।

নির্বাচনের উপায়	সমাবেশ সংখ্যা	বিন্যাস সংখ্যা
(i)2টি E এবং 2টি S	${}^2C_2 = 1$	$1 \times \frac{4!}{2!2!} = 6$
(ii)2 জোড়া হতে 1 জোড়া, অপর দুটি ভিন্ন	${}^2C_1 \times {}^7C_2 = 42$	$42 \times \frac{4!}{2!} = 504$
(iii) সবগুলো ভিন্ন অক্ষর	${}^8C_4$	${}^8C_4 \times 4! = 1680$

∴ মোট সমাবেশ $= 1 + 42 + {}^8C_4 = 113$
এবং মোট বিন্যাস সংখ্যা = 6 + 504 + 1680 = 2190 **Ans**

For practice:

01. ALGEBRA শব্দটির অক্ষরগুলো হতে প্রত্যেকবার তিনটি করে অক্ষর নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায় ? **Ans.** 135
02. DEVASTATION শব্দের বর্ণ গুলো হতে 4টি করে বর্ণ নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়? **Ans.** 3702

Type-10: টেলিফোন সংযোগ সংক্রান্ত

➲ টেলিফোন সংযোগের ক্ষেত্রে: নির্দিষ্ট সংখ্যার অংক পর্যন্ত ডায়ালে লেখা থাকলে এবং নম্বরগুলো n অংক বিশিষ্ট হলে সংযোগ সংখ্যা = (মোট লিখিত অংক)ⁿ [সাধারণত 10^n]

Ex-01 টেলিফোন ডায়ালে 0 থেকে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে । যদি কক্সবাজার শহরের টেলিফোন নম্বরগুলো 6 অঙ্ক বিশিষ্ট হয়, তাহলে ঐ শহরের মোট সংযোগ দেয়া যাবে?

Solⁿ: $10^6 = 1000000$ টি সংযোগ দেয়া যাবে । **Ans.**

For practice:

01. টেলিফোন ডায়ালে 0 থেকে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে । যদি কক্সবাজার শহরের টেলিফোন নম্বরগুলো 7 অঙ্ক বিশিষ্ট হয়, তাহলে ঐ শহরের মোট সংযোগ দেয়া যাবে? **Ans:** 10000000

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 4 জন বিজ্ঞান ও 3 জন কলা বিভাগের ছাত্র রয়েছে। বিজ্ঞানের ছাত্রের সংখ্যা গরিষ্ঠতা নিয়ে 5 জনের দল গঠন করলে তা কত ভাবে করা যাবে? [15-16]

Solve বিজ্ঞানের ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠতা দিয়ে দল গঠন:

	বিজ্ঞান বিজ্ঞান (4)	কলা বিজ্ঞান (3)
(i)	4	1
(ii)	3	2

সুতরাং মোট দল গঠন করা যাবে $= ({}^4C_4 \times {}^3C_1 + {}^4C_3 \times {}^3C_2) = 15$ ভাবে।

Ans.

02. 6 জন গণিত ও 4 জন পদার্থবিজ্ঞানের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। কমিটিটি কত প্রকারে গঠন করা যেতে পারে যেন গনিতের ছাত্রদের সংখ্যাগরিষ্ঠতা থাকে? [12-13]

Solve গণিত (6) পদার্থ (4)

(i) 6 0 $\therefore {}^6C_6 \times {}^4C_0 = 1$

(ii) 5 1 $\therefore {}^6C_5 \times {}^4C_1 = 24$

(iii) 4 2 $\therefore {}^6C_4 \times {}^4C_2 = 90$

$\therefore$ সর্বমোট $= 24 + 90 + 1 = 115$ উপায়ে কমিটি গঠন করা যায়।

Note: যেহেতু পদার্থের ছাত্রকে অবশ্যই নিতে হবে এরূপ কোন কথা উল্লেখ নেই সেহেতু (i) নং টা যুক্তিযুক্ত। **Ans.**

03. 6 জন ও 8 জন খেলোয়াড়ের দুটি দল থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট টিম গঠন করতে হবে যাতে 6 জনের দল থেকে অন্তত 4 জন খেলোয়াড় ঐ টিমে থাকে। ক্রিকেট টিমটি মোট কত প্রকারে গঠন করা যেতে পারে। [11-12; CUET : 03-04]

Solve ১ম দল (6 জন) ২য় দল (8 জন)

১ম দল (6 জন)	২য় দল (8 জন)
4	7
5	6
6	5

সমাবেশ সংখ্যা $= ({}^6C_4 \times {}^8C_7) + ({}^6C_5 \times {}^8C_6) + ({}^6C_6 \times {}^8C_5) = 344$

Ans.

04. একটি বিদ্যুৎ উৎপাদন কেন্দ্রে কর্মরত 5 জন যন্ত্র প্রকৌশলী ও 4 জন তড়িৎ প্রকৌশলীর মধ্য থেকে 4 জনের একটি গ্রুপ তৈরি করতে হবে। কত ভাবে এটা গঠন করা যেতে পারে যাতে গ্রুপটিতে অন্তত: 1 জন যন্ত্র ও 1 জন তড়িৎ প্রকৌশলী থাকে? [10-11]

Solve যন্ত্র প্র: (5) তড়িৎ প্র: (4)

	যন্ত্র প্র: (5)	তড়িৎ প্র: (4)
a)	3	1
b)	2	2
c)	1	3

গঠনের উপায় $= ({}^5C_3 \times {}^4C_1) + ({}^5C_2 \times {}^4C_2) + ({}^5C_1 \times {}^4C_3)$

$= 40 + 60 + 20 = 120$ **Ans.**

05. দু'টি ভাগের প্রত্যেক ভাগে 5 টি করে মোট 10 টি প্রশ্ন হতে একজন পরীক্ষার্থীকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। কোন ভাগ থেকে 4 টির বেশি প্রশ্নের উত্তর করা নিষিদ্ধ। ঐ পরীক্ষার্থী কত উপায়ে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারবে ? [09-10]

Solve 1st Part (5) 2nd Part (5)

	1st Part (5)	2nd Part (5)
i.	4	2
ii.	3	3
iii.	2	4

১ম ভাগে: প্রশ্ন বাছাই করা যায় $= {}^5C_4 \times {}^5C_2 = 50$

২য় ভাগে: প্রশ্ন বাছাই করা যায় $= {}^5C_3 \times {}^5C_3 = 100$

৩য় ভাগে: প্রশ্ন বাছাই করা যায় $= {}^5C_2 \times {}^5C_4 = 50$

$\therefore$ সর্বমোট প্রশ্ন বাছাই করা যায় $= 50 + 100 + 50 = 200$.

06. একজন পরীক্ষার্থীকে 12টি প্রশ্ন হতে 9টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হ... মধ্যে প্রথম 5টি হতে ঠিক 4টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। কত... প্রশ্নগুলি বাছাই করা যেতে পারে। [97-98]

Solve প্রশ্ন বাছাইয়ের সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^7C_5 = 105$ উপায়ে

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে স...

01. 15 জন ছাত্রের মধ্য থেকে প্রতি কমিটিতে 5 জন হিসেবে মোট 3... গঠন করতে হবে। কত উপায়ে ঐ কমিটিগুলো গঠন করা যাবে। ...

Solve এখানে কমিটি গঠনের উপায় $= \frac{15!}{(5!)^3}$

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে স...

01. 6 টি বাক্সকে 1, 2, ..., 6 দ্বারা নির্দিষ্ট করা হল। প্রতিটি বাক্সে ... সবুজ বল এমনভাবে রাখতে হবে যেন কমপক্ষে 1 টি বাক্সে অব... বল থাকবে এবং সবুজ বল সম্বলিত বাক্সগুলি ক্রমানুসারে ... সর্বমোট যত উপায়ে কাজটি করা যাবে তা হল– [13-14]

A. 5 B. 6
C. 60 D. 21

Ans D Solve একটা বাক্সে সবুজ বল থাকলে কাজটি করা যায়, ...

দুইটি বাক্সে সবুজ বল থাকলে কাজটি করা যায় ${}^5C_1 = 5$ ভাবে।

$\therefore$ সর্বমোট উপায় সংখ্যা $= {}^6C_1 + {}^5C_1 + {}^4C_1 + {}^3C_1 + {}^2C_1 + $ ... ভাবে কাজটি করা যায়।

02. 1, 2, 3, 4 দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট সরল রেখা দ্বারা কয়টি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে...

A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

Ans B Solve ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^4C_3 = 4$

কিন্তু (1, 2, 3), (1, 2, 4) এদের দ্বারা কোন চতুর্ভুজ পাওয়া যায় ...

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা $= 4 - 2 = 2$

03. এক ব্যক্তির 12 জন বন্ধু আছে যাদের মধ্যে 8 জন আত্মীয়। ... প্রকারে 7 জন বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারেন যাদের মধ্যে 5 জন ... থাকবেন? [12-13]

A. 360 B. 390
C. 336 D. 480

Ans C Solve 8 জন আত্মীয় থেকে 5 জনকে বাছাই করা যায় ...

বাকী $(12-8) = 4$ জন বন্ধু থেকে $(7-5) = 2$ জনকে বাছাই করা যায় ...

$\therefore$ 7 জনকে নিমন্ত্রণ করতে পারেন $= {}^8C_5 \times {}^4C_2 = 336$ ভাবে

[illegible] শেষে প্রত্যেকে প্রত্যেকের সাথে করমর্দন করলেন। করমর্দনের [illegible] হলে, কতজন লোক সভায় উপস্থিত ছিলেন? [12-13]

[illegible] B. 11
[illegible] D. 12

[illegible] Solve n সংখ্যক লোকের করমর্দনের সংখ্যা,

$\frac{n(n-1)}{2}$ টি

[illegible] $\frac{n(n-1)}{2} = 66$

[illegible] $- n - 132 = 0 \Rightarrow n^2 - 12n + 11n - 132 = 0$

[illegible] $(n + 11) = 0$

[illegible] $\therefore n = 12$ জন

[illegible] কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখার সাহায্যে কতগুলো [illegible] যেতে পারে? [09-10,06-07]

[illegible] B. 35 C. 50 D. 60

[illegible] Solve কর্ণ $= {}^{10}C_2 - 10 = 35$

[illegible] ও 4 জন বালিকা হতে 5 জনকে একটি নির্দিষ্ট কোর্সে ভর্তির [illegible] বাছাই করতে হবে। 2 জন বালিকাকে অবশ্যই রেখে বাছাই [illegible] কত ভাবে গঠন করা যেতে পারে? [08-09]

[illegible] B. 120 C. 125 D. 186

[illegible] Solve 4 জন বালিকা হতে 2 জন বালিকাকে বাছাই করা যেতে [illegible] $- {}^4C_2$ উপায়ে। উক্ত 6 জন বালক হতে 3 জন বালককে বাছাই করা [illegible] $= {}^6C_3$ উপায়ে।

[illegible] বাছাইয়ের সংখ্যা $= ({}^4C_2 \times {}^6C_3) = 120$

[illegible] এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

[illegible] কাছে 500, 50 ও 5 টাকার যথাক্রমে 3, 4 ও 5 টি নোট [illegible] টাকা না ভাঙিয়ে সে কত প্রকার ভিন্ন ভিন্ন দ্রব্যের দাম দিতে [illegible]

[illegible] B. 59 C. 61
[illegible] E. 121

[illegible] Solve লোকটির ভিন্ন ভিন্ন দ্রব্যের দাম দেওয়ার উপায়

[illegible] $(4 + 1)(3 + 1) - 1 = 119$

[illegible] এর মান কোনটি? [11-12]

[illegible] B. ${}^{n-1}C_{r+1}$ C. ${}^{n+1}C_r$
[illegible] E. ${}^{n+1}C_{r-1}$

[illegible] Solve ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

[illegible]TUTE' শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে [illegible] স্বরবর্ণগুলি জোড় স্থান দখল করবে। [09-10]

[illegible] B. 240 C. 280
[illegible] E. 440

[illegible] Solve জোড় স্থান 4টি।

[illegible] জোড় স্থানে চারটি স্বরবর্ণ বসানো যায় $\frac{4!}{2!}$ উপায়ে $= 12$ উপায়ে

[illegible] টী স্থানে 5টি বর্ণ বসানো যায় $\frac{5!}{3!}$ উপায়ে $= 20$ উপায়ে

[illegible] সংখ্যা $= 20 \times 12 = 240$ উপায়ে

[illegible] ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6 এবং [illegible] সেন্টিমিটার। সরলরেখাগুলি দিয়ে কত প্রকারে চতুর্ভুজ গঠন করা [illegible] [08-09]

[illegible] B. 35 C. 70
[illegible] E. 32

Ans E Solve নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^7C_4 = 35$

কিন্তু $1 + 2 + 3 < 7$

$1 + 2 + 3 = 6$

$1 + 2 + 4 = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্ভুজের সংখ্যা $= 35 - 3 = 32$

05. ADDRESSEE শব্দের বর্ণগুলি থেকে প্রত্যেকবার চারটি করে বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দ সংখ্যা কোনটি? [07-08]

A. 3024 B. 126 C. 1512
D. 124 E. 370

Ans E Solve ADDRESSEE শব্দটিতে 1টি A, 2টি D, 1টি R, 2টি S এবং 3টি E রয়েছে।

i. 3টি E, 1টি ভিন্ন $= \frac{4!}{3!} \times {}^4C_1 = 4 \times {}^4C_1 = 16$

ii. 2টি একজাতীয়, 2টি আরেক জাতীয় $= {}^3C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 18$

iii. 2টি একজাতীয়, 2টি ভিন্ন $= {}^3C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 216$

iv. সবগুলোই ভিন্ন $= {}^5C_4 = 120$

$\therefore$ মোট শব্দ সংখ্যা $= 370$টি

06. যদি ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ হয়, তবে ${}^{22}C_n$ এর মান কোনটি? [07-08]

A. 462 B. 332 C. 232
D. 231 E. 233

Ans D Solve ${}^nC_{12} = {}^nC_8$

$\Rightarrow n = 12 + 8 = 20$

$\therefore {}^{22}C_n = {}^{22}C_{20} = 231$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 'THESIS' শব্দটির বর্ণগুলি হতে প্রতিবার 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয় কর। [10-11; RUET : 11-12]

A. 10 B. 11
C. 9 D. None

Ans B Solve i) দুইটি s, দুইটি ভিন্ন বর্ণ $= {}^1C_1 \times {}^4C_2 = 6$

ii) প্রতিটি ভিন্ন $= {}^5C_4 = 5$

$\therefore$ মোট সমাবেশ সংখ্যা $= 11$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি প্রশ্নপত্রে মোট 10টি প্রশ্ন রয়েছে, যার 5টি সেকশন A এবং বাকি 5টি সেকশন B তে আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে প্রতিটি সেকশন থেকে কমপক্ষে 2টি প্রশ্নের উত্তর করাসহ মোট 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। পরীক্ষার্থী সবকটি প্রশ্নেরই উত্তর করতে সক্ষম হলে, মোট কতভাবে ছয়টি প্রশ্নের সেট সে নির্ধারণ করতে পারবে? [14-15]

A. 50 B. 100 C. 150
D. 200 E. 250

Ans D Solve

	A (5)	B (5)
(i)	2	4
(ii)	3	3
(iii)	4	2

(i) ${}^5C_2 \times {}^5C_4 = 50$ (ii) ${}^5C_3 \times {}^5C_3 = 100$ (iii) ${}^5C_4 \times {}^5C_2 = 50$

$\therefore$ মোট উপায় $= 200$

SELF TEST [MCQ]

01. $^{n}C_2 = \frac{3}{5} \times {}^{n}C_4$ হলে n = ?

A. 5 B. 6
C. 7 D. 8

02. 3 টি শূন্যপদের জন্য 10 জন প্রার্থী আছে এবং একজন নির্বাচক শূন্য পদ সংখ্যার বেশি নয় এমন যে কোন সংখ্যক প্রার্থীর জন্য ভোট দিতে পারেন। কত প্রকারে একজন নির্বাচক ভোট দিতে পারেন?

A. 175 B. 157 C. 167 D. 176

03. 12টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ নিয়ে কতগুলো ভিন্ন শব্দ গঠন করা যাবে?

A. 265000 B. 264000
C. 254000 D. 266000

04. দুইটি যোগবোধক চিহ্ন পাশাপাশি না রেখে p সংখ্যক যোগবোধক চিহ্ন ও q সংখ্যক বিয়োগবোধক চিহ্ন (p<q) কত প্রকারে এক সারিতে সাজানো যায়?

A. $\frac{q!}{p!\,(q-p+1)!}$ B. $\frac{q+1!}{p!\,(q-p+1)!}$

C. $\frac{q+1!}{q!\,(q-p+1)!}$ D. $\frac{q+1!}{p!\,(p-q+1)!}$

05. $\sum_{r=1}^{5} {}^{10}C_r = ?$

A. 637 B. 252 C. 367 D. None

06. টেলিফোন ডায়ালে 0 হতে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে। যদি কক্সবাজার শহরের টেলিফোন গুলো 5 অঙ্ক বিশিষ্ট হয় তবে ঐ শহরের কত টেলিফোন সংযোগ দেয়া যাবে?

A. 90000 B. 10000
C. 100000 D. 900000

07. AMERICA শব্দটি হতে প্রতিবারে 3টি বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দগুলোর সংখ্যা নির্ণয় কর।

A. 120 B. 135 C. 130 D. 125

08. সারিবদ্ধ ভাবে দাঁড়ানো 10 জন দাড়ানো 10 জন হতে পাশাপাশি নয় এরূপ তিনজন ছাত্রকে কতভাবে বাছাই করা যায়?

A. 55 B. 56 C. 65 D. None

09. 1 হতে 30 সংখ্যাগুলোর যে তিনটির সমষ্টি জোড় তাদেরকে কতভাবে বাছাই করা যাবে?

A. 2030 B. 2000 C. 455 D. 780

10. A, B ও C কে কতভাবে 12 খানা বই দেয়া যাবে যেন A ও B একত্রে C এর দ্বিগুণ পায়?

A. 125720 B. 126720
C. 256 D. None

11. $^{9}C_r$ এর বৃহত্তম মান কত?

A. 125 B. 126
C. 120 D. None

12. বহুভুজের কর্ণের সংখ্যা 35 হলে বাহুর সংখ্যা –

A. 11 B. 12 C. 10 D. 15

13. অসমান্তরাল ও অসমবিন্দু দশটি সরলরেখা দ্বারা কয়টি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে?

A. 120 B. 115
C. 110 D. None

14. ACCOUNTANCY শব্দটির অক্ষরগুলো হতে প্রতিবারে 4টি নিয়ে কতগুলো বিন্যাস ও সমাবেশ গঠন করা যাবে–

A. 1422,89 B. 420,90
C. 1420,89 D. 1422,90

15. একটি টুর্নামেন্টের প্রাথমিক পর্বে 48টি খেলা হয়েছে 8টি গ্রুপে মো…
দেশ অংশগ্রহণ করেছে?

A. 24 B. 32 C. 36 D. 48

16. n সংখ্যক বৃত্তস্থ বিন্দু দ্বারা কয়টি জ্যা পাওয়া যায়?

A. 2n(n−1) B. n(n−1)

C. $n^2 - 3n$ D. $\frac{1}{2}n(n-1)$

17. $^{n+1}C_3 = 2 \cdot {}^{n}C_2$ হলে, n = ?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

18. এক মহিলা পাঁচ অতিথির জন্য পার্টি দেয়। 9 জন বন্ধু থেকে …
কতভাবে নির্বাচন সম্ভব যাতে 2 জন বন্ধু তাতে একত্রে না আসে?

A. 91 B. 112 C. 119 D. 130

19. এক গোলটেবিলে 6 জন মুসলিম ও 6 জন হিন্দু কতভাবে বসতে …
যাতে 2 জন হিন্দু একত্রে না বসে?

A. 5! 6! B. 5! 5! C. 6! 6! D. None

20. প্রতিটি বিকল্পসহ 8 টি প্রশ্ন থেকে একজন পরীক্ষার্থী একটি বা …
প্রশ্ন কত উপায়ে বাছাই করতে পারবে?

A. 38 B. $2^8 - 1$ C. 2^8 D. $3^8 - 1$

21. 12 জন ছাত্রের মধ্যে থেকে 3টি কমিটি (প্রত্যেক কমিটিতে 4 জন …
নিয়ে) গঠন করতে হবে, কত উপায়ে কমিটি গঠন করা যায়?

A. 34650 B. 34560
C. 13650 D. 35560

22. তুমি একজন প্রকাশক। 10 টি ভাষার মধ্যে অভিধান প্রকাশ কর…
তুমি কতগুলো অভিধান বের করতে পারবে?

A. 45 B. 90 C. 10! D. $\frac{10!}{2}$

23. 12 জন লোক একে অপরের সাথে একবার মাত্র শুভেচ্ছা বিনি…
তবে শুভেচ্ছা বিনিময়ের সংখ্যা হবে-

A. 55 B. 66 C. 132 D. 110

24. $^{20}C_{4r} = {}^{20}C_{3r+6}$ হলে r = ?

A. 6 B. 6 এবং 2
C. 2 D. কোনোটিই নয়

25. একটি দাবার বোর্ডে মোট বর্গের সংখ্যা-

A. 64 B. 160
C. 224 D. 204

26. যদি R = {a, b, c, d} এবং S = {1, 2, 4} হয় তবে f : R → …
কতগুলো সার্বিক নয় ফাংশন থাকবে-

A. 80 B. 24 C. 45 D. 57

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	19. ⒶⒷⒸ
02. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	20. ⒶⒷⒸ
03. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	21. ⒶⒷⒸ
04. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	22. ⒶⒷⒸ
05. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	23. ⒶⒷⒸ
06. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ	24. ⒶⒷⒸ
07. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ	25. ⒶⒷⒸ
08. ⒶⒷⒸⒹ	17. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷⒸ
09. ⒶⒷⒸⒹ	18. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

26.C	25.D	24.C	23.B	22.B	21.A	20.D	19.A
17.C	16.D	15.B	14.A	13.A	12.C	11.B	10.B
08.B	07.B	06.C	05.A	04.B	03.B	02.A	01.C

ROBLEMETIC MATHS SOLUTION FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

A = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, $y \in A$ এবং x_1, x_2, x_3 এমন যেন $x_1x_2x_3 = y$ হয়। $x_1x_2x_3 = y$ সমীকরনে কতগুলো ধনাত্মক সমাধান আছে?

$= y)$ সমীকরণের ধনাত্মক পুর্ণসংখ্যায় মোট সমাধান $= (x_1x_2x_3,x_4 =$ সমীকরণের ধনাত্মক পুর্ণসংখ্যায় মোট সমাধান $= 4 \times 4 \times 4 = 64$টি।

Ans:

a, b এবং c এর প্রকৃত উৎপাদক হয় তবে $a + b + c = 60$ সমীকরণের ধনাত্মক পুর্ণসংখ্যায় কতগুলো সমাধান আছে?

a, b এবং c এর উৎপাদক এবং $a + b + c = 60$ সুতরাং a, 60-এর উৎপাদক হবে। সুতরাং a এর মান হতে পারে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15 এবং $b = ma, c = na$ যখন $m, n > 1$

$a + b + c = 60 \Rightarrow a(1 + m + n) = 60 \therefore m + n = \frac{60}{a} - 1$

ধনাত্মক পুর্ণসংখ্যায় সমাধান $= \frac{60}{a} - 2$

ধনাত্মক পুর্ণসংখ্যায় মোট সমাধান $= \left(\frac{60}{1} - 2\right) + \left(\frac{60}{2} - 2\right) + \left(\frac{60}{3} - 2\right) + \left(\frac{60}{4} - 2\right) + \left(\frac{60}{5} - 2\right) + \left(\frac{60}{6} - 2\right) + \left(\frac{60}{10} - 2\right) + \left(\frac{60}{12} - 2\right) + \left(\frac{60}{15} - 2\right) = 144$

Ans:

কত উপায়ে 12 জন ছেলে এবং দুই মেয়েকে একই সারিতে বসানো যায় যেন কমপক্ষে 3 জন ছেলে দুইজন মেয়ের মধ্যে বসতে পারে?

নির্ণেয় উপায় $= \lfloor 14 - \lfloor 12 \times \lfloor 2 \times 13 - \lfloor 12 \times \lfloor 2 \times 12 - \lfloor 12 \times \ldots = 110 \times \lfloor 12$

Ans:

A সেটে n সংখ্যক উপাদান আছে। A সেটের কিছু উপাদান নিয়ে উপসেট P গঠন করা হল। অতঃপর P সেটের উপাদানগুলো পুনরায় A সেটে ফেরত দেওয়া হল। আবার A সেটের কিছু উপাদান নিয়ে উপসেট Q গঠন করা হল। কত উপায়ে $(P \cup Q)$ সেট A সেটের প্রকৃত উপসেট হবে?

নির্ণেয় উপায় $= 4^n - 3^n$

Ans:

কত উপায়ে 15টি একই রকম মুদ্রাকে 6 টি ভিন্ন ভিন্ন ব্যাগে রাখা যায় যেন প্রতিটি ব্যাগে কমপক্ষে একটি মুদ্রা থাকে?

নির্ণেয় উপায় $= {}^{15-1}C_{6-1} = {}^{14}C_5$

Ans:

1 থেকে 1000000 পর্যন্ত কতগুলোর পুর্ণসংখ্যা আছে যাদের অংকগুলোর যোগফল 18।

পুর্ণসংখ্যা আছে $= {}^{23}C_{18} - 6 \times {}^{13}C_8 = 25927$

Ans:

n অংকের এমন কতগুলো সংখ্যা পাওয়া যাবে যার মধ্যে 2 এবং 7 থাকবে কিন্তু 0, 1, 8, 9 থাকবে না?

0, 1, 8, 9 থাকবে না এবং বাকী অংক থাকবে এমন ক্ষেত্রে বিন্যাস, $n(U) = 6^n$।

0, 1, 2, 8, 9 থাকবে না এবং বাকী অংক থাকবে এমন ক্ষেত্রে বিন্যাস, $n(A') = 5^n$। 0, 1, 7, 8, 9 থাকবে না এবং বাকী অংক থাকবে এমন ক্ষেত্রে বিন্যাস, $n(B') = 5^n$। 0, 1, 2, 7, 8, 9 থাকবে না এবং বাকী অংক থাকবে এমন ক্ষেত্রে বিন্যাস, $n(A' \cap B') = 4^n$। সুতরাং 0, 1, 8, 9 থাকবে না এবং 2, 7 অবশ্যই থাকবে এমন ক্ষেত্রে বিন্যাস,

$n(A \cap B) = n(U) - n(A' \cup B')$
$= n(U) - n(A') - n(B') + n(A' \cap B')$
$= 6^n - 5^n - 5^n + 4^n = 6^n - 2.5^n + 4^n$

Ans:

Ex-08 একটি সমতলে দুইটি রেখাগুচ্ছ $y = x + r$ এবং $y = -x + r$ অবস্থিত, যেখানে $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$। এখন এই রেখাগুচ্ছ দ্বারা কত উপায়ে একটি বর্গক্ষেত্র তৈরী করা যায় যাদের প্রত্যেকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য 2 একক?

Sol^n : নির্ণেয় বর্গের সংখ্যা $= \frac{3}{2} \times {}^4C_2 = 9$

Ans:

Ex-09 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ এবং $x_1 + x_2 = 15$ সমীকরণগুচ্ছের কতগুলো পুর্নসংখ্যায় সমাধান আছে? যখন $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Sol^n : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ ——— (i)
$x_1 + x_2 = 15$ ——— (ii)
(i) – (ii) $\Rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = 5$ ——— (iii)
এবং $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

(ii) নং সমীকরণে পুর্ণসংখ্যায় সমাধান সংখ্যা $= {}^{16}C_1 = 16$ এবং
(iii) নং সমীকরণে পুর্ণসংখ্যায় সমাধান সংখ্যা $= {}^7C_2 = 21$
সুতরাং সমীকরণগুচ্ছের মোট সমাধান সংখ্যা $= 21 \times 16 = 336$

Ans:

Ex-10 একটি ব্যাগে 23টি বল আছে যার মধ্যে 7টি বল একই রকম। এখন ঐ ব্যাগ হতে কত উপায়ে 12টি বল বাছাই করা যাবে?

Sol^n : নির্ণেয় উপায় $= \sum_{r=5}^{12} {}^{16}C_r = {}^{18}C_6 + {}^{18}C_8$

Ans:

Ex-11 'A' একটি সেট যার উপাদান সংখ্যা n। A সেট থেকে যেকোন একটি উপসেট P_1 নেওয়া হল। এরপর P_1 সেটের উপাদানগুলো A সেটে আবার ফেরৎ দেওয়া হল। এরপর A সেট থেকে আরেকটি উপসেট P_2 নেওয়া হল। অতঃপর P_2 সেটের উপাদানগুলো A সেটে ফেরৎ দেওয়া হল। এই পদ্ধতিতে A-এর বাকি উপসেট সমূহ P_3, P_4 ......, P_m নেওয়া হল। এখন কত উপায়ে $P_1, P_2, P_3 \ldots P_m$ নেওয়া যাবে যেন

(i) $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap$ .... $\cap P_m = \varnothing$
(ii) $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup$ .... $\cup P_m = A$ হয়।

Sol^n : i. নির্ণেয় উপায় $= (2^m - 1)^n$
ii. নির্ণেয় উপায় $= (2^m - 1)^n$

Ans:

Ex-12 'A' একটি সেট যার উপাদান সংখ্যা n। 'A' সেট থেকে যেকোন একটি উপসেট P নেওয়া হল। এরপর P সেটের উপাদানগুলো A সেটে আবার ফেরৎ দেওয়া হল। এরপর A সেট থেকে আরেকটি উপসেট Q নেওয়া হল। এখন কত উপায়ে P, Q নেওয়া যাবে যাতে $(P \cap Q)$ এর উপাদান সংখ্যা ঠিক r হয়।

Sol^n : নির্ণেয় উপায় $= {}^nC_r \times 3^{n-r}$

Ans:

Ex-13 সাত অংকের কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যায় যার অংকগুলোর যোগফল জোড়?

Sol^n : নির্ণেয় বিন্যাস $= 9 \times 10^5 \times 5 = 45 \times 10^5$

Ans:

Ex-14 n বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের কৌনিক বিন্দুসমূহ থেকে কতগুলো ত্রিভুজ গঠন করা যাবে যার কোন বাহুই বহুভুজের বাহুসমূহের সাধারণ হবে না।

Sol^n : নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^nC_3 - n(n-3) = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$

Ans:

Ex-15 এমন বিন্দুসমূহের সংখ্যা বের কর যাদের অবস্থান ভেক্টর $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, [যেখানে $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$] যেন $2^a + 3^b + 5^c$, 4 দ্বারা বিভাজ্য।

Sol^n : নির্ণেয় বিন্দুসমূহের সংখ্যা $= 1 \times 2 \times 5 + 4 \times 3 \times 5 = 70$

Ans:

Ex-16 1, 2, 3, ..., n সংখ্যাগুলো থেকে কত উপায়ে এমন তিনটি সংখ্যা বের করা যায় যারা সমান্তর প্রগমণে থাকবে?

Sol^n : i. যদি n = জোড় সংখ্যা হয় তবে নির্ণেয় উপায়

$$= 2\,{}^{\frac{n}{2}}C_2 = 2.\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\lfloor 2} = \frac{n(n-2)}{4}$$

ii. যদি n = বিজোড় সংখ্যা হয় তবে নির্ণেয় উপায় = ${}^{\frac{n-1}{2}}C_2 + {}^{\frac{n+1}{2}}C_2$

$$= \frac{1}{\lfloor 2}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-3}{2} + \frac{1}{\lfloor 2}\frac{n+1}{2}.\frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)^2}{4}$$ Ans:

Ex-17 n বাহুবিশিষ্ট বাহুভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলোর সাহায্যে কতগুলো চতুর্ভুজ গঠন করা যায় যাতে চতুর্ভুজগুলোর ঠিক একটি বাহু উক্ত বাহুভুজের একটি বাহুর সাধারণ হয়।

Sol^n : নির্ণেয় চতুর্ভুজ সংখ্যা $= n \times {}^{n-4}C_2 = \frac{n(n-4)(n-5)}{2}$ Ans:

Ex-18 n বাহু বিশিষ্ট বাহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর সাহায্যে কতগুলো চতুর্ভুজ গঠন করা যায় যাতে চতুর্ভুজগুলোর ঠিক সন্নিহিত দুইটি বাহু উক্ত বাহুভুজের দুইটি বাহুর সাধারণ হয়।

Sol^n : নির্ণেয় চতুর্ভুজ সংখ্যা $= n \times {}^{n-5}C_1 = n(n-5)$ Ans:

Ex-19 বাংলাদেশ এবং ভারত এমন ODI ক্রিকেট সিরিজ খেলবে যতক্ষণ না পর্যন্ত কোন এক দল চারটি খেলায় জয়ী হয়। যেখানে কোন খেলাই অমিমাংসীত হবে না। কত উপায়ে এই ODI সিরিজটি শেষ হবে।

Sol^n : নির্ণেয় উপায় $= 2 \times \left(1 + \frac{\lfloor 4}{\lfloor 3} + \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2\,\lfloor 3} + \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3\,\lfloor 3}\right) = 70$ Ans:

Ex-20 6 জন পুরুষ ডাক্তার এবং 10 জন নার্স (যেখানে 5 জন পুরুষ এবং 5 জন মহিলা) হতে কমপক্ষে 4 জন ডাক্তার এবং কমপক্ষে 4 জন নার্স (যেখানে কমপক্ষে 2 জন পুরুষ নার্স এবং কমপক্ষে 2 জন মহিলা নার্স) নিয়ে 10 জনের একটি ডাক্তারী টিম কতভাবে বাছাই করা যায়?

Sol^n :

6 ডাক্তার	5 পুরুষ নার্স	5 মহিলা নার্স	বাছাই করার উপায়
4	4	2	${}^6C_4 \times {}^5C_4 \times {}^5C_2$
4	3	3	${}^6C_4 \times {}^5C_3 \times {}^5C_3$
4	2	4	${}^6C_4 \times {}^5C_2 \times {}^5C_4$
5	3	2	${}^6C_5 \times {}^5C_3 \times {}^5C_2$
5	2	3	${}^6C_5 \times {}^5C_2 \times {}^5C_3$
6	2	2	${}^6C_6 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2$
			মোট উপায় = 4300

Ans:

Ex-21 0, 1, 2 অংক দ্বারা কতগুলোর ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যায় যা 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং 2×10^8 সংখ্যা থেকে ছোট?

Sol^n : নির্ণেয় সংখ্যা $= 2 \times 3^7 \times 1 - 1 = 4373$ Ans:

Ex-22 একটি রেলপথে A থেকে B স্টেশনের মধ্যে p সংখ্যক স্টেশন আছে। কত উপায়ে একটি ট্রেন ঐ রেলপথ বরাবর 3টি স্টেশনে বিরতি নিতে পারে যেন ঐ ট্রেনটি যেকোন দুটি ধারাবাহিক স্টেশানে বিরতি না নেয়?

Sol^n : নির্ণেয় উপায় $= {}^pC_3 - (p-2)^2 = \frac{(p-2)(p-3)(p-4)}{\lfloor 3} = {}^{p-2}C_3$

Ans:

Ex-23 1 থেকে 1000 পর্যন্ত সংখ্যায় কতবার 3 অংকটি লিখতে হবে?

Sol^n : 3 অংকটি লিখতে হবে $= 1 \times ({}^3C_1 \times 9^2) + 2 \times ({}^3C_2 \times 9) + 3 \times ({}^3C_3)$
= 300 বার Ans:

Ex-24 কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন গাড়ীর লাইসেন্স প্লেট তৈরি করা যাবে যদি প্লেটের ১ম তিন ঘরে ইংরেজী বর্ণমালার যেকোন তিনটি বর্ণ এবং ঘরে 0 – 9 পর্যন্ত অংকের যেকোন তিনটি অংক থাকে?

i. যদি বর্ন ও অংকসমূহের পুণরাবৃত্তি ঘটে।

ii. যদি বর্ন ও অংক সমূহের পুনারাবৃত্তি না ঘটে।

Sol^n : i. নির্ণেয় উপায় $= 26^3 \times 999$

ii. নির্ণেয় উপায় $= {}^{26}P_3 \times {}^{10}P_3$

Ex-25 ধরি, n এবং k এমন ধনাত্মক পুর্নসংখ্যা যাতে $n \geq \frac{k(k+1)}{2}$

যদি $x_1 + x_2 + \dots\dots + x_k = n,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2, \dots\dots\dots$ x

তবে অঋণাত্মক পুর্ণসংখ্যায় কতগুলো সমাধান পাওয়া যাবে?

Sol^n : অঋণাত্মক পুর্ণসংখ্যায় সমাধান সংখ্যা

$$= {}^{\{n-(1+2+3+\dots\dots+k)\}-1}C_{1+2+\dots+k} = {}^{\left\{n-\frac{k(k+1)}{2}-1\right\}}C_{\frac{k(k+1)}{2}}$$

Ex-26 3 অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় যার অংকেগুলোর জোড় হবে।

Sol^n : নির্ণেয় সংখ্যাসমূহ $= 9 \times 10 \times 5 = 450$

Ex-27 0, 1, 2, 3 .... 9 অংকগুলো দ্বারা n অংকে বিশিষ্ট কত গঠন করা যাবে যার প্রতিটি অংকে বিজোড় এবং 1 এবং 3 অংক বিশি প্রত্যেকেই শুন্য ব্যতিত জোড় সংখ্যক বার পর্যন্ত পুনরাবৃত্তি করতে

Sol^n : নির্ণেয় সংখ্যা $= e^{3x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right)^2$ এর বিস্তারে x^n এর সহগ

$= \frac{1}{4}e^x(e^x - 1)^4$ এর বিস্তারে x^n এর সহগ

$= \frac{1}{4}(e^{5x} - 4e^{4x} + 6e^{3x} - 4e^{2x} + e^x)$ এর বিস্তারে x^n এর

$= \frac{1}{4}(5^n - 4.4^n + 6.3^n - 4.2^n + 1)$

$= \frac{1}{4}(5^n - 4^{n+1} + 2.3^{n+1} - 2^{n+2} + 1)$

Ex-28 1, 2, 3 .... 9 অংক গুলো দ্বারা 7 অংকের কতগুলো করা যায় যাতে 5 এবং 6 অংক কখনোও পাশাপাশি না বসে?

Sol^n : নির্ণেয় সংখ্যা গঠন $= {}^9P_7 - 2 \times 6 \times {}^7P_5 = 151200$

Ex-29 ধনাত্মক পুর্ণসংখ্যায় $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ সমীকরণের সমাধান আছে? যেখানে $x_1 \geq 3,\ x_2 \geq 1,\ x_3 \geq 0$ এবং $x_4 \geq 5$.

Sol^n : নির্ণেয় সমাধান সংখ্যা $= {}^{(20-3-1-5+4-1)}C_{11} = {}^{14}C_{11} = {}^{14}C_3 = 364$

Ex-30 একজন আইন প্রনেতার বাসার উত্তর এবং পূর্ব উভয়দিকে n আছে এবং সবগুলো রাস্তার দৈর্ঘ্য সমান এবং প্রস্থও সমান। তার অফিস n ব্লক উত্তর এবং n ব্লক পূর্বদিকে অবস্থিত। সে কত উপা থেকে অফিসে যেতে পারবে যদি বাসা থেকে অফিস পর্যন্ত কর্ন নিয়ে না যায়?

Sol^n : নির্ণেয় পথের সংখ্যা $= \frac{{}^{2n}C_n}{n+1}$

Ex-31 n অংকে বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায় যাতে প্রত্যে কমপক্ষে 4 হয় এবং 4 ও 6 অংকেদ্বয়ের প্রত্যেকে জোড় সংখ্যক বার অংকেদ্বয়ের প্রত্যেকে কমপক্ষে একবার নেওয়া যাবে? নিজে চেষ্টা

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios)

[illegible] নজরে এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

[illegible] কোণ: পরস্পরচ্ছেদী দুটি সরলরেখা থেকে উৎপন্ন কোণ যা [illegible] হতে পারে না। এর মান 0^0 থেকে 360^0 এর মধ্যে [illegible]।

[illegible] কোণ: একটি সরলরেখার ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন কোণ যা [illegible] বা ধনাত্মক হতে পারে। এর মান $-\infty$ থেকে $+\infty$ এর মধ্যে [illegible]।

[illegible] কোণ পরিমাপের তিনটি পদ্ধতি:

[illegible] পদ্ধতি (Sexagesimal System)

[illegible] পদ্ধতি (Centesimal System)

[illegible] পদ্ধতি (Circular System)

[illegible] ও বৃত্তীয় পদ্ধতি বিষয়ে আলোচনা করব।

[illegible] পদ্ধতি: এ পদ্ধতিতে কোণের একক ডিগ্রি। এক সমকোণকে [illegible] নব্বই ভাগে বিভক্ত করলে এক ভাগকে এক ডিগ্রি বলা হয়। প্রতি [illegible] ষাট ভাগে বিভক্ত করলে এক ভাগকে বলা হয় এক মিনিট। [illegible] এক মিনিটকে সমান ষাট ভাগে বিভক্ত করলে এক ভাগকে বলা [illegible] সেকেন্ড। সুতরাং, এক সমকোণ = 90°, 1° = 60′, 1′ = 60″ [illegible] পদ্ধতিকে বৃটিশ পদ্ধতি বলা হয়।

[illegible] পদ্ধতি: এ পদ্ধতির মূল একক হল রেডিয়ান। যেকোন বৃত্তের [illegible] সমান বৃত্তচাপ এর কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় [illegible] রেডিয়ান।

[illegible] ও ষাটমূলক পদ্ধতির কোণের রূপান্তর:

$$[illegible] \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} = \frac{2\times 90°}{\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ এক সমকোণ}$$

$$[illegible]\ 1° = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = \frac{\pi^c}{180}$$

[illegible] = হল একটি ধ্রুব সংখ্যা যা কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত [illegible]।

[illegible] ব্যাসার্ধ ও উৎপন্ন কোণের সম্পর্ক:

[illegible] কোন বৃত্তে যে কোন চাপ s যদি কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে [illegible] মধ্যে সম্পর্কটি নিম্নের সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়, $s = r\theta$, [illegible] অবশ্যই রেডিয়ানে প্রকাশ করতে হবে।

[illegible] r^2 [A হচ্ছে বৃত্ত কলার ক্ষেত্রফল, θ হচ্ছে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ]

[illegible]	ডোমেন	রেঞ্জ
[illegible]	**R**	[–1, 1]
[illegible]	**R**	[–1, 1]
[illegible]	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in Z\}$	**R**
[illegible]	$\mathbf{R} - \{n\pi; n\in Z\}$	**R**
[illegible]	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n\in Z\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$
[illegible]	$\mathbf{R} - \{n\pi; n\in Z\}$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$

☐ **ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মৌলিক পর্যায় (Period of trigonometric function):**

$f(\theta)$ ফাংশনকে পর্যায়ী বলা হয় যদি $f(\theta + T) = f(\theta)$ হয় এবং T এর সর্বনিম্ন যে মানের জন্য সম্পর্কটি সত্য হয় তাকে ফাংশনটির মৌলিক পর্যায় বলে।

$\cos\theta$ ও $\sin\theta$ ফাংশনদ্বয় পর্যায়ী এবং এদের মৌলিক পর্যায় 2π কেননা,

$\sin\theta = \sin(2\pi + \theta) = \sin(4\pi + \theta) = \sin(6\pi + \theta) = ...$

এবং $\cos\theta = \cos(2\pi + \theta) = \cos(4\pi + \theta) = \cos(6\pi + \theta) = ...$

অনুরূপভাবে, $\sec\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ ফাংশনদ্বয় পর্যায়ী এবং এদের মৌলিক পর্যায় 2π। $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ ফাংশনদ্বয় পর্যায়ী এবং তাদের মৌলিক পর্যায় π. কেননা,

$\tan\theta = \tan(\pi + \theta) = \tan(2\pi + \theta) = \tan(3\pi + \theta) = ...$

$\cot\theta = \cot(\pi + \theta) = \cot(2\pi + \theta) = \cot(3\pi + \theta) = ...$

সুতরাং $\sin x, \cos x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় 2π ও $\tan x, \cot x$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় π.

☐ $\sin(kx + c), \cos(kx + c), \sec(kx + c), \operatorname{cosec}(kx + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় $\frac{2\pi}{k}$ ও $\tan(kx + c), \cot(kx + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় $\frac{\pi}{k}$।

☐ $\sin(\frac{x}{k} + c), \cos(\frac{x}{k} + c), \sec(\frac{x}{k} + c), \operatorname{cosec}(\frac{x}{k} + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় $2k\pi$ ও $\tan(\frac{x}{k} + c), \cot(\frac{x}{k} + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় πk।

☐ $\sin^n(kx + c), \cos^n(kx + c), \sec^n(kx + c), \operatorname{cosec}^n(kx + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় $\frac{2\pi}{k}$ যখন n = বিজোড় এবং মৌলিক পর্যায় $\frac{\pi}{k}$ যখন n = জোড় ও $\tan^n(kx + c), \cot^n(kx + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় $\frac{\pi}{k}$ যখন $n \in Z$

☐ $\sin^n(\frac{x}{k} + c), \cos^n(\frac{x}{k} + c), \sec^n(\frac{x}{k} + c), \operatorname{cosec}^n(\frac{x}{k} + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় $2k\pi$ যখন n = বিজোড় এবং মৌলিক পর্যায় $k\pi$ যখন n = জোড় ও $\tan^n(\frac{x}{k} + c), \cot^n(\frac{x}{k} + c)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় πk যখন $n \in Z$।

☐ $a_1.\sin(k_1x+c_1)+a_2.\sin(k_2x+c_2)+a_3.\cos(k_3x+c_3)+a_4.\cos(k_4x+c_4)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় হবে $\frac{2\pi}{k_1}, \frac{2\pi}{k_2}, \frac{2\pi}{k_3}$ এবং $\frac{2\pi}{k_4}$ এর ল.সা.গু.।

☐ $a_1.\cos(\frac{x}{k_1} + c_1)+a_2.\cos(\frac{x}{k_2} + c_2)+a_3.\sin(\frac{x}{k_3} + c_3)+a_4.\sin(\frac{x}{k_4} + c_4)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় হবে $2k_1\pi$, $2k_2\pi$, $2k_3\pi$ এবং $2k_4\pi$ এর ল.সা.গু.।

☐ $a.\tan(\frac{x}{k_1} + c_1)+b.\sec(\frac{x}{k_2} + c_2)+c.\cot(k_3x + c_3)+d.\operatorname{cosec}(k_4x+c_4)$ ফাংশনের মৌলিক পর্যায় হবে $k_1\pi$, $2k_2\pi$, $\frac{\pi}{k_3}$ এবং $\frac{2\pi}{k_4}$ এর ল.সা.গু.।

☐ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোকে বৃত্তীয় ফাংশনও বলা হয়।

বিভিন্ন লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

☐ sinx অবিচ্ছিন্ন ও অযুগ্ম ফাংশন। cosx অবিচ্ছিন্ন ও যুগ্ম ফাংশন।

☐ sinθ এর লেখচিত্রকে 90^0 বামে সরালে cosθ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

☐ tanθ লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন এবং এটা ভিন্ন ভিন্ন শাখার সমষ্টি। θ এর মান $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক হলে, লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়।

Calculator Type
ত্রিকোণমিতি (Trigonometry)

■ **প্রাথমিক আলোচনা:**

ক্যালকুলেটরে ডিগ্রি, মিনিট এবং সেকেন্ড লেখার জন্য আলাদা আলাদা বাটন নাই। [°'''] বাটনটিকে এক বার চাপলে ডিগ্রি তারপর চাপলে মিনিট এবং পুনরায় চাপলে সেকেন্ড লেখা যায়। ক্যালকুলেটরে কোন θ বাটন নাই তাই θ এর পরিবর্তে কোন বাটন যেমন X ব্যবহার করতে হবে। 1+cosθ কে 1+cosx ধরতে হবে।

➢ **Calculator যেভাবে Degree তে নেওয়া যায়:**

নিচে ক্যালকুলেটর Degree তে পরিবর্তন করার বাটন চিত্র দেয়া হল।

Ms/W Series:

[MODE] [MODE] [MODE] (Deg 1 | Rad 2 | Gra 3) [1]

Es Series:

[MODE] (1. MthIO | 2. LineIO | 3. Deg | 4. Rad) [3]

Example:1 $\cos198° + \sin432° + \tan168° + \tan12°$ এর মান কত?

ক্যালকুলেটর Degree তে নিতে হবে। তারপর নিচের বাটন চিত্র অনুসরণ করতে হবে।

Ms/W Series:

[cos] [1] [9] [8] [+] [sin] [4] [3] [2] [+] [tan] [1] [6] [8] [+] [tan] [1] [2] [=]

ES Series:

[cos] [1] [9] [8] [)] [+] [sin] [4] [3] [2] [)] [+] [tan] [1] [6] [8] [)] [+] [tan] [1] [2] [)] [=]

ফলাফল: 0

অথবা সরাসরি সূত্রের সাহায্যে এইসব Math করা যায়।

সূত্র: $a + (n-1)d = s$

Example2: যদি $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হয় তাহলে $\tan\theta$ এর মান?

A. $\pm\frac{5}{12}$ B. $\frac{25}{144}$ C. $\frac{15}{12}$ D. $\pm\frac{13}{12}$

MS Series:

[tan] [ALPHA] [)] [CALC]

Screen এ X? আসবে। এখন X এর পরিবর্তে $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ input দিতে হবে।

[SHIFT] [cos] [(] [1] [2] [÷] [1] [3] [)] [=] [SHIFT] [$a^b/_c$]

ফলাফল: $\frac{5}{12}$

ES Series:

[tan] [ALPHA] [)] [)] [CALC]

Screen এ X? আসবে। এখন X এর পরিবর্তে

$0 - \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ input দিতে হবে।

[SHIFT] [cos] [1] [2] [÷] [1] [3] [)] [=] [S⇔D]

[SHIFT] [cos] [1] [2] [÷] [1] [3] [)] [=] [S⇔D]

ফলাফল: $\frac{5}{12}$

Example: 3 যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে $\sin\theta + \sec(-\theta)$ এর মান কত?

A. $\frac{21}{156}$ B. $\frac{229}{156}$

C. $\frac{219}{156}$ D. $\frac{17}{32}$

W/MS Series:

নিচের বাটন চিত্র অনুসরণ করে $\sin\theta + \sec(-\theta)$ লিখে নিতে হবে

[sin] [ALPHA] [)] [+] [(] [1] [÷] [cos] [(] [–] [ALPHA] [)] [)] [)]

Screen এ X? আসবে। এখন X এর পরিবর্তে $\theta - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ দিতে হবে।

[SHIFT] [tan] [(] [5] [÷] [1] [2] [)] [=] [SHIFT] [$a^b/_c$]

ফলাফল: $\frac{229}{156}$

ES Series:

নিচের বাটন চিত্র অনুসরণ করে $\sin\theta + \sec(-\theta)$ লিখে নিতে হবে।

[sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [1] [÷] [cos] [–] [ALPHA] [)] [)]

Screen এ X? আসবে। এখন X এর পরিবর্তে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ দিতে হবে।

[SHIFT] [tan] [5] [÷] [1] [2] [)] [=] [S⇔D]

ফলাফল: $\frac{229}{156}$

Example: 4: $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

W/MS Series:

[1] [÷] [tan] [(] [SHIFT] [sin] [(] [1] [÷] [2] [)] [)] [=]

[tan] [SHIFT] [sin] [1] [÷] [2] [)] [)] [=]

1.732050808 ≈ $\sqrt{3}$ (যেহেতু $\sqrt{3} = 1.732050808....$)

16° 36′ 46″ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

Calculator Radian mode এ নিতে হবে।

[°'''] [3] [6] [°'''] [4] [5] [°'''] [SHIFT] [ANS] [1] [=]

আসবে 0.2899476701

$\frac{7\pi}{32}$ কে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

Calculator কে প্রথমে Radian mode এ নিতে হবে।

[π] [÷] [32] [)] [SHIFT] [ANS] [2] [=] [°''']

39° 22′ 30″

$\frac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x} = ?$

B. $\tan^3x$ C. $\sin^3x$ D. $\cos^3x$

x এর যেকোন মান ধরে বামপক্ষে বসিয়ে সেটি পাওয়া যাবে, যেইটি এর যার সাথে মিলবে সেইটিই Answer.

$x = 15°$

$\frac{3\sin 15° - \sin 3\times 15°}{3\cos 15° + \cos 3\times 15°} = 26 - 15\sqrt{3}$

$x = (\tan 15)^3 = 26 - 15\sqrt{3}$

এ অধ্যায়ের গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type এ অন্তর্ভুক্ত করা যায়

Type- 01: মৌলিক পর্যায় নির্ণয় সংক্রান্ত

$\sin(3x + 5)$ এর মৌলিক পর্যায় কত?

$(3x + 5)$ এর পর্যায়কাল $= \frac{2\pi}{3}$ **Ans.**

$\frac{1}{2}\cot\frac{2}{3}\theta$ এর মৌলিক পর্যায় কত?

ফাংশনটির পর্যায়কাল $= \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{3\pi}{2}$ **Ans.**

$\sin^2 2\theta$ এর মৌলিক পর্যায় কত?

ফাংশনটি পর্যায় $= \frac{\pi}{2}$ **Ans.**

Practice

$(2\theta + 10)$ এর মৌলিক পর্যায় কত? **Ans.** $\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$ ফাংশনটির মৌলিক পর্যায় কত? **Ans.** 4π

$\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ এর মৌলিক পর্যায় কত? **Ans.** 4π

$\frac{1}{8}\theta$ এর মৌলিক পর্যায় কত? **Ans.** 16π

Type-02: ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় সংক্রান্ত

Ex-01 নিচের ফাংশনগুলোর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।
sinx, cosx, tanx, cotx, cosecx, secx.

Sol^n: sinx : ডোমেন = R
এবং রেঞ্জ = [−1,1]

cosx : ডোমেন = R
এবং রেঞ্জ = [−1,1]

tanx : ডোমেন $= R - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in Z\}$;
এবং রেঞ্জ $= R = (-\infty, \infty)$

cotx : ডোমেন $= R - \{n\pi ; x \in Z\}$
এবং রেঞ্জ $= R = (-\infty, \infty)$

cosecx : ডোমেন $= R - \{n\pi, n \in Z\}$
এবং রেঞ্জ $= R - (-1, 1)$

secx : ডোমেন $= R - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in Z\right\}$
এবং রেঞ্জ $= R - (-1,1)$

Type-03

Ex-01 $\frac{\cos^4x}{\cos^2y} + \frac{\sin^4x}{\sin^2y} = 1$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos^4y}{\cos^2x} + \frac{\sin^4y}{\sin^2x} = 1$

Sol^n: $\frac{\cos^4x}{\cos^2y} + \frac{\sin^4x}{\sin^2y} = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{\cos^4x}{\cos^2y} - \cos^2x\right) + \left(\frac{\sin^4x}{\sin^2y} - \sin^2x\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{\cos^2x}{\cos^2y}(\cos^2x - \cos^2y) + \frac{\sin^2x}{\sin^2y}(\sin^2x - \sin^2y) = 0$

$\Rightarrow \frac{\cos^2x}{\cos^2y}(\sin^2y - \sin^2x) + \frac{\sin^2x}{\sin^2y}(\cos^2y - \cos^2x) = 0$

$\Rightarrow \frac{\sin^2y}{\sin^2x}(\sin^2y - \sin^2x) + \frac{\cos^2y}{\cos^2x}(\cos^2y - \cos^2x) = 0$

$\Rightarrow \frac{\sin^4y}{\sin^2x} - \sin^2y + \frac{\cos^4y}{\cos^2x} - \cos^2y = 0$

$\therefore \frac{\sin^4y}{\sin^2x} + \frac{\cos^4y}{\cos^2x} = 1$ **(Proved)**

Ex-02 যদি $\sin\alpha + \mathrm{cosec}\alpha = 2$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,
$\sin^n\alpha + \mathrm{cosec}^n\alpha = 2$.

Sol^n: দেওয়া আছে, $\sin\alpha + \mathrm{cosec}\alpha = 2$

$\Rightarrow \sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} = 2 \Rightarrow \sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sin\alpha - 1)^2 = 0 \;\therefore \sin\alpha = 1$

L.S. $= \sin^n\alpha + \mathrm{cosec}^n\alpha = (\sin\alpha)^n + \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^n = 1 + 1 = 2 =$ R.S.

(Proved)

Ex-03 যদি $\mathrm{cosec}A + \mathrm{cosec}B + \mathrm{cosec}C = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $(\Sigma\sin A)^2 = \Sigma\sin^2A$.

Sol^n: L.S $= (\Sigma\sin A)^2 = (\sin A + \sin B + \sin C)^2$

$= \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C + 2\sin A\sin B + 2\sin B\sin C + 2\sin C\sin A$

$= \Sigma\sin^2A + 2\sin A\sin B\sin C(\mathrm{cosec}A + \mathrm{cosec}B + \mathrm{cosec}C)$

$= \Sigma\sin^2A$ [$\because \mathrm{cosec}A + \mathrm{cosec}B + \mathrm{cosec}C = 0$]

= R. S **(Showed)**

Ex-04 যদি $\tan^2\theta = 1 - e^2$ হয় তবে দেখাও যে, $\sec\theta + \tan^3\theta\operatorname{cosec}\theta = (2-e^2)^{3/2}$.

Sol^n: $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+1-e^2} = \sqrt{2-e^2}$

L.S $= \sec\theta + \tan^3\theta\operatorname{cosec}\theta$

$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\left[1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right]$$

$$= \sec\theta\left[\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right] = \sec\theta\left[\frac{1}{\cos^2\theta}\right]$$

$$= \sec^3\theta = \left(\sqrt{2-e^2}\right)^3 = \left(2-e^2\right)^{3/2} = \text{R.S} \quad \textbf{(Showed)}$$

Ex-05 $\tan\varphi = \dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ হলে দেখাও যে, $\sqrt{2}\cos\varphi = \pm(\sin\theta + \cos\theta)$

Sol^n: $\tan\varphi = \dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2} \text{ [যোজন করে]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2} = \frac{2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\varphi = (\sin\theta+\cos\theta)^2$$

$$\therefore \sqrt{2}\cos\varphi = \pm(\sin\theta+\cos\theta) \quad \textbf{(Showed)}$$

For Practice

01. যদি $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$ হয় তবে দেখাও যে, $\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$ এবং $\dfrac{\sin^{4n}\alpha}{a^{2n-1}} + \dfrac{\cos^{4n}\alpha}{b^{2n-1}} = \dfrac{1}{(a+b)^{2n-1}}$

02. যদি $\dfrac{\sin^4\theta}{x} + \dfrac{\cos^4\theta}{y} = \dfrac{1}{x+y}$ এবং $x, y \neq 0$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\tan^2\theta = \dfrac{x}{y}$

03. দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটির কোণগুলি গুনোত্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত। একটি ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোন অপর ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোনের তিনগুন এবং তাদের বৃহত্তম কোনদ্বয়ের সমষ্টি $\dfrac{4\pi}{3}$ রেডিয়ান হলে কোনত্রয়ের মান নির্ণয় কর।
Ans: $\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}$ এবং $\dfrac{\pi}{21}, \dfrac{4\pi}{21}, \dfrac{16\pi}{21}$

04. 7টা 40 মিনিট সময় ঘন্টার কাটা এবং মিনিটের কাটার মধ্যবর্তী কোন রেডিয়ানে বের কর। Ans: $\dfrac{\pi}{18}$ রেডিয়ান

05. 17 সেমি ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করে। যদি তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 30 সেমি হয় তবে সাধারণ অংশের পরিধি এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
Ans: 31.32 সেমি, 43.19 বর্গসেমি

06. যদি $\cos^2x + 2\cos x = 1$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\sin^2x(2-\cos^2x) = 1$

07. দেখাও যে, $\dfrac{a+c}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2} \le a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c.\cos^2\theta \le \dfrac{a+c}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+(a-c)^2}$

08. দেখাও যে, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm এবং AB চাপের দৈ... cm। কোণ $\angle AOB$ এর মান বের কর এবং চাপ AB ও জ্যা AB আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [17-18]

Sol^n ধরি $\angle AOB = \theta$, চাপ AB = 14 cm এখন, চাপ AB = ...



$\therefore \theta = \dfrac{\text{চাপ AB}}{r} = \dfrac{14}{10}$

$\therefore \theta = 1.4$ রেডিয়ান

চাপ AB এবং জ্যা AB দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\theta \times r^2 - \dfrac{1}{2}\sin\theta \times r^2$

$= \dfrac{1}{2} \times (1.4 - \sin 1.4) \times 10^2$

$= 20.7275$ বর্গ সে.মি.

02. যদি $\cos\alpha + \sec\alpha = \dfrac{5}{2}$ হয়, তাহলে $\cos^n\alpha + \sec^n\alpha$ এর মান ... কর। [17-18]

Sol^n $\cos\alpha + \sec\alpha = \dfrac{5}{2}$

$$\Rightarrow \cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\alpha + 1}{\cos\alpha} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha + 2 = 5\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos\alpha - 1)(\cos\alpha - 2) = 0$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{1}{2} \; [\because \cos\alpha \neq 2]$$

$$\therefore \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 2$$

$$\therefore \cos^n\alpha + \sec^n\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n = 2^n + 2^{-n}$$

03. সত্য/মিথ্যা উত্তর দাও : [95-96]

(i) $\cos^2\dfrac{\pi}{4} = 1 - \sin^2\dfrac{\pi}{4}$

(ii) The equation $\sec\theta = \dfrac{1}{2}$ has no solution

(iii) A triangle can be drawn with sides $a = 4$, $b = 10$ and $A = 30°$

(iv) $\cos(-390°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solve i) সত্য ii) সত্য iii) মিথ্যা iv) সত্য

MCQ Part

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পাত হতে 120° পরিমান বৃত্তকলা ... ব্যাসার্ধদ্বয় সংলগ্ন করে কোণক তৈরি করা হল। কোণকটির ভূমির ... কত হবে? [13-14]

B. 21 cm
D. 49 cm

Solve $2\pi r' = s = r\theta$

$\dots = \frac{s\theta}{2\pi} = \frac{r\frac{120\pi}{180}}{2\pi} = \frac{21\times120\pi}{180\times2\pi} = 7\text{cm}$

... $\cos 2\theta = \frac{24}{25}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান কত? [13-14]

B. $\pm\frac{5}{7}$ C. $\pm\frac{1}{7}$ D. $\pm\frac{7}{5}$

Solve $\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{24}{25}}{1+\frac{24}{25}}} = \pm\frac{1}{7}$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... $\sin\theta + \text{cosec}\theta = 2$ হয়, তবে $\sin^n\theta + \text{cosec}^n\theta$ -এর মান হলো-

B. –1 C. 2
E. 3

Solve $\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta} = 2$

$\dots(\sin\theta - 1)^2 = 0$

$\dots\sin\theta = 1;\ \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = 1\ \therefore \sin^n\theta + \text{cosec}^n\theta = 2$

SELF TEST [Written]

... $\cos\alpha + \sec\alpha = \frac{5}{2}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^n\alpha + \sec^n\alpha = 2^n + 2^{-n}$.

... $\cot A + \cot B + \cot C = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $(\Sigma\tan A)^2 = \Sigma\tan^2 A$

... সমীকরণদ্বয় থেকে θ অপসারণ কর:
$a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$
$a'\cos\theta + b'\sin\theta + c' = 0.$
... $(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 = (ab' - a'b)^2.$

... প্রমাণ কর যে, $\frac{1+(\text{cosec}x\tan y)^2}{1+(\text{cosec}z\tan y)^2} = \frac{1+(\cot x\sin y)^2}{1+(\cot z\sin y)^2}$

... $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হয় তবে $\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

... $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ এবং $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ তবে ... প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = 1$.

... প্রমাণ কর যে, $1 + \tan\theta + \sec\theta = \frac{2}{1+\cot\theta-\text{cosec}\theta}$

SELF TEST [MCQ-1]

01. $\left(\frac{m\cos\alpha}{n\cot\alpha}\right)^2 + \left(\frac{m\sin\alpha}{n\tan\alpha}\right)^2 = ?$
A. $\frac{n^2}{m^2}$ B. $\frac{m^2}{n^2}$ C. $\frac{1}{m^2}$ D. $\frac{1}{n^2}$

02. $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হয় তবে $\tan\theta$=?
A. $\pm\frac{1}{\sqrt2}$ B. $\pm\frac{1}{\sqrt5}$ C. $\pm\frac{1}{\sqrt3}$ D. None

03. $\sin x\cos y = \frac{1}{4}$ এবং $3\tan x = 4\tan y$ হলে $\sin(x+y) = ?$
A. 1 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. None

04. $\tan\left(\frac{p\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{q\pi}{4}\right)$ হবে যদি-
A. $p + q = 4n + 3$ B. $p + q = n$
C. $p + q = 4n+1$ D. $p + q = 4n + 2$

05. $\cot\theta + \text{cosec}\theta = x$ হলে $\cos\theta = ?$
A. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ B. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ C. $\frac{x^2}{x^2+1}$ D. None

06. $1 + 4x^2 = 4x\sec A$ হলে $\sec A + \tan A = ?$
A. 2x B. $\frac{1}{2x}$ C. A ও B উভয়ই D. None

07. $\sec x + \sec y + \sec z = 0$ হলে $(\Sigma\cos x)^2$ =?
A. $\Sigma\sin^2x$ B. $\Sigma\cos^2x$ C. $\Sigma\sin x$ D. None

08. $a\cos^2x + b\sin^2x = c$ হলে $\tan x$= ?
A. $\pm\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$ B. $\pm\sqrt{\frac{b-a}{c-b}}$ C. $\pm\sqrt{\frac{a-b}{b-c}}$ D. $\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}$

09. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হলে $a\sin\theta + b\cos\theta = ?$
A. $\pm\sqrt{a^2+c^2-b^2}$ B. $\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$
C. $\pm\sqrt{b^2+c^2-a^2}$ D. None

10. log tan1° + log tan2° + ... + log tan89° এর মান -
A. 0 B. 1 C. tan1° D. tan 89°

11. $\cos3\theta$ এর মান কোনটি সম্ভব?
A. –2 B. ∞ C. 1 D. 2

12. n বাহু বিশিষ্ট কোন সুষম বহুভুজের যে কোন বহিঃস্থ কোণের মান 72° হলে n এর মান -
A. 6 B. 4 C. 8 D. 5

13. একটি বৈদ্যুতিক খুটি 6 ফুট উচ্চতায় ভেঙ্গে গিয়ে গোড়া হতে 8 ফুট দূরত্বে মাটি স্পর্শ করেছে। খুটিটির উচ্চতা -
A. 16 ফুট B. 13 ফুট C. 17 ফুট D. 35 ফুট

14. একটি ত্রিভুজের কোণগুলো যথাক্রমে x°, 25° এবং $\frac{11\pi}{36}$ হলে x এর মান -
A. 60 B. 75 C. 100 D. 120

15. $x = r\sin(\theta + 45°)$; $y = r\sin(\theta - 45°)$ হলে r^2 = ?
A. 1 B. x^2-y^2 C. x^2+y^2 D. 0

16. $\sqrt{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}}$ এর মান -
A. $\text{cosec}\theta - \cot\theta$ B. $\text{cosec}\theta + \cot\theta$
C. $\cot\theta - \text{cosec}\theta$ D. None

17. যদি $\sin\theta + \text{cosec}\theta = 2$ হয় তাহলে $\sin^7\theta + \text{cosec}^7\theta$ এর মান -
A. 0 B. –1 C. 2 D. 1

18. $\cos^2\theta + \sec^2\theta$ এর ক্ষুদ্রতম মান -

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

19. $\sin^4x + \sin^2x = 1$ হলে $\cot^4x + \cot^2x$ এর মান -

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

20. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = ?$

A. ≥ 2 B. ≤ 2 C. ≥ -2 D. None

21. $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta + \sin\theta = n$ হলে $m^2 - n^2$ এর মান -

A. $\sqrt{mn}$ B. $4\sqrt{mn}$ C. $\sqrt{\frac{m}{n}}$ D. $\sqrt{\frac{n}{m}}$

22. $\tan\theta = \frac{4}{3}, \sin\theta = ?$

A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. A & B

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	19. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	20. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ	21. ⒶⒷⒸⒹ
04. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ	22. ⒶⒷⒸⒹ
05. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	17. ⒶⒷⒸⒹ	
06. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	18. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

22.D	21.B	20.A	19.C	18.D	17.C	16.A	15. C
14. C	13. A	12. D	11. C	10.A	09.B	08.A	07.B
06.C	05.B	04.D	03.D	02.C	01.B		

SELF TEST [MCQ-2]

01. tanx এর ডোমেন -

A. $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in z\right\}$ B. $R - \{n\pi : n \in z\}$

C. R D. None

02. cosecx এর রেঞ্জ -

A. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ B. $R - (-1, 1)$

C. A ও B উভয়ই D. None

03. $5\sin\frac{\pi x}{6} + 10\cos\frac{\pi x}{4} + 12\cos\frac{\pi x}{6}$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. 22 B. 24

C. 20 D. 12

04. $\sin^2\theta$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. π B. π^2

C. 2π D. $\frac{\pi}{2}$

05. $\tan\frac{1}{3}\theta$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. 3 B. 3π

C. $\frac{1}{3}\pi$ D. 6π

06. y = sec x ফাংশনের রেঞ্জ -

A. R B. $(-1, 1)$

C. $R-(-1, 1)$ D. $R-[-1, 1]$

07. $y = \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{2}$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. π B. 4π

C. 6π D. 12π

08. $\tan^2(3x + k)$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{5}$ D. $\frac{\pi}{6}$

09. $\frac{1}{4}\cot\frac{5}{6}\theta$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{6\pi}{5}$

C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$

10. $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ এর সর্বোচ্চ মান -

A. 3 B. 6

C. 2 D. 4

11. $2|\cos\theta| + 1$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান -

A. 3, 1 B. 2, 5

C. 3, 2 D. 1, 5

12. $\sin^2(3x + \theta)$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{8}$

13. $\frac{1}{4}\tan^2\left(\frac{3}{16}\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. $\frac{16\pi}{3}$ B. $\frac{10\pi}{7}$ C. $\frac{3\pi}{2}$ D. $\frac{11\pi}{2}$

14. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান -

A. 2 B. 3

C. 1 D. $1 + \sqrt{2}$

15. $\text{cosec}^3(4x + k)$ এর মৌলিক পর্যায় -

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{5}$ D. $\frac{\pi}{6}$

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ
04. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ
05. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ

Correct Answer

15.A	14.D	13.A	12.B	11.A	10.C	09.B	[illegible]
07.D	06.C	05.B	04.A	03.B	02.C	01.A	

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of asscoated angles)

[illegible] ও যৌগিক কোনের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (A)

এক নজরে এই অংশের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

(iii) $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\cos x \pm b\sin x \le \sqrt{a^2+b^2}$

$c-\sqrt{a^2+b^2} \le a\cos x \pm b\sin x + c \le c + \sqrt{a^2+b^2}$

$a \le a\cos^2x + b\sin^2x \le b$ যখন $a < b$

$a + c \le a\cos^2x + b\sin^2x + c \le b + c$ যখন $a < b$

$a\tan^2x + b\cot^2x \ge 2\sqrt{ab}$

$a\sec^2x + b\sec^2x \ge (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

$\sin n\pi = 0$ (xi) $\cos n\pi = (-1)^n$

$\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin\theta$ (xiii) $\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\theta & \text{যখন } n \text{ বিজোড়} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\sin\theta & \text{যখন } n \text{ জোড়} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\theta & \text{যখন } n \text{ বিজোড়} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\theta & \text{যখন } n \text{ জোড়} \end{cases}$$

সকল ক্ষেত্রে $n \in Z$

যদি $\sin\theta + \text{cosec}\theta = 2$ হয় তবে $\sin\theta = \text{cosec}\theta = 1$

যদি $\cos\theta + \sec\theta = 2$ হয় তবে $\cos\theta = \sec\theta = 1$

যদি $\sin\theta + \text{cosec}\theta = -2$ হয় তবে $\sin\theta = \text{cosec}\theta = -1$

যদি $\cos\theta + \sec\theta = -2$ হয় তবে $\cos\theta = \sec\theta = -1$

$\sin\theta + \sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta + 2\alpha) + \dots + \sin\{\theta + (n-1)\alpha\}$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \times \sin\left\{\theta + \frac{(n-1)\alpha}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \text{যখন } \alpha \ne \frac{2k\pi}{n};\ k \in Z \\ 0 & \text{যখন } \alpha = \frac{2k\pi}{n};\ k \in Z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\text{পদসংখ্যা} \times \text{সাধারণ অন্তর}}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\text{১ম কোন + শেষ কোণ}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\text{সাধারণ অন্তর}}{2}\right)} \\ 0 \quad \text{যখন পদসংখ্যা} \times \text{সাধারণ অন্তর} = 2\pi\text{-এর গুণিতক} \end{cases}$$

$\cos\theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \dots + \cos\{\theta + (n-1)\alpha\}$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \times \cos\left\{\theta + \frac{(n-1)\alpha}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} & \text{যখন } \alpha \ne \frac{2k\pi}{n};\ k \in Z \\ 0 & \text{যখন } \alpha = \frac{2k\pi}{n};\ k \in Z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\text{পদসংখ্যা} \times \text{সাধারণ অন্তর}}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\text{১ম কোণ + শেষ কোণ}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\text{সাধারণ অন্তর}}{2}\right)} \\ 0 \quad \text{যখন পদসংখ্যা} \times \text{সাধারণ অন্তর} = 2\pi\text{-এর গুণিতক} \end{cases}$$

➲ যদি $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \dots + \sin\theta_n = n$ হয় তবে $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \dots = \sin\theta_n = 1$ হবে। $[n \in N]$

➲ যদি $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \dots + \cos\theta_n = n$ হয় তবে $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \dots = \cos\theta_n = 1$ হবে। $[n \in N]$

Type-01

Ex-01 $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$

$= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}\right) + \cos^2\left(\pi + \frac{7\pi}{24}\right) + \cos^2\left(2\pi - \frac{11\pi}{24}\right)$

$= \sin^2\frac{11\pi}{24} + \sin^2\frac{7\pi}{24} + \cos^2\frac{7\pi}{24} + \cos^2\frac{11\pi}{24} = 1 + 1 = 2$ **Ans.**

For practice:

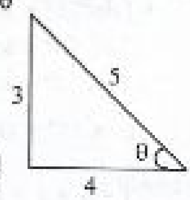
01. $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans: 2**

02. $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans: 0**

Type-02

Ex-01 $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: দেওয়া আছে $\tan\theta = \frac{3}{4}$



চিত্র হতে, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ কারণ $\cos\theta$ ঋণাত্মক।

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$ [কারণ $\tan\theta$ ধনাত্মক, $\cos\theta$ ঋণাত্মক]

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \left(\frac{-7}{5}\right)\left(\frac{-4}{2}\right) = \frac{14}{5}$ **Ans.**

For practice:

01. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$

02. যদি $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}$

Type-03

Ex-01 $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12}\tan\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)\tan\frac{5\pi}{12}\tan\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{12}\left(-\tan\frac{\pi}{12}\right)\tan\frac{5\pi}{12}\left(-\tan\frac{5\pi}{12}\right) = \tan^2\frac{\pi}{12}\tan^2\frac{5\pi}{12}$

$= \tan^2\frac{\pi}{12}\tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan^2\frac{\pi}{12}\cot^2\frac{\pi}{12} = \left(\tan\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1^2 = 1$

Ans:

For practice:

01. $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans: 1**

Type-04

Ex-01 দেখাও যে, $\cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° ..... + \cos^2 75° = \frac{7}{2}$

Solⁿ: L.S $= \cos^2 15° + \cos^2 25° + \cos^2 35° + \cos^2 45° + \cos^2 55° + \cos^2 65° + \cos^2 75°$

$= (\cos^2 15° + \sin^2 15°) + (\cos^2 25° + \sin^2 25°) + (\cos^2 35° + \sin^2 35°) + (\cos^2 45°)$

$= 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} =$ R.S **(Showed)**

Ex-02 $\cos^2 10^0 + \cos^2 20^0 + \cos^2 30^0 + ... + \cos^2 80^0 = ?$

Solⁿ: $\cos^2 10° + \cos^2 20° + \cos^2 30° + ----- + \cos^2 80°$

$= \{\cos^2 10° + \cos^2(90° - 10°)\} + \{\cos^2 20° + \cos^2(90° - 20°)\}$

$+ \{\cos^2 30° + \cos^2(90° - 30°)\} + \{(\cos^2 40° + \cos^2(90° - 40°)\}$

$= (\cos^2 10° + \sin^2 10°) + (\cos^2 20° + \sin^2 20°)$

$+ (\cos^2 30° + \sin^2 30°) + (\cos^2 40° + \sin^2 40°)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ **Ans.**

Ex-03 $\sin^2 15^0 + \sin^2 20^0 + \sin^2 25^0 + ... + \sin^2 75^0 = ?$

Solⁿ: $\sin^2 15° + \sin^2 20° + \sin^2 25° + ------- \sin^2 75°$

$= \{\sin^2 15° + \sin^2(90° - 15°)\} + \{\sin^2 20 + \sin^2(90° - 20°)\}$

$+ \{\sin^2 25° + \sin^2(90° - 25°)\} + ---------$

$+ \{\sin^2 40° + \sin^2(90° - 40°)\} + \sin^2 45°$

$= (\sin^2 15° + \cos^2 15°) + (\sin^2 20° + \cos^2 20°)$

$+ (\sin^2 25° + \cos^2 25°) + -------- + (\sin^2 40° + \cos^2 40°) + \frac{1}{2}$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$ **Ans.**

Ex-04 $\tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + ... + \tan 165°$

Solⁿ. $\frac{165 - 15}{30} + 1 = 6$ টি পদ।

$\therefore \tan 15° + \tan(180° - 15°) + \tan 45° + \tan(180° - 45°)$

$+ \tan 75° + \tan(180° - 75°)$

$= \tan 15° - \tan 15° + \tan 45° - \tan 45° + \tan 75° - \tan 75°$

$= 0$ **Ans.**

Ex-05 $\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + ... + \sin^2 177°$

Solⁿ. $\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + ------- \sin^2 177°$

$= \{\sin^2 3° + \sin^2(180° - 3°)\} + \{\sin^2 9° + \sin^2(180° - 9°)\}$

$+ -------- \} + \{\sin^2 87° + \sin^2(180° - 87°)\}$

$= 2(\sin^2 3° + \sin^2 9° + ----- + \sin^2 87°)$

$= 2[\{\sin^2 3° + \sin^2(90° - 3°)\} + \{\sin^2 9° + \sin^2(90° - 9°)\} + -----$

$+ \{\sin^2(39° + \sin^2(90° - 39°)\} + \sin^2 45°\}]$

$= 2[(\sin^2 3° + \cos^2 3°) + (\sin^2 9° + \cos^2 9°) + ----$

$+ (\sin^2 39° + \cos^2 39°) + \sin^2 45°]$

$= 2\left[1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}\right] = 2 \times \frac{15}{2} = 15$ **Ans.**

For practice:

01. $\cos^2 25^0 + \cos^2 35^0 + ... + \cos^2 65^0$ এর মান কত? **Ans:** $\frac{5}{2}$

SELF TEST: A [WRITTEN]

01. $\sin^2 25^0 + \sin^2 35^0 + ... + \sin^2 65^0$ এর মান কত? Ans

02. $\tan\frac{\pi}{20}\tan\frac{3\pi}{20}\tan\frac{5\pi}{20}\tan\frac{7\pi}{20}\tan\frac{9\pi}{20}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans

03. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans

04. $\tan 10° + \tan 20° + \tan 30° + ... + \tan 170°$ এর মান কত? Ans

05. যদি $\cos\theta = \frac{5}{13}$ এবং $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ হয় তবে প্রমান কর যে,

$\frac{\cot\theta - \operatorname{cosec}(-\theta)}{\tan\theta - \sec(-\theta)} = \frac{3}{10}$

06. $\frac{\sin^2 20° + \cos^4 20°}{\sin^4 20° + \cos^2 20°}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans

07. $\cos 1°.\cos 2°\cos 3°..........\cos 180°$ এর মান কত? Ans

SELF TEST: A [MCQ]

01. $\sin\{(2n+1)\pi + \alpha\}$ এর মান কত?

A. $\sin\alpha$ B. $-\sin\alpha$
C. $\cos\alpha$ D. $\sin 2\alpha$

02. $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = ?$

A. 0 B. 1
C. 2 D. -1

03. $180^0 < \theta < 270^0$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{7}{3}$ হলে $\cot\theta$ এর মান কত?

A. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{3}$
C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. None

04. $\alpha = \frac{11\pi}{4}$ হয় তবে $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 2\tan\alpha - \sec^2\alpha$ এর মান

A. 1 B. 0
C. -1 D. 2

05. $270^0 < \theta < 360^0$ এবং $\sec\theta = \frac{13}{12}$ হলে এর $\operatorname{cosec}\theta$ মান কত

A. $\frac{13}{5}$ B. $\frac{-13}{5}$
C. $\frac{14}{5}$ D. $\frac{-14}{5}$

06. $\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ এর মান কত?

A. 1 B. -1
C. 0 D. None

07. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ হলে এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = ?$

A. $\frac{26}{51}$ B. $\frac{52}{26}$
C. $\frac{51}{26}$ D. None

... যদি $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে $\sin 2A + \cos 2A = ?$

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ D. A ও B উভয়ই

... $\left(n\pi \pm \frac{\pi}{4}\right)$ এর মান কত হবে যখন n একটি পূর্ণ সংখ্যা?

B. $\sqrt{2}$

D. None

... $= x$ হলে, $\frac{\tan 163° - \tan 107°}{1 + \tan 163° \tan 107°} = ?$

B. $\frac{x^2-1}{2x}$

D. None

... $= \frac{4}{5}$ হলে, $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = ?$

B. $\frac{19}{25}$

D. $\frac{7}{25}$

... θ) $\cot(45° - \theta) = ?$

B. 0

D. ∞

... $+ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = ?$

B. 2

D. 1

... $\sin 88°32' + \sin 61°28' \sin 1°28' = ?$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

... $\frac{2\sin x}{1+\cos x+\sin x} = y$ হয় তবে $\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\sin x}$ এর মান-

B. y C. $1-y$ D. $1+y$

OMR

	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Correct Answer

14.C	13.C	12.C	11.D	10.A	09.C	08.D
06.A	05.B	04.B	03.A	02.C	01.B	

সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (B)

এক নজরে এই অংশের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$
- $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$
- $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
- $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
- $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$
- $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$
- $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

Ex-01 প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°} = \sqrt{3}.$

Sol^n: L.S $= \frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°} = \frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°}$

$= \frac{1 + \tan 15°}{1 - \tan 15°}$ [cos15° দ্বারা ভাগ করে]

$= \frac{\tan 45° + \tan 15°}{1 - \tan 45° \tan 15°} = \tan(45° + 15°)$

$= \tan 60° = \sqrt{3}. = $ R.S **(Proved)**

Ex-02 $\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cot\alpha - \cot\gamma = 2\cot\beta.$

Sol^n: $\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{2(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \cos\gamma + \cot\alpha \sin\gamma = 2\cos\gamma + 2\cot\beta \sin\gamma$

$\Rightarrow (\cot\alpha - 2\cot\beta)\sin\gamma = \cos\gamma \Rightarrow \cot\alpha - 2\cot\beta = \cot\gamma$

$\therefore \cot\alpha - \cot\gamma = 2\cot\beta$ **(Proved)**

Ex-03 যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হয় তবে দেখাও যে, (i) $\tan B \tan C = 2$ (ii) $\tan A = \tan B + \tan C$

Sol^n: (i) $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow B + C = \pi - A \quad \Rightarrow \cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$

$\Rightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\cos B \cos C$

$\Rightarrow \sin B \sin C = 2\cos B \cos C.$

$\Rightarrow \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} = 2 \therefore \tan B \tan C = 2$ **(Showed)**

(ii) $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin[\pi - (B+C)]}{\cos B \cos C} = \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C}$

$= \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\cos B \cos C} = \tan B + \tan C$

$\therefore \tan A = \tan B + \tan C$ **(Showed)**

Ex-04 যদি $\tan\alpha + \tan\beta = b, \cot\alpha + \cot\beta = a$ এবং $\alpha + \beta = \theta$ হয় তবে দেখাও যে, $(a-b)\tan\theta = ab$

Sol^n: $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{b}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\therefore \tan\theta = \frac{b}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ....(i)

আবার, $a = \cot\alpha + \cot\beta = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}$

$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta} = \frac{b}{\tan\alpha\tan\beta}$ $\therefore \frac{b}{a} = \tan\alpha\tan\beta$.

(i) নং হতে, $\tan\theta = \frac{b}{1-\frac{b}{a}}$ [$\tan\alpha\tan\beta = \frac{b}{a}$ বসিয়ে]

$\therefore (a-b)\tan\theta = ab$ **(Showed)**

Ex-05 যদি $\cot\theta = \frac{a\cos x - b\cos y}{a\sin x + b\sin y}$ হয় তবে দেখাও যে, $\frac{\sin(\theta - x)}{\sin(\theta + y)} = \frac{b}{a}$

Sol^n: $\cot\theta = \frac{a\cos x - b\cos y}{a\sin x + b\sin y}$

$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{a\cos x - b\cos y}{a\sin x + b\sin y}$

$\Rightarrow a\sin x\cos\theta + b\cos\theta\sin y = a\cos x\sin\theta - b\cos y\sin\theta$.

$\Rightarrow a(\sin\theta\cos x - \cos\theta\sin x) = b(\sin\theta\cos y + \cos\theta\sin y)$.

$\Rightarrow a\sin(\theta - x) = b\sin(\theta + y)$

$\therefore \frac{\sin(\theta - x)}{\sin(\theta + y)} = \frac{b}{a}$ **(Proved)**

Ex-06 যদি $\tan\theta = \frac{x\sin\phi}{1 - x\cos\phi}$ এবং $\tan\varphi = \frac{y\sin\theta}{1 - y\cos\theta}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{x}{y}$

Sol^n: এখানে, $\tan\theta = \frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}$

$\Rightarrow \sin\theta - x\sin\theta\cos\varphi = x\cos\theta\sin\varphi$

$\Rightarrow \sin\theta = x(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)$

$\Rightarrow \sin\theta = x\sin(\theta + \varphi)$ ....(i)

আবার, $\tan\varphi = \frac{y\sin\theta}{1 - y\cos\theta} \Rightarrow \sin\varphi - y\sin\varphi\cos\theta = y\sin\theta\cos\varphi$

$\Rightarrow \sin\varphi = y\sin(\theta + \varphi)$ ....(ii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{x}{y}$ **(Proved)**

Ex-07 যদি $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}$ হয় তবে দেখাও যে,

$\tan(\alpha - \beta) = (1-n)\tan\alpha$.

Sol^n: $\tan\beta = \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1 - n\sin^2\alpha}$

$\Rightarrow \tan\beta = \frac{n\tan\alpha}{\sec^2\alpha - n\tan^2\alpha}$ [$\cos^2\alpha$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \tan\beta = \frac{n\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha - n\tan^2\alpha}$ ....(i)

এখন, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\tan\alpha - \frac{n\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha - n\tan^2\alpha}}{1 + \tan\alpha\frac{n\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha - n\tan^2\alpha}}$ [(i) নং ...

$= \frac{\tan\alpha + \tan^3\alpha - n\tan^3\alpha - n\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha - n\tan^2\alpha + n\tan^2\alpha}$

$= \frac{(\tan\alpha - n\tan\alpha)(1 + \tan^2\alpha)}{1 + \tan^2\alpha} = (1 - n)...$

$\therefore \tan(\alpha - \beta) = (1 - n)\tan\alpha$ **(Sh...**

Ex-08 যদি $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ হয় তবে দেখাও যে,

$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$.

Sol^n: $a\cos\theta + b\sin\theta = a(\cos\theta + \frac{b}{a}\sin\theta)$

$= a(\cos\theta + \tan\alpha\sin\theta) = \frac{a}{\cos\alpha}(\cos\theta\cos\alpha + \sin\alpha\sin\theta)$

$= a\sec\alpha\cos(\theta - \alpha) = a\sqrt{1 + \tan^2\alpha}\cos(\theta - \alpha)$

$= a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}\cos(\theta - \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$

$\therefore a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$ **(Sh...**

For practice:

01. যদি $\cos(A + B)\sin(C + D) = \cos(A - B)\sin(C - D)$ ... দেখাও যে, $\cot A\cot B\cot C = \cot D$

02. যদি $\sin\theta = K\cos(\theta - \alpha)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\cot\theta = \frac{1-K...}{K\cos...}$

03. যদি $\tan\theta - \tan\varphi = x$ এবং $\cot\varphi - \cot\theta = y$ হয় তবে দেখাও ... $\cot(\theta - \varphi) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

04. যদি $\cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{2}$ ... দেখাও যে, $\sum\cos\alpha = 0, \sum\sin\alpha = 0$

05. দেখাও যে, $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sin 2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha}$

06. যদি ΔABC-এ $\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$ হয় তবে প্রমাণ ... $\sin^3\theta = \sin(A - \theta)\sin(B - \theta)\sin(C - \theta)$

SELF TEST:A [WRITTEN]

01. $\tan\beta = \frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cot\gamma + \cot\alpha = 2\cot...$

02. $\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + 1 = 0$ হয় তবে দেখাও যে, $1 + \cot\alpha\tan...$

03. $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে দেখাও যে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

04. দেখাও যে, $\tan 23° + 2\tan 44° = \tan 67°$

05. $\sin\alpha = k\sin(\alpha + \beta)$ হলে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - k}$

SELF TEST: B [MCQ]

01. যদি sinA = $\frac{4}{5}$, cosB = $\frac{3}{5}$ হয় তবে sin (A+B) এর মান কত?
B. 1 C. 2 D. 3

02. tan3A tan2A tanA =?
A. tan3A – tan2A – tanA B. tan3A – tan2A – tanA
C. tanA – tan2A – tan3A D. None

03. $\frac{\cos 8^\circ + \sin 8^\circ}{\cos 8^\circ - \sin 8^\circ}$
A. tan 53° B. tan 35° C. cot 53° D. None

04. sin 75° এর মান কত?
A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ B. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

05. $\tan\frac{\pi}{20} + \tan\frac{\pi}{5} + \tan\frac{\pi}{20}.\tan\frac{\pi}{5}$ = ?
B. 2 C. –1 D. 1

06. $\sin^2(x+y) - \sin^2(x-y)$ =?
A. sin2x cos2y B. sin2x sin2y
C. sin2x cos2y D. None

07. $\frac{\sin(45^\circ + A) + \sin(45^\circ - A)}{\sin(45^\circ + A) - \sin(45^\circ - A)}$ = ?
A. tanA B. cosA C. cotA D. None

08. cot2A + tanA=?
A. [illegible] B. cosec2A C. tan2A D. None

09. tan (45° + A) tan (45° – A) = ?
B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

10. tan3A – tan 2A tanA = ?
A. [illegible] B. cos2A C. sec2A D. cosec2A

11. যদি sin (A + B) = n sin (A – B) (n ≠ 1) এবং cotA = K cotB হয় তবে K এর মান-
A. $\frac{n+1}{n-1}$ B. $\frac{n}{2}$ C. $\frac{n+2}{n-1}$ D. $\frac{n-1}{n+1}$

12. $\frac{\cos 25^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ + \sin 25^\circ}$ = ?
A. tan 70° B. cot 70° C. tan 25° D. cot 25°

13. tan 50° – tan 40° = ?
A. tan 10° B. cot 10° C. 2 cot 10° D. 2 tan 10°

14. $\frac{\sin 27^\circ + \cos 27^\circ}{\cos 18^\circ}$ = ?
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. 0

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

[illegible]	13.D	12.B	11.D	10.C	09.A	08.B
[illegible]	06.B	05.D	04.A	03.A	02.A	01.B

সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (C)

এক নজরে এই অংশের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলী

- 2sinA cosB = sin(A + B) + sin(A – B)
- 2cosA sinB = sin(A + B) – sin(A – B)
- 2cosA cosB = cos(A + B) + cos(A – B)
- 2sinA sinB = cos(A – B) – cos(A + B)
- $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
- $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
- $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$
- $\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$
- $\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta$
- $\tan\theta\tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta) = \tan 3\theta$
- $\sin nA = \cos^n A\,({}^nC_1\tan A - {}^nC_3\tan^3 A + {}^nC_5\tan^5 A - .....)$
- $\cos nA = \cos^n A\,(1 - {}^nC_2\tan^2 A + {}^nC_4\tan^4 A - ......)$
- $\tan nA = \frac{{}^nC_1\tan A - {}^nC_3\tan^3 A + {}^nC_5\tan^5 A - ...}{1 - {}^nC_2\tan^2 A + {}^nC_4\tan^4 A - ...}$

Ex-01 প্রমাণ কর, $\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta) = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

Sol^n: L.S = $\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)$

$= \frac{1}{2}\sin\theta\,[\cos 2\theta - \cos 120^\circ] = \frac{1}{2}\sin\theta\left[\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}\sin\theta\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin\theta = \frac{1}{4}[\sin 3\theta - \sin\theta] + \frac{1}{4}\sin\theta$

$= \frac{1}{4}\sin 3\theta$ = R.S **(Proved)**

Ex-02 প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos 8\theta + 6\cos 6\theta + 13\cos 4\theta + 8\cos 2\theta}{\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta} = 2\cos\theta$

Sol^n: L.S = $\frac{\cos 8\theta + 6\cos 6\theta + 13\cos 4\theta + 8\cos 2\theta}{\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta}$

$= \frac{(\cos 8\theta + \cos 6\theta) + 5(\cos 6\theta + \cos 4\theta) + 8(\cos 4\theta + \cos 2\theta)}{\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta}$

$= \frac{2\cos 7\theta\cos\theta + 5.2\cos 5\theta\cos\theta + 8.2\cos 3\theta\cos\theta}{\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta}$

$= \frac{2\cos\theta(\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta)}{\cos 7\theta + 5\cos 5\theta + 8\cos 3\theta} = 2\cos\theta$ = R.S **(Proved)**

Ex-03 প্রমাণ কর, cos85° + sin85° = $\sqrt{2}$ cos40°

Sol^n: sin85° + cos85° = cos85° + sin(90° – 5°)

= cos85° + cos5° = 2cos45° cos40°

$= 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos 40^\circ = \sqrt{2}\cos 40^\circ$ **(Proved)**

Ex-04 যদি A ≠ B এবং sinA + cosA = sinB + cosB হয় তবে দেখাও যে, A + B = $\frac{\pi}{2}$

Sol^n: sinA + cosA = sinB + cosB ⇒ sinA – sinB = cosB – cosA

$\Rightarrow 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A+B}{2}$ $[\because A \neq B] \Rightarrow \tan\frac{A+B}{2} = 1$

$\Rightarrow \tan\frac{A+B}{2} = \tan\frac{\pi}{4} \therefore A + B = \frac{\pi}{2}$ **(Showed)**

Ex-05 প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n = 2\cot^n\frac{A-B}{2}$$ অথবা শূন্য;

যখন n যথাক্রমে জোড় ও বিজোড় হয়।

Sol^n: $\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n$

$$= \left(\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}\right)^n + \left(\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}}\right)^n$$

$$= \cot^n\frac{A-B}{2} + \left\{-\cot\left(\frac{A-B}{2}\right)\right\}^n$$

$$= \cot^n\frac{A-B}{2} + (-1)^n\cot^n\frac{A-B}{2} = 2\cot^n\frac{A-B}{2} \text{ অথবা } 0$$

যখন n এর মান যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় হয়। **(Proved)**

Ex-06 যদি $\alpha + \beta = \theta$ এবং $\cos\alpha = k\cos\beta$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1-k}{1+k}\cot\frac{\theta}{2}$

Sol^n: দেয়া আছে, $\cos\alpha = k\cos\beta \Rightarrow \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha} = \frac{1-k}{1+k}$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{1-k}{1+k} \Rightarrow \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1-k}{1+k}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\therefore \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1-k}{1+k}\cot\frac{\theta}{2}$ $[\because \alpha + \beta = \theta]$ **(Showed)**

For practice:

প্রমাণ কর যে, (1 – 4)

01. $\tan20° \tan40° \tan80° = \sqrt{3}$

02. $\frac{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha + \cos5\alpha} = \tan3\alpha$

03. $4\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right) = \cos3\theta$

04. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

05. যদি $(\theta - \varphi)$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin\theta + \sin\varphi = \sqrt{3}(\cos\varphi - \cos\theta)$ হয় তবে দেখাও যে, $\sin3\theta + \sin3\varphi = 0$

SELF TEST: C [WRITTEN]

01. $\text{cosec}A + \sec A = \text{cosec}B + \sec B$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan A \tan B = \cot\frac{1}{2}(A+B)$

02. যদি $A + B + C = \pi$ এবং $\sin\left(A + \frac{C}{2}\right) = n\sin\frac{C}{2}$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{n-1}{n+1}$

03. $\frac{\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\beta)} = \frac{a}{b}$ হলে প্রমাণ কর $\frac{a+b}{a-b}\sin^2(\alpha-\beta) = \sin^2(\theta+\alpha) - \sin^2(\theta+\beta)$

04. প্রমাণ কর $\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma) + \sin(\alpha+\beta-$ $+ \sin(\alpha-\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$

05. যদি α, β, θ এর দুইটি ভিন্ন মানের জন্য $bc\cos\theta\cos\varphi + ac\sin\theta$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে দেখাও যে, $(b^2+c^2-a^2)\cos\alpha\cos\beta + ac\sin\alpha\sin\beta = a^2+b^2-c^2$

SELF TEST: C [MCQ]

01. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right) = ?$

A. $\frac{1}{2}\cos A$ B. $\frac{1}{2}\cos2A$ C. $\cos2A$ D. $\frac{1}{2}\sin2A$

02. $\cos20° \cos40° \cos80° = ?$

A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{8}{3}$

03. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\tan\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(A-B$

A. $5+2\sqrt{3}$ B. $5+6\sqrt{2}$ C. $5+2\sqrt{6}$ D. $5+2\sqrt{5}$

04. $\sin10° \sin50° \sin70° = ?$

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

05. $x\sin\varphi = y\sin(2\theta+\varphi)$ হলে $\cot(\theta+\varphi) = ?$

A. $\frac{x+y}{x-y}\cot\theta$ B. $\frac{x-y}{x+y}\cot\theta$ C. $\frac{x-y}{x+y}\tan\theta$ D. None

06. $\frac{1}{2}\text{cosec}10° - 2\sin70° = ?$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

07. $\frac{\sin\theta + \sin\alpha}{\cos\theta + \cos\alpha} = ?$

A. $\cot\frac{\theta+\alpha}{2}$ B. $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$ C. $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ D. None

8. $\sin75° + \cos75° = ?$

A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ B. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ C. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ D. $\sqrt{\frac{3}{4}}$

09. $\cot\theta\cot2\theta + \cot2\theta\cot3\theta + \cot3\theta\cot\theta = ?$

A. $\cot^2\theta - 2$ B. $\cot^2\theta + 2$ C. $2 - \cot^2\theta$ D. $\tan^2\theta -$

10. $A = \sin45° + \cos45°$, $B = \sin44° + \cos44°$ হলে কোনটি

A. A < B B. A > B C. A = B D. None

11. $\sin20°. \sin40°. \sin60°. \sin80° = ?$

A. $\frac{3}{16}$ B. 0 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

12. $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = ?$

A. $-\sin2\theta$ B. $\sin2\theta$ C. $\cos2\theta$ D. $-\cos$

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ

Correct Answer

12.D	11.A	10.B	09.A	08.B	[illegible]
06.A	05.B	04.A	03.C	02.B	[illegible]

যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (D)

এক নজরে এই অংশের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলী

$= 2\sin A\cos A$ ⊃ $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$= \cos^2 A - \sin^2 A$ ⊃ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$= 1 - 2\sin^2 A$ ⊃ $\tan^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}, A \neq (2n+2)\pi$

$= \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ ⊃ $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$

$= 1 - \cos 2A$ ⊃ $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}, A \neq (2n\pm 1)\dfrac{\pi}{4}$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$ ⊃ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

$= \dfrac{1-\cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin A}{1+\cos A} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}, A \neq 2n\pi$

$\dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin A}{1-\cos A} = \sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}, A \neq (2n+1)\pi$

$\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{1-\sin A}{\cos A} = \dfrac{\cos A}{1+\sin A} = \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{\cos A}}$

$\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = \dfrac{\cos A}{1-\sin A} = \sqrt{\dfrac{1+\sin A}{\cos A}}$

$\cos 2A \cos 2^2 A \ldots\ldots \cos 2^{n-1} A = \dfrac{\sin(2^n A)}{2^n \sin A}$

প্রমাণ কর যে, $\cos nA \cos(n+2)A - \cos^2(n+1)A + \sin^2 A = 0$

$= \cos nA \cos(n+2)A - \cos^2(n+1)A + \sin^2 A$

$= \cos nA \cos(n+2)A + \dfrac{1}{2}\,[2\sin^2 A - 2\cos^2(n+1)A]$

$= \cos nA \cos(n+2)A + \dfrac{1}{2}\,[1 - \cos 2A - 1 - \cos 2(n+1)A]$

$= \cos nA \cos(n+2)A - \dfrac{1}{2}\,[\cos 2A + \cos 2(n+1)A]$

$= \cos nA \cos(n+2)A - \dfrac{1}{2} \times 2\cos nA \cos(n+2)A = 0$

$=$ R.S **(Proved)**

প্রমাণ কর যে, $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \dfrac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2\theta)$

L.S $= \cos^6\theta + \sin^6\theta = (\cos^2\theta)^3 + (\sin^2\theta)^3$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^4\theta + \sin^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta)$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \dfrac{3}{4}(2\sin\theta\cos\theta)^2$

$= 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\theta = 1 - \dfrac{3}{4}(1 - \cos^2 2\theta)$

$= 1 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}\cos^2 2\theta = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\cos^2 2\theta = \dfrac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2\theta)$

$=$ R.S. **(Proved)**

প্রমাণ কর, $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

L.S $= \sin 5\theta = \sin(3\theta + 2\theta) = \sin 3\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta \sin 2\theta$

$= (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)(1 - 2\sin^2\theta) + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\, 2\sin\theta\cos\theta$

$= 3\sin\theta - 10\sin^3\theta + 8\sin^5\theta + 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta)(1 - 4\sin^2\theta)$

$= 3\sin\theta - 10\sin^3\theta + 8\sin^5\theta + 2\sin\theta - 10\sin^3\theta + 8\sin^5\theta$

$= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta =$ R.S **(Proved)**

Ex-04 প্রমাণ কর, $\sec x = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}}$

Sol^n: L.S $= \sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{2}{2\cos x} = \dfrac{2}{\sqrt{4\cos^2 x}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2+2\cos 2x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2x}}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4x}}} =$ R.S **(Proved)**

For practice:

প্রমাণ কর যে, (1-6):

01. $\cos^6 A - \sin^6 A = \cos 2A\left(1 - \dfrac{1}{4}\sin^2 2A\right)$
02. $\cos^4 x = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 4x$
03. $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$
04. $\tan 2A = (\sec 2A + 1)\sqrt{\sec^2 A - 1}$
05. $\cos^2 A + \cos^2\left(A + \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(A - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$
06. $\sin^3 x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x) = -\dfrac{3}{4}\sin 3x$
07. যদি $\tan x = \dfrac{b}{a}$ হয় তবে দেখাও যে,
    (a) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} = \dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$
    (b) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} - \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}} = \dfrac{2\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$
08. যদি $\tan\theta \tan\varphi = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(a - b\cos 2\theta)(a - b\cos 2\varphi) = a^2 - b^2$
09. যদি $a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$ হয় তবে দেখাও যে, $\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

SELF TEST: D [WRITTEN]

01. $\tan\theta = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ হলে দেখাও যে, $\sin 2\theta = \dfrac{\sin 2x + \sin 2y}{1 + \sin 2x \sin 2y}$
02. $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ হয় প্রমাণ কর যে, $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 12\cos A \cos B \cos C$
03. $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = x$
04. $\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan\theta = \tan 3\theta \tan 2\theta \tan\theta$
05. $13\theta = \pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta\cos 5\theta\cos 6\theta = \dfrac{1}{2^6}$
06. যদি $\cos 5\theta = a\cos^5\theta + b\cos^3\theta + c\cos\theta$ হয় তবে c -এর মান বের কর। Ans: c = 5
07. প্রমাণ কর যে, $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{5\pi}{15}\cos\dfrac{6\pi}{15}\cos\dfrac{7\pi}{15} = \dfrac{1}{128}$

08. প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta}{\cos3\theta} + \frac{\sin3\theta}{\cos9\theta} + \frac{\sin7\theta}{\cos17\theta} = \frac{1}{2}(\tan17\theta - \tan\theta)$

09. প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha + 2\tan2\alpha + 2^2\tan^2 2^2\alpha + \ldots + 2^{n-1}\tan2^{n-1}\alpha + 2^n\cot2^n\alpha = \cot\alpha$

10. প্রমাণ কর যে,

$(1+\sec2\theta)(1+\sec2^2\theta)(1+\sec2^3\theta)\ldots\ldots(1+\sec2^n\theta) = \frac{\tan2^n\theta}{\tan\theta}$

11. প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha\tan2\alpha + \tan2\alpha\tan3\alpha + \ldots + \tan(n\alpha)\tan(n+1)\alpha = \cot\alpha\tan(n+1)\alpha - n - 1$

12. প্রমাণ কর যে, $(2\cos\theta - 1)(2\cos2\theta - 1)(2\cos2^2\theta - 1)\ldots$

$(2\cos2^{n-1}\theta - 1) = \frac{2\cos2^n\theta + 1}{2\cos\theta + 1}$

13. যদি $m\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{1-m\sin2\alpha} + \frac{1}{1-m\sin2\beta} = \frac{2}{1-m^2}$

যদি $P_n = \cos^n\theta + \sin^n\theta$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $6P_{10} - 5P_8 + 10P_6 - 1 = 0$

14. প্রমাণ কর যে,

$\cos2\alpha = 2\sin^2\beta + 4\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta + \cos2(\alpha+\beta)$

যদি $\frac{\cos(\alpha-3\theta)}{\cos^3\theta} = \frac{\sin(\alpha-3\theta)}{\sin^3\theta} = m$ হয় তবে

দেখাও যে, $m^2 + m\cos\alpha = 2$

15. যদি $3\sin^2A + 2\sin^2\beta = 1$ এবং $3\sin2A - 2\sin2B = 0$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $A + 2B = \frac{\pi}{2}$ যেখানে $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$

SELF TEST: D [MCQ]

01. $\text{cosec}2A + \text{cosec}2B + \text{cosec}2C = 0$ হলে $\tan A + \tan B + \tan C + \cot A + \cot B + \cot C = ?$
A. 2 B. 1 C. 0 D. 2

02. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হলে $10\sin2\theta - 6\tan2\theta + 5\cos2\theta = ?$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

03. $\frac{\tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1} = ?$
A. $\sin\theta$ B. $\cos\theta$ C. $\sin2\theta$ D. $\cos2\theta$

04. $\tan A\tan(60^\circ + A)\tan(120^\circ + A) = ?$
A. tan3A B. −tan3A C. cot3A D. None

05. $4(\sin^3 10^\circ + \cos^3 20^\circ) = ?$
A. $3\sin10^\circ + \cos20^\circ$ B. $3(\sin10^\circ + \cos20^\circ)$
C. $3(\cos10^\circ + \sin20^\circ)$ D. None

06. $\tan\theta = \frac{1}{7}$ হলে $\cos2\theta$ এর মান -
A. $\frac{25}{24}$ B. $\frac{24}{25}$ C. $\frac{1}{25}$ D. $\frac{23}{24}$

07. $\cos^2\theta + \cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right) = ?$
A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

08. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = ?$
A. $\sin2\theta$ B. $\cos2\theta$ C. $\sin\theta$ D. $\cos\theta$

09. $\tan(45^\circ + A) + \tan(45^\circ - A) = ?$
A. 2cos2A B. 2sec2A C. sin2A D. None

10. যদি $(A + B) \neq 0$ এবং $\sin A + \sin B = 2\sin(A + B)$ হয় নিচের কোনটি সঠিক?
A. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ B. $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = 3$
C. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ D. A ও B উভয়ই

11. tanA এবং tanB, $x^2 - x + 5 = 0$ এর দুটি মূল হলে $\sin^2(A+B$
A. $\frac{1}{17}$ B. $-\frac{1}{17}$ C. $\frac{1}{18}$ D. $-\frac{1}{18}$

12. $A + B = \frac{\pi}{4}$, $(\tan A + 1)(\tan B + 1) = ?$
A. −1 B. 0 C. 1 D. 2

13. $\cot A - \tan A = ?$
A. 2 tan2A B. $2\cos^2A$ C. $2\sin^2A$ D. 2cot2A

14. $\frac{\sec2A - 1}{\sec4A - 1} = ?$
A. $\frac{\cot A}{\cot4A}$ B. $\frac{\cot A - 1}{\cot4A - 1}$ C. $\frac{\tan A}{\tan4A}$ D. $\frac{\tan A -}{\tan4A -}$

15. $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right) = ?$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\cos\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

16. $\frac{\sin A - 2\sin^3A}{2\cos^3A - \cos A} = ?$
A. sin A B. cos 3A C. sin 3A D. tan A

17. cosec 2A − cot 2A = ?
A. tan A B. tan 2A C. cot A D. cot 2A

18. $\frac{1}{\sin10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ} = ?$
A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. 0 D. $\sqrt{3}$

19. $\frac{\cot^2A - 1}{2\cot A} = ?$
A. tan 2A B. 0 C. cot 2A D. cos 2A

20. $\frac{\tan54^\circ - \tan36^\circ}{\tan18^\circ} = ?$
A. 4 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}$

21. $\frac{\sin\theta - \sqrt{1+\sin2\theta}}{\cos\theta - \sqrt{1+\sin2\theta}} = ?$ where $0 \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$
A. $\tan\theta$ B. $-\cot\theta$ C. $\cot\theta$ D. $\sec\theta$

22. $A + B = \frac{\pi}{2}$ এবং $B + C = A$, $\tan A = ?$
A. 2 (tanB + tanC) B. tanB + 2tanC C. 2 tanB + tanC D. tanB –

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

22.B	21.C	20.B	19.C	18.A	17.A	16.D	15.C	14.C	13.D
11.A	10.D	09.B	08.B	07.C	06.B	05.B	04.B	03.C	02.C

যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (E)

এক নজরে এই অংশের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলী

$\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ ⮊ $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ ⮊ $\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$

$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$ ⮊ $\tan\theta = \dfrac{3\tan\frac{\theta}{3} - 4\tan^3\frac{\theta}{3}}{1-3\tan^2\frac{\theta}{3}}$

$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta$ ⮊ $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta$

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

Problem গুলো Solve করার জন্য কিছু মান মনে রাখলে সুবিধে

$\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^\circ$ ⮊ $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^\circ$

$\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sin 72^\circ$ ⮊ $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$

$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos 54^\circ$ ⮊ $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \sin 54^\circ$

$\tan 22\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{2}-1 = \cot 67\frac{1^\circ}{2}$ ⮊ $\tan 67\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{2}+1 = \cot 22\frac{1^\circ}{2}$

$\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3} = \cot 75^\circ$ ⮊ $\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3} = \tan 75^\circ$

$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$ ⮊ $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$

$\cos 9^\circ + \sin 9^\circ = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2} = \cos 81^\circ + \sin 81^\circ$

$\cos 9^\circ - \sin 9^\circ = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2} = \sin 81^\circ - \cos 81^\circ$

SPECIAL সূত্র

$\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \begin{cases} \sqrt{1+\sin A} & \text{যখন } 2n\pi - \frac{\pi}{4} \le \frac{A}{2} \le 2n\pi + \frac{3\pi}{4} \\ -\sqrt{1+\sin A} & \text{অন্যথায়} \end{cases}$

$\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2} = \begin{cases} \sqrt{1-\sin A} & \text{যখন } 2n\pi + \frac{\pi}{4} \le \frac{A}{2} \le 2n\pi + \frac{5\pi}{4} \\ -\sqrt{1-\sin A} & \text{অন্যথায়} \end{cases}$

Type-01

Ex-01 প্রমাণ কর যে, $\cot 37\frac{1^\circ}{2} = 2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Solⁿ: L.S. $= \cot 37\frac{1^\circ}{2} = \dfrac{\cos 37\frac{1^\circ}{2}}{\sin 37\frac{1^\circ}{2}} = \dfrac{2\cos^2 37\frac{1^\circ}{2}}{2\sin 37\frac{1^\circ}{2}\cos 37\frac{1^\circ}{2}}$

$= \dfrac{1+\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}$

$= \dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+3-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{2}$

$= 2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ = R.S **(Proved)**

Ex-02 প্রমাণ কর, $\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$

Solⁿ: L.S $= \frac{1}{2}(2\sin^2 24^\circ - 2\sin^2 6^\circ) = \frac{1}{2}(1-\cos 48^\circ - 1 + \cos 12^\circ)$

$= \frac{1}{2}(\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) = \frac{1}{2} \times 2\sin 30^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{2}\sin 18^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$ = R.S **(Proved)**

For practice:

প্রমাণ কর যে, (1-4):

01. $2\sin\frac{\pi}{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
02. $2\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
03. $\tan 7\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$
04. $\tan 82\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

Type-02

Ex-01 প্রমাণ কর, $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

Solⁿ: L.S. $= \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$

$= \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

$= 2\left(\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}\right) = 2\left[\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right]$

$= 2\left[\cos^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8}\right] = 2\left[\left(\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2\right]$

$= 2\left[\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right]$

$= 2 - \left(2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = 2 - \sin^2\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ = R.S

(Proved)

Ex-02 প্রমাণ কর যে, $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+60°\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-60°\right)=\frac{3}{2}$

Sol^n: $L.S = \sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+60°\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-60°\right)$

$$=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos60°+\cos\frac{\alpha}{2}\sin60°\right)^2$$

$$+\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos60°-\cos\frac{\alpha}{2}\sin60°\right)^2$$

$$=\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2 60°+\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 60°\right)$$

$$=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3}{2}=R.S$$ **(Proved)**

For practice:

প্রমাণ কর যে, (1-3):

01. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

02. $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+18°\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-18°\right)=\frac{1}{4}[4+(\sqrt{5}+1)\cos\alpha]$

03. $\sin\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}-\theta\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)=\sin\theta$

Type-03: বিভিন্ন ধরনের প্রমাণ

Ex-01 $x\sin\theta+y\sin\varphi=a$, $x\cos\theta+y\cos\varphi=b$ হলে দেখাও যে, $\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2-(x-y)^2}{4xy}}$

Sol^n: $a^2+b^2=(x\sin\theta+y\sin\varphi)^2+(x\cos\theta+y\cos\varphi)^2$

$$\Rightarrow a^2+b^2=x^2+y^2+2xy\cos(\theta-\varphi)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta-\varphi)=\frac{(a^2+b^2)-(x^2+y^2)}{2xy}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)-1=\frac{(a^2+b^2)-(x^2+y^2)}{2xy}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta-\varphi}{2}=\frac{a^2+b^2-(x^2+y^2)+2xy}{2xy}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\theta-\varphi}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2-(x-y)^2}{4xy}}$$ **(Showed)**

Ex-02 যদি $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2}$ অনুপাতের একটি মান হবে $\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$

Sol^n: $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha+\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha-\cos\beta}$$

$$=\frac{1(1-\cos\alpha)+\cos\beta(1-\cos\alpha)}{1(1+\cos\alpha)-\cos\beta(1-\cos\alpha)}$$

$$=\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}2\cos^2\frac{\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cot^2\frac{\beta}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}$$ **(Proved)**

Ex-03 $\sec(\theta+\alpha)+\sec(\theta-\alpha)=2\sec\theta$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\cos\theta=\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

Sol^n: $\sec(\theta+\alpha)+\sec(\theta-\alpha)=2\sec\theta$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cos\theta\cos\alpha}{\cos^2\theta-\sin^2\alpha}=\frac{2}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta\cos\alpha=\cos^2\theta-\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta(1-\cos\alpha)=\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta\, 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\ \therefore \cos\theta=\pm\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$ **(Proved)**

Ex-04 যদি $\cos\theta=\frac{a\cos\varphi-b}{a-b\cos\varphi}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{a+b}}=\frac{\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{a-b}}$

Sol^n: $\cos\theta=\frac{a\cos\varphi-b}{a-b\cos\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{a-b\cos\varphi-a\cos\varphi+b}{a-b\cos\varphi+a\cos\varphi-b}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{a(1-\cos\varphi)+b(1-\cos\varphi)}{a(1+\cos\varphi)-b(1+\cos\varphi)}$$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{2(a+b)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2(a-b)\cos^2\frac{\varphi}{2}}\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{(a+b)\tan^2\frac{\varphi}{2}}{(a-b)}$$

$$\therefore \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{a+b}}=\frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{a-b}}$$ **(Proved)**

...প্রমাণ কর যে, $\cos^4\frac{A}{2}+\sin^4\frac{A}{2}=\frac{1}{4}(3+\cos 2A)$

$...=\cos^4\frac{A}{2}+\sin^4\frac{A}{2}=\left(\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right)^2-2\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}$

$...\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 A$

$...(1-\cos 2A)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2A=\frac{1}{4}(3+\cos 2A)$ =R.S

(Proved)

For practice:

... $=\frac{a-b}{a+b}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

... $\frac{\theta}{2}=\tan^3\frac{\varphi}{2}$ এবং $\tan\varphi=2\tan\alpha$ হয় তবে দেখাও যে, $\theta+\varphi=2\alpha$

... $+\sin\beta=a$ এবং $\cos\alpha+\cos\beta=b$ হলে দেখাও যে,

$...(\alpha+\beta)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

$...\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

$...\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$

$...\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

SELF TEST: E [WRITTEN]

... $-b\sin\varphi=c=a\cos\theta+b\cos\varphi$ হলে

...প্রমাণ কর যে, $\cos\frac{1}{2}(\theta-\varphi)=\pm\sqrt{\frac{2c^2-(a-b)^2}{4ab}}$

$...\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\varphi}{2}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\cos\varphi=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$

$...=\sin\frac{\pi}{18}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $8x^4+4x^3-6x^2-2x+\frac{1}{2}=0$

...নির্ণয় কর: $\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 36^\circ\cos 48^\circ\cos 72^\circ\cos 84^\circ$

Ans: $\frac{1}{64}$

...নির্ণয় কর: $\sin 78^\circ-\sin 66^\circ-\sin 42^\circ+\sin 6^\circ$ Ans: $-\frac{1}{2}$

$...\frac{\sin 3A}{\sin A}=k$ হয় তবে দেখাও যে, $\frac{\sin 3A}{\sin A}=\frac{2k}{k-1}$ এবং আরও প্রমাণ কর যে, $k>3$ অথবা $k<\frac{1}{3}$

...প্রমাণ কর যে, $\sin 67\frac{1^\circ}{2}=\frac{1}{4}\left[\sqrt{4+2\sqrt{2}}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right]$

... চতুর্ভুজ, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}=\frac{1}{4}$ হলে

...প্রমাণ কর যে, $A=B=C=D=\frac{\pi}{2}$

SELF TEST: E [MCQ]

01. $\sin 18^\circ=?$
A. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ D. Done

02. $2\sin 11^\circ 15'=?$
A. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ B. $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
C. $\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ D. $\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}$

03. $\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ=?$
A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

04. $\sec\theta+\tan\theta=?$
A. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ B. $\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ C. $\tan\frac{\theta}{2}$ D. None

05. $(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=?$
A. $4\cos^2\frac{1}{2}(x-y)$ B. $4\sin^2\frac{1}{2}(x-y)$
C. $4\cos^2\frac{1}{2}(x+y)$ D. None

06. $\cot\frac{A}{2}-3\cot\frac{3A}{2}=?$
A. $\frac{4\cos A}{1+2\cos A}$ B. $\frac{4\sin A}{1+2\cos A}$ C. $\frac{4\sin A}{1+2\sin A}$ D. None

07. $2\cos 7\frac{1^\circ}{2}=?$
A. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ B. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
C. $\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ D. $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

08. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)=?$
A. $\frac{\cos A}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{\sin A}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{\tan A}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{\cot A}{\sqrt{2}}$

09. নিচের কোনটি সঠিক?
A. $\sin\theta=3\sin\frac{\theta}{3}-4\sin^3\frac{\theta}{3}$ B. $\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$
C. $\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ D. সবগুলো

10. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{A}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=?$
A. 2/3 B. 3 C. 3/2 D. 1/2

11. $\sin 36^\circ$ এর মান -
A. $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ B. $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

12. $\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2=?$
A. $1-\sin\theta$ B. $1+\sin\theta$ C. $1+\cos\theta$ D. None

13. $\frac{1}{2}\left(\cot\frac{\beta}{2}-\tan\frac{\beta}{2}\right)=?$
A. $\tan\beta$ B. $\sin\beta$ C. $\cot\beta$ D. $\cos\beta$

14. $\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = ?$

A. $\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ B. $\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ C. $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ D. None

15. $\sin 54°$ এর মান কত?

A. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

16. $\cos A = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{3}{5}$ হলে $\cos\frac{A-B}{2}$ এর মান (যেখানে A এবং B সূক্ষ্মকোণ)

A. $\frac{7}{5\sqrt{2}}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{5\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

17. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ হয় এবং $180° < \alpha < 270°$ হয় তবে $\sin\frac{\alpha}{2}$ এর মান -

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

18. $\sin^2 72° \cos^2 54° - \sin 54° \cos 72°$ এর মান

A. 1/8 B. 2/16 C. 1/16 D. 1/10

19. $2\cos\frac{\pi}{32} = ?$

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ D. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

20. $\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)} = ?$

A. $\cos\theta$ B. $\cos 2\theta$ C. $\sin\frac{\theta}{2}$ D. $\cos\frac{\theta}{2}$

21. $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = ?$

A. $\cot\frac{\theta}{2}$ B. $\tan\frac{\theta}{2}$ C. $\cot\theta$ D. $\tan\theta$

22. $\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = \tan\frac{\pi}{6}$ হলে $\cos B = ?$

A. $\frac{2\cos A - 1}{2-\cos A}$ B. $\frac{2-\cos A}{2\cos A - 1}$

C. $\frac{2-\cos A}{1-2\cos A}$ D. $\frac{1-2\cos A}{2-\cos A}$

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

22.A	21.B	20.D	19.C	18.C	17.B	16.A	15.A	14.B	13.C	12.B
11.A	10.C	09.D	08.B	07.B	06.B	05.A	04.A	03.B	02.B	01.B

সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

এক নজরে এই অংশের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos$ …

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin$ …

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot$ …

➲ $A + B + C = \pi$ হলে $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$ …

Ex-01 $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ কর,

$$\cos A - \cos B + \cos C + 1 = 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Sol^n: L.S $= \cos A - \cos B + \cos C + 1$

$= \cos A + \cos C + 1 - \cos B$

$= 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + 2\sin^2\frac{B}{2}$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\cos\frac{A-C}{2} + 2\sin^2\frac{B}{2}$

$= 2\sin\frac{B}{2}\left[\cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{A+C}{2}\right]$ $\left[\because \sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A+C}{2}\right.$

$= 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = $ R.S (Pr…

Ex-02 $A + B + C = \pi$ হলে প্রমাণ কর,

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$$

Sol^n: L.S $= 1 + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$

$= 1 + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \sin\frac{A+B+C}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} - 2\cos\frac{A+B+2C}{4}\sin$ …

$= 1 + 2\sin\frac{A+B}{4}\left[\cos\frac{A-B}{4} - \cos\frac{A+B+2C}{4}\right]$

$= 1 + 4\sin\frac{A+B}{4}\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}$

$=$ R.S (Pr…

এ অঙ্কের ডান অংশটি

$1 + 4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$ এভাবে প্রমাণ করতে ব… অংকটির যে পর্যন্ত আগের অংকে প্রমাণ চাওয়া হয়েছে সে পর্যন্ত ক… অংশটুকু করতে হবে:

$1 + 4\sin\frac{A+B+C-A}{4}\sin\frac{A+B+C-B}{4}\sin\frac{A+B+C-C}{4}$

$= 1 + 4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$ $[\because A + B + C = \pi]$

... + B + C = 2π হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C$ ... cosB cosC = 1

... $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= \frac{1}{2}[2 + \cos 2A + \cos 2B] + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= ... \frac{1}{2} \times 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= ... \cos C\cos(A-B) + \cos^2C - 2\cos A\cos B\cos C$

$= ... \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] - 2\cos A\cos B\cos C$

$= ... 2\cos A\cos B\cos C - 2\cos A\cos B\cos C = 1$ = R.S (Proved)

... α + β + γ = 0 হয় তবে, প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ $= ... \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$

... $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$

$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\gamma + 1 - 1$

$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1$

$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right] - 1$

$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] - 1 \quad \left[\because \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}\right]$

$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$ = R.S (Proved)

... + B + C = nπ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

... tanB + tanC = tanA.tanB.tanC.

... A + B + C = nπ

... $C = n\pi - A \Rightarrow \tan(B+C) = \tan(n\pi - A)$

... $(B+C) = -\tan A \Rightarrow \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C} = -\tan A$

... tanB + tanC = tanA tanB tanC (Proved)

... practice:

... + B + C = π হলে প্রমাণ কর যে, (1-4):

... $\sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

... $\cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

... $\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

... $\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2\left(1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

... + B + C = $\frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর, sinA + sinB + sinC

$= ... \sin\frac{\pi-2A}{4}\sin\frac{\pi-2B}{4}\sin\frac{\pi-2C}{4}$

... + B + C = $\frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে,

... $\sin^2B + \sin^2C + 2\sin A\sin B\sin C = 1$

... কর যে, $\cos^2(\beta-\gamma) + \cos^2(\gamma-\alpha) + \cos^2(\alpha-\beta)$

... $2\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)\cos(\alpha-\beta)$

SELF TEST: F [WRITTEN]

... γ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ ... $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

02. A + B + C = π হলে প্রমাণ কর যে,
$\frac{\tan B + \tan C}{\tan A} \cdot \frac{\tan C + \tan A}{\tan B} \cdot \frac{\tan A + \tan B}{\tan C} = \sec A\sec B\sec C$

03. A + B + C = π এবং cotA + cotB + cotC = $\sqrt{3}$ হয় তবে দেখাও যে, A=B=C

04. যদি A + B + C = π হয় তবে দেখাও যে, cotA + cotB + cotC − coseсA cosecB cosecC = cotA cotB cotC

05. যদি ΔABC-এ, cosAcosB + cosB cosC + cosC. cosA = 1 − 2cosA cosB cosC হয় তবে প্রমাণ কর যে, ΔABC সমবাহু।

SELF TEST: F [MCQ]

01. A + B + C = π হলে
$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = ?$
A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

02. A + B + C = π হলে tan3A + tan3B + tan3C = ?
A. tan3A tan3C B. tan2A tan2B tan2C
C. tan3A tan3B tan3C D. None

03. A + B + C = π হলে, sin(B + C − A) + sin(C + A − B) + sin(A + B − C) = কত ?
A. 2sinA sinB sinC B. 4sinA sinB
C. 4sinA sinB sinC D. SinA sinB sinC

04. A + B + C = π হলে, sin2A − sin2B + sinC = ?
A. 4cosA sinB cosC B. 2cosA sinB cosC
C. cosA sinB cosC D. None

05. A + B + C = π হলে, $\sin^2A - \sin^2B + \sin^2C$ = ?
A. 2sinA cosB sinC B. 4sinA cosB cosC
C. 2sinA cosB cosC D. None

06. A + B + C = $\frac{\pi}{2}$ হলে, cotA + cotB + cotC = ?
A. tanA tanB tanC B. cotA cotB cotC
C. $\cot^2A\cot^2B\cot^2C$ D. None

07. A + B + C = π হলে, sin(A + B) + cos(A + C) এর মান?
A. sinC − cosB B. sinA + sinB
C. sinB + cosC D. sinA − cosB

08. α + β + γ = 0 হলে, 1 + 2cosα sinβ sinγ + $\cos^2\alpha$ = ?
A. $\cos^2\beta + \cos^2\gamma$ B. $\sin^2\beta + \sin^2\gamma$
C. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ D. None

09. sin A+cos A = sin B+cos B হলে, A+B = ?
A. π B. 2π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

10. A + B + C = π হলে, cos2A + cos2B + cos2C + 4cosA cosB cosC = ?
A. −1 B. 0 C. 1 D. 2

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	04. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	
03. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

10.A	09.C	08.A	07.A	06.B	05.A	04.A	03.C	02.C	01.B

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

01. প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{3\pi}{11} = \sqrt{11}$

02. প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

03. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{3} \le \frac{\sec^4\theta - 3\tan^2\theta}{\sec^4\theta - \tan^2\theta} \le 1$

04. প্রমাণ কর যে,
$\sin^2 12^0 + \sin^2 21^0 + \sin^2 39^0 + \sin^2 48^0 - \sin^2 9^0 - \sin^2 18^0 = 1$

05. যদি $m^2 + m_1^2 + 2mm_1\cos\theta = 1$, $n^2 + n_1^2 + 2nn_1\cos\theta = 1$ এবং $mn + m_1n_1 + (mn_1 + m_1n)\cos\theta = 0$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $m^2 + n^2 = \text{cosec}^2\theta$

06. যদি $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\theta$, $y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n}\theta$ এবং
$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n}\theta.\cos^{2n}\theta$ হয় তবে দেখাও যে $xyz = xy + z$

07. যদি $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ হয় তবে দেখাও যে, $x - \sin x < y - \sin y$

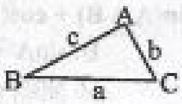
08. যদি $0 < \theta < \pi$ হয় তবে দেখাও যে, $1 + \cot\theta \le \cot\frac{\theta}{2}$

09. যদি $\{\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\sin\beta\}^2 = 4\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha + \beta)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\tan\beta}{(\sqrt{2}\cos\beta - 1)^2}$ যেখানে, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$

সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (G)

এক নজরে এই অংশের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলী

ধরি, ABC একটি ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজে সাধারণত A,B,C দ্বারা তিনটি কোন এবং a, b, c দ্বারা ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে প্রকাশ করা হয়।



➲ ত্রিভুজের সাইন সূত্র: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

➲ ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র:
(i) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (ii) $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
(iii) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

➲ অভিক্ষেপ সূত্র: (i) $a = b\cos C + c\cos B$
(ii) $b = a\cos C + c\cos A$
(iii) $c = a\cos B + b\cos A$

➲ ত্রিভুজের পরিসীমাকে 2s দ্বারা সূচিত করা হয়- ∴ $s = \frac{a + b + c}{2}$

➲ (i) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ii) $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

(iii) $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(iv) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(v) $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$

(vi) $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(vii) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta} = \frac{\Delta}{s(s-a)}$

(viii) $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta} = \frac{\Delta}{s(s-b)}$

(ix) $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta} = \frac{\Delta}{s(s-c)}$

➲ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত:

(i) $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ca\sin B$

(ii) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (iii) $\Delta = \frac{abc}{4R}$

(iv) $\Delta = rs = r_1(s-a) = r_2(s-b) = r_3(s-c) = \sqrt{r r_1 r_2 r_3}$

(v) $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

(vi) $\Delta = s(s-a)\tan\frac{A}{2} = s(s-b)\tan\frac{B}{2} = s(s-c)\tan\frac{C}{2}$

(vii) $\Delta = (s-b)(s-c)\cot\frac{A}{2} = (s-c)(s-a)\cot\frac{B}{2} = (s-a)(s-b)\cot\frac{C}{2}$

➲ যে কোন ত্রিভুজে পরিব্যাসার্ধ $R = \frac{abc}{4\Delta}$

➲ কোন ত্রিভুজের অন্তঃ ব্যাসার্ধ r, হলে, (i) $r = \frac{\Delta}{s}$

(ii) $r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = (s-c)\tan\frac{C}{2}$

(iii) $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (iv) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

(v) $\frac{1}{2Rr} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$

(vi) $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$, $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$, $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$

(vii) $r_1 = s\tan\frac{A}{2}$, $r_2 = s\tan\frac{B}{2}$, $r_3 = s\tan\frac{C}{2}$

(viii) $r_1 = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, $r_2 = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

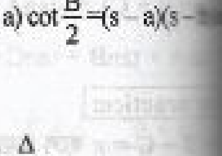
$r_3 = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

যেখানে, r_1, r_2, r_3 যথাক্রমে ∠A, ∠B, ∠C-এর সাপেক্ষে বহিঃব্যাসার্ধ।

cot সূত্র :

(i) $(m + n)\cot\theta = n\cot B - n\cot C$

(ii) $(m + n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$



[For MCQ]

[illegible] মধ্যমাত্রয় AD, BE এবং CF হলে

[illegible] $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$

[illegible] $BE = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos B}$

[illegible] $CF = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}$

[illegible] পরিকেন্দ্র O এবং লম্বকেন্দ্র H-এর মধ্যকার দূরত্ব

$OH = R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}$

[illegible] পরিকেন্দ্র O এবং ভরকেন্দ্র G-এর মধ্যকার দূরত্ব

$OG = \frac{R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}}{3}$

[illegible] লম্বকেন্দ্র H এবং ভরকেন্দ্র G-এর মধ্যকার দূরত্ব

$HG = \frac{2R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}}{3}$

[illegible] পরিকেন্দ্র O এবং অন্তঃকেন্দ্র I-এর মধ্যকার দূরত্ব

$OI = R\sqrt{1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \sqrt{R^2-2Rr}$

[illegible] লম্বকেন্দ্র H এবং অন্তঃকেন্দ্র I-এর মধ্যকার দূরত্ব

$HI = \sqrt{2r^2-4R^2\cos A\cos B\cos C}$

[illegible] এর ভরকেন্দ্র G এবং অন্তঃকেন্দ্র I এর মধ্যকার দূরত্ব

$GI = \sqrt{\frac{2b^2c+2bc^2+2c^2a+2ca^2+2a^2b+2ab^2-a^3-b^3-c^3-9abc}{9(a+b+c)}}$

[illegible] এর অন্তঃকেন্দ্র I এবং বহিঃকেন্দ্রত্রয় I_1, I_2, I_3-এর মধ্যকার দূরত্ব

(i) $II_1 = 4R\sin\frac{A}{2}$, (ii) $II_2 = 4R\sin\frac{B}{2}$, (ii) $II_3 = 4R\sin\frac{C}{2}$

[illegible] এর পরিকেন্দ্র O এবং বহিঃকেন্দ্রত্রয় I_1, I_2, I_3-এর মধ্যকার দূরত্ব

$OI_1 = R\sqrt{1+8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$OI_2 = R\sqrt{1+8\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$OI_3 = R\sqrt{1+8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

[illegible] ∠A এর সাপেক্ষে, I_2 = ∠B এর সাপেক্ষে এবং [illegible] সাপেক্ষে বহিঃকেন্দ্র।

[illegible] বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃস্থ কোণের মান $= \left(\frac{n-2}{n}\right)\pi$

[illegible] $\left(\frac{\pi}{n}\right)$, $r = \frac{a}{2}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$

[illegible] বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{na^2}{4}\cot\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

[illegible] যেখানে a = সুষম বহুভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য,

[illegible] বহুভুজের পরিব্যাসার্ধ, r = সুষম বহুভুজের অন্তঃব্যাসার্ধ

[illegible] + sinC মান বৃহত্তম হবে যখন A=B=C হয়।

[illegible] + cosC মান বৃহত্তম হবে যখন A=B=C হয়।

[illegible] tanB + tanC মান ক্ষুদ্রতম হবে যখন A=B=C হয়।

[illegible] cotB + cotC মান ক্ষুদ্রতম হবে যখন A=B=C হয়।

[illegible] সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2} \times$ অতিভুজ

[illegible] $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$ হয় তবে ΔABC সমবাহু।

➲ যদি $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ হয় তবে ΔABC সমবাহু।

➲ যদি $\tan A + \tan B + \tan C = 3\sqrt{3}$ হয় তবে ΔABC সমবাহু।

➲ যদি $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হয় তবে ΔABC সমবাহু।

➲ যদি $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$ হয় তবে ΔABC সমবাহু।

➲ যদি $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1$ হয় তবে ΔABC সমকোণী।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: বিভিন্ন ধরণের প্রমাণ

Ex-01 ΔABC- এ প্রমাণ কর যে,

$$a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} + b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2} + c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2} = 0$$

Solⁿ: ১ম অংশ $= a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2} = R\sin A \times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}$

$= R\sin A\left[\cos\frac{A-B+C}{2} - \cos\frac{A+B-C}{2}\right]$

$= R\sin A\left[\cos\frac{\pi-2B}{2} - \cos\frac{\pi-2C}{2}\right]$

$= R\sin A\sin B - R\sin A\sin C$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় অংশ $= R\sin B\sin C - R\sin B\sin A$

তৃতীয় অংশ $= R\sin C\sin A - R\sin C\sin B$

তিনটি অংশ যোগ করে পাই = 0

∴ L.S = R.S

(Proved)

Ex-02 ΔABC- এ প্রমাণ কর যে,

$$a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A) + c^3\sin(A-B) = 0$$

Solⁿ: প্রথম অংশ $= a^3\sin(B-C) = a^3(\sin B\cos C - \cos B\sin C)$

$= a^3\left(\frac{b}{2R}\cos C - \frac{c}{2R}\cos B\right)$

$= \frac{a^2}{2R}a(b\cos c - c\cos B)$

$= \frac{a^2}{2R}(b\cos C + c\cos B)(b\cos C - c\cos B)$

$= \frac{a^2}{2R}\left(b^2\cos^2C - c^2\cos^2B\right)$

$= \frac{1}{2R}\left(a^2b^2\cos^2C - c^2a^2\cos^2B\right)$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় অংশ $= \frac{1}{2R}\left(b^2c^2\cos^2A - a^2b^2\cos^2C\right)$

তৃতীয় অংশ $= \frac{1}{2R}\left(c^2a^2\cos^2B - b^2c^2\cos^2A\right)$

তিনটি অংশ যোগ করে পাই = 0

∴ L.S = R.S

(Proved)

Ex-03 ΔABC-এ প্রমাণ কর যে,

$$c^2 = (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$$

Sol^n: $R.S = (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}(a-b)^2(1+\cos C) + \frac{1}{2}(a+b)^2(1-\cos C)$

$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a+b)^2\right] + \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 - (a+b)^2\right]\cos C$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2 = L.S$ **(Proved)**

Ex-04 ΔABC- এ প্রমাণ কর যে,

$$(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = 0$$

Sol^n: $L.S = (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2}$

$= (b-c)\frac{s(s-a)}{\Delta} + (c-a)\frac{s(s-b)}{\Delta} + (a-b)\frac{s(s-c)}{\Delta}$

$= \frac{s}{\Delta}\left[s(b-c+c-a+a-b) - a(b-c) - b(c-a) - c(a-b)\right]$

$= 0 = R.S$ **(Proved)**

Ex-05 ΔABC- এ প্রমাণ কর যে, $\frac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C} = \frac{b^2+c^2}{2b^2-c^2}$

Sol^n: $\frac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C}$

লব $= \frac{2R(b^2+c^2-a^2)}{abc} + \frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc} + \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$

$= \frac{R}{abc}(2b^2 + 2c^2 - 2a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 - b^2 - c^2)$

$= \frac{2R}{abc}(b^2 + c^2)$

হর $= \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc} - \frac{R(a^2+c^2-b^2)}{abc} + 2\frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}$

$= \frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2 - a^2 - c^2 + b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2c^2)$

$= \frac{2R}{abc}(2b^2 - c^2)$ $\therefore \frac{2\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A - \cot B + 2\cot C} = \frac{b^2+c^2}{2b^2-c^2}$ **(Proved)**

For practice:

01. ΔABC- এ প্রমাণ কর যে, $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = s^2$

02. ΔABC- এ প্রমাণ কর যে,
$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$$

03. ΔABC- এ প্রমাণ কর যে,
$$a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A) + c^3\cos(A-B) = 3abc$$

04. ΔABC- এ প্রমাণ কর যে,
$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$$

05. যদি ABC ত্রিভুজে $A = 75°$; $B = 45°$ হয় তবে দেখাও যে,
$c : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

Type-02

Ex-01 যদি কোন ত্রিভুজের যে কোন দুটি কোণের কোসাইন তা... বাহুর সঙ্গে ব্যস্তভেদে অম্বিত হয় তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সম... সমকোণী।

Sol^n: প্রশ্নানুসারে, $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$

$\Rightarrow 2\cos A\sin A - 2\sin B\cos B = 0$

$\Rightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0 \quad \Rightarrow 2\cos(A+B)\sin(A-B) = 0$

অতএব, $\sin(A-B) = 0 \quad \Rightarrow A - B = 0$

$A = B$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

অথবা, $\cos(A+B) = 0$

$\Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$ সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী। (Sho...

Ex-02 ABC ত্রিভুজের সমাধান কর যখন $b = 33, c = 49, \angle A = 6...$

Sol^n: $\tan\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b}\cot\frac{A}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{C-B}{2} = \frac{49-33}{49+33}\cot\frac{68}{2}$

$\Rightarrow C - B = 32°16'$ ....(i)

$C + B = 180° - A = 180° - 68° = 112°$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং সমাধান করে,

$\therefore C = 72°8'$, $B = 39°52$

আবার, $\frac{a}{\sin 68°} = \frac{33}{\sin 39°\ 52'}$ $\therefore a = 47.81$

Ex-03 ΔABC তে $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13}$ হলে প্রমাণ কর যে,
$\frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$

Sol^n: ধরি, $\frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{12} = \frac{a+b}{13} = k$

$\therefore b + c = 11k;\ c + a = 12k;\ a + b = 13k$

$\therefore 2(a+b+c) = 36k$

$\Rightarrow a + b + c = 18k \quad \therefore a = 7k \ \therefore b = 6k \ \therefore c = 5k$

$\therefore \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{36k^2 + 25k^2 - 49k^2}{6k.5k} = \frac{1}{5}$

অনুরূপভাবে, $\cos B = \frac{19}{35}$; $\cos C = \frac{5}{7}$

$\therefore \cos A : \cos B : \cos C = \frac{1}{5} : \frac{19}{35} : \frac{5}{7} = 7 : 19 : 25$

$\therefore \frac{\cos A}{7} = \frac{\cos B}{19} = \frac{\cos C}{25}$ (Pro...

Ex-04 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যদি বাহুগুলি 3 : 4 : 5 এবং $s = 21...$

Sol^n: $a : b : c = 3 : 4 : 5$

$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{12} = \frac{2s}{12} = \frac{2\times 216}{12} = 36$

$\therefore a = 108, b = 144, c = 180$

$\therefore \Delta = \sqrt{216(216-108)(216-144)(216-180)} = 7776$ A...

Ex-05 ΔABC এ $\angle A = 45°, \angle B = 75°$ হলে দেখাও যে, $a + c\sqrt{2}$ ...

Sol^n: $C = 180° - A - B = 180° - 120° = 60°$

$\therefore b = c\cos A + a\cos C$

$\Rightarrow 2b = 2(c\cos 45° + a\cos 60°)$

$= 2\left(\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{a}{2}\right) = a + c\sqrt{2}$ $\therefore 2b = a + c\sqrt{2}$ (Show...

Type-03: অন্তর্ব্যাসার্ধ ও পরিব্যাসার্ধ নির্ণয়

... ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য 24, 22, 14 একক হলে অন্তর্ব্যাসার্ধ (r) ... পরিব্যাসার্ধ (R) নির্ণয় কর।

$s = \frac{24+22+14}{2} = 30$

ক্ষেত্রফল $\Delta = \sqrt{30(30-24)(30-22)(30-14)}$

$= 48\sqrt{10}$ বর্গ একক।

পরিব্যাসার্ধ $R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{24\times22\times14}{4\times48\sqrt{10}} = \frac{77}{2\sqrt{10}}$ একক

অন্তর্ব্যাসার্ধ $r = \frac{\Delta}{s} = \frac{48\sqrt{10}}{30} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$ একক **Ans.**

... $\sqrt{6}$ বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ধরি, সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{6} \Rightarrow a = 4$

$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin 60^\circ} = 2R$

$\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \quad \Rightarrow R = \frac{4}{\sqrt{3}}$ একক

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2 = \pi \times (\frac{4}{\sqrt{3}})^2 = 16.75$ বর্গ একক **Ans.**

For practice:

ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য 5,6,7 একক হলে অন্তঃব্যাসার্ধ ও পরিব্যাসার্ধ ...

Ans: অন্তঃব্যাসার্ধ $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ একক, পরিব্যাসার্ধ $= \frac{35}{4\sqrt{6}}$ একক।

SELF TEST: G [WRITTEN]

ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2-c^2}{\tan A} + \frac{c^2-a^2}{\tan B} + \frac{a^2-b^2}{\tan C} = 0$

ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $(a+b+c).\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right) = 2c\cot\frac{C}{2}$

ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $(b+c-a).\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = 2a\cot\frac{A}{2}$

ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \left(\frac{a+b+c}{b+c-a}\right)\cot\frac{A}{2}$

ΔABC-এ $\cos A + 2\cos B + \cos C = 2$ হলে প্রমাণ কর যে, a,b,c সমান্তর প্রগমনে থাকবে।

ΔABC-এ A গামী মধ্যমা AB উপর লম্ব প্রমাণ কর যে, $\tan A + 2\tan B = 0$

ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2Rr} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$

ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{\Delta^2}{abcs}$

SELF TEST: G [MCQ]

01. $\cos\frac{A}{2} = ?$
A. $\sqrt{\frac{s(s+a)}{bc}}$ B. $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$
C. $\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ D. none

02. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14 এবং 15 হলে, ত্রিভুজটি –
A. স্থূলকোণী B. সমকোণী
C. সূক্ষ্মকোণী D. কোনোটিই নয়

03. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো p, q, $\sqrt{p^2+q^2+pq}$ হলে, ত্রিভুজটি-
A. সূক্ষ্মকোণী B. স্থূলকোণী
C. সমকোণী D. কোনোটিই নয়

04. Δ ABC এ ∠A = 60°, AB = 3, AC = 4 হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল-
A. $3\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

05. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণগুলো A, B, C, D হলে, $\cos\frac{A+C}{2} + \cos\frac{B+D}{2} = ?$
A. 1 B. 0 C. 45 D. 90

06. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে, $\sin\frac{B+D}{2} + \sin\frac{A+C}{2}$ এর মান -
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

07. $\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} = ?$
A. $\tan\frac{C-A}{2}$ B. $\cot\frac{B-C}{2}$
C. $\tan\frac{B-C}{2}$ D. None

08. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 12, 14 এবং 16 হলে ত্রিভুজটির অন্তর্ব্যাসার্ধ, পরিব্যাসার্ধ-
A. $1, \frac{3}{\sqrt{5}}$ B. $5, \frac{30}{\sqrt{5}}$ C. $9, \frac{32}{\sqrt{10}}$ D. $\sqrt{15}, \frac{32}{\sqrt{15}}$

09. ত্রিভুজের যে কোন কোণের sine অনুপাতকে তার বাহুর পরিমাপে প্রকাশ করলে sinA এর মান -
A. $\frac{\Delta}{bc}$ B. $\frac{2\Delta}{bc}$ C. $\frac{\Delta}{ac}$ D. $\frac{3\Delta}{bc}$

10. ΔABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, 2(bc cosA + ca cosB + ab cosC) এর মান -
A. ab + bc + ca B. $ab + bc + ca + a^2 + b^2 + c^2$
C. $a^2 + b^2 + c^2$ D. a + b + c

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

10.C	09.B	08.D	07.C	06.C
05.B	04.A	03.B	02.C	01.B

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

01. $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$-কে tan 3θ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [16-17]

Solve $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$

$$= \tan\theta + \frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\theta} + \frac{\tan\frac{2\pi}{3} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{2\pi}{3}\tan\theta}$$

$$= \tan\theta + \frac{\sqrt{3} + \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} + \frac{\tan\theta - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta(1 - 3\tan^2\theta) + (\tan\theta + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}\tan\theta) + (\tan\theta - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}\tan\theta)}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$= \frac{9\tan\theta - 3\tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = 3\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right) = 3\tan 3\theta \quad \textbf{Ans.}$$

02. যদি sinx + siny = a এবং cosx + cosy = b হয়, তবে দেখাও যে $\sin\frac{1}{2}(x - y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2 - b^2}$ [16-17]

Solve $\sin x + \sin y = a$

$\Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x\sin y + \sin^2 y = a^2$ ——— (1)

$\cos x + \cos y = b$

$\Rightarrow \cos^2 x + 2\cos x\cos y + \cos^2 y = b^2$ ——— (2)

$(1) + (2) \Rightarrow$

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2(\sin x\sin y + \cos x\cos y) + \sin^2 y + \cos^2 y = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 1 + 2\cos(x - y) + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2 + 2\cos\left(2.\frac{x-y}{2}\right) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2 + 2.\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] = a^2 + b^2 \Rightarrow 2 + 2 - 4\sin^2\frac{(x-y)}{2} = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 4 - (a^2 + b^2) = 4\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{4}(4 - a^2 - b^2)}$

$\therefore \sin\frac{x-y}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2 - b^2}$ **(Showed)**

03. প্রমাণ কর যে, $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$

[15-16; 00-01; KUET: 09-10]

Solve L.S. $= 16\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}\left[\text{Let } \frac{2\pi}{15} = \theta\right]$

$= 16\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta$

$= \frac{8}{\sin\theta} 2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta$

$= \frac{4}{\sin\theta} 2\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta$

$= \frac{2}{\sin\theta} 2\sin 4\theta\cos 4\theta.\cos 7\theta = \frac{1}{\sin\theta} 2\sin 8\theta.\cos 7\theta$

$= \frac{1}{\sin\theta}(\sin 15\theta + \sin\theta)$

$= \frac{1}{\sin\theta}(\sin 2\pi + \sin\theta) = 1 = \text{R.S.}$ (Pro

04. যদি কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের কোসাইন তাদের বাহুর সাথে ব্যস্তভেদে অন্বিত হয় এবং বৃহত্তম কোণ ক্ষুদ্রতম বিগুণ হয় তবে ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [15-16]

Solve দেওয়া আছে ΔABC এ $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin A}$ [সাইন সূত্র হতে]

$\Rightarrow 2\sin A\cos A = 2\sin B\cos B$

$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B \Rightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0$

$\Rightarrow 2\sin(A - B)\cos(A + B) = 0$

$\therefore$ হয় $\sin(A - B) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \therefore A = B$

অথবা $\cos(A + B) = 0 = \cos 90° \therefore A + B = 90°$

আবার দেওয়া আছে বৃহত্তম কোণ C = 2A (ধরি A ক্ষুদ্রতম কোণ)

$\therefore$ ১ম ক্ষেত্রে $A + B + C = 180°$

$\Rightarrow A + A + 2A = 180°$

$\therefore A = 45° \therefore C = 2A = 90°$

আবার, ২য় ক্ষেত্রে $A + B = 90°$

$\therefore C = 180° - A - B = 180° - 90° = 90°$

সুতরাং উভয়ক্ষেত্রে বৃহত্তম কোণ 90°

05. যদি $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}\tan\frac{\alpha}{2}$ হয়, দেখাও যে $\cos\alpha = \frac{\cos\theta - p}{1 - p\cos\theta}$

Solve $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}}\tan\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-p}{1+p}\tan^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{1-p}\tan^2\frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - p - \tan^2\frac{\theta}{2} - p\tan^2\frac{\theta}{2}}{1 - p + \tan^2\frac{\theta}{2} + p\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2} - p\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2} - p\left(1 - \tan^2\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}\right) \ldots}{1 - p\left(\frac{1 - \tan \ldots}{1 + \tan \ldots}\right)}$$

$\therefore \cos\alpha = \frac{\cos\theta - p}{1 - p\cos\theta}$ [$(1 + \tan^2\frac{\theta}{2})$ দ্বারা উভয় পক্ষকে ভা...

(Sh...

06. যদি $\theta = \frac{\pi}{36}$ হয়, তবে $\sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta + \ldots \ldots +$ ... এর মান নির্ণয় কর। [13-14]

Solve $\theta = \frac{\pi}{36}$

$\therefore \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta + \ldots + \sin^2 15\theta$

$= \sin^2\frac{3\pi}{36} + \sin^2\frac{4\pi}{36} + \sin^2\frac{5\pi}{36} + \ldots + \sin^2\frac{15\pi}{36}$

$= \sin^2 15° + \sin^2 20° + \sin^2 25° + \ldots + \sin^2 75°$

$= \sin^2 15° + \sin^2 20° + \ldots + \sin^2(90° - 20°) + \sin^2(90° - 15°)$

$= \sin^2 15° + \sin^2 20° + \ldots + \cos^2 20° + \cos^2 15°$

[illegible] $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ∴ প্রদত্ত রাশিতে মোট 13 টা পদ আছে

[illegible] $\sin^2 45° = \frac{1}{2}$ । সুতরাং বাকি 6 জোড়া এর মান

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$ হবে।

[illegible] রাশির মান $= 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$ **Ans.**

[illegible] $\theta = \frac{\pi}{20}$ **হয়, তবে cotθ, cot3θ, cot5θ .... cot19θ এর মান নির্ণয়** [illegible] [03-02]

Solve [illegible] cotθ. cot3θ. cot5θ. cotθ. cot7θ. cot9θ. cot11θ. cot13θ. [illegible] cot17θ.cot19θ

$= \cot\frac{\pi}{20} . \cot\frac{3\pi}{20} . \cot\frac{5\pi}{20} ..... \cot\frac{19\pi}{20}$

$= \cot\frac{\pi}{20}.\cot\frac{3\pi}{20}.\cot\frac{7\pi}{20}.\cot\frac{9\pi}{20}.\cot\frac{5\pi}{20}.\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{20}\right).\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{20}\right)$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{20}\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{20}\right).\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{9\pi}{20}\right)$

$= \cot\frac{\pi}{20}\left(-\tan\frac{\pi}{20}\right). \cot\frac{3\pi}{20}\left(-\tan\frac{3\pi}{20}\right). \cot\frac{5\pi}{20}\left(-\tan\frac{5\pi}{20}\right)$

$\cot\frac{7\pi}{20}\left(-\tan\frac{7\pi}{20}\right).\cot\frac{9\pi}{20}\left(-\tan\frac{9\pi}{20}\right)$

$= (-1)(-1).(-1).(-1) = -1$ **Ans.**

[illegible] দেখাও যে, $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$ [04-05]

Solve L.H.S = cot 3A

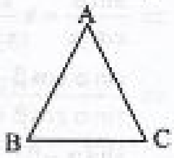
$= \cot(A + 2A) = \frac{\cot A \cot 2A - 1}{\cot A + \cot 2A} = \frac{\cot A\left(\frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}\right) - 1}{\cot A + \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}}$

$= \frac{\frac{\cot^3 A - \cot A - 2\cot A}{2\cot A}}{\frac{3\cot^2 A - 1}{2\cot A}} = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1} = \text{R.H.S.}$

∴ L.H.S = R.H.S **(Showed)**

[illegible] $a = 2b$ **এবং A = 3B হয় তবে ত্রিভুজের কোণগুলো নির্ণয় কর।** [03-04]

Solve $A + B + C = 180°$



$A = 3B, a = 2b$ ∴ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin 3B} = \frac{1}{\sin B}$

$\Rightarrow \sin 3B = 2\sin B$

$\Rightarrow 3\sin B - 4\sin^3 B = 2\sin B$

$\Rightarrow \sin B = 4\sin^3 B \Rightarrow \sin^2 B = \frac{1}{4}$ [∵ B ≠ 0 এবং সূক্ষ্ম কোণ]

$\Rightarrow \sin B = \frac{1}{2}$ ∴ $B = \frac{\pi}{6}$

$A = \frac{\pi}{2}$, $C = \pi - \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6\pi - \pi - 3\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

∴ $A, B, C = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ **Ans.**

[illegible] **ত্রিভুজ ABC এর জন্য দেখাও যে,**

$\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{s^2}{abc}$ **[00-01; RUET 03-04]**

Solve $\text{L.H.S} = \frac{1}{a}\cdot\frac{s(s-a)}{bc} + \frac{1}{b}\cdot\frac{s(s-b)}{ca} + \frac{1}{c}\cdot\frac{s(s-c)}{ab}$

$= \frac{s}{abc}\{3s - (a+b+c)\} = \frac{s}{abc}(3s - 2s) = \frac{s^2}{abc} = \text{R.H.S}$

∴ L.H.S = R.H.S **(Showed)**

11. দেখাও যে, tan70° = tan20°+ 2tan 50°. [03-04]

Solve $\tan 50° = \tan(70° - 20°)$

$= \frac{\tan 70° - \tan 20°}{1 + \tan 70° \tan 20°} = \frac{\tan 70° - \tan 20°}{1 + \tan 70° \cot 70°}$

$= \frac{\tan 70° - \tan 20°}{1 + 1} = \frac{\tan 70° - \tan 20°}{2}$

∴ $\tan 70° = \tan 20° + 2\tan 50°$ **(Showed)**

12. যদি $a = 2, b = 1 + \sqrt{3}, C = 60°$ হয়, তবে ত্রিভুজটি সমাধান কর। [02-03]

Solve $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2.2(\sqrt{3}+1)\frac{1}{2} = 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2$

$\Rightarrow c = \sqrt{6}$ Now, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

∴ $\sin A = \frac{a\sin C}{c} = \frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $A = 45°$ ∴ $B = 180° - (60° + 45°) = 75°$ **Ans.**

13. α ও β দুইটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha = \pm\sqrt{2}\tan\beta$ [01-02; CUET: 09-10]

Solve $\cos 2\alpha = \frac{3\cos 2\beta - 1}{3 - \cos 2\beta} \Rightarrow \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{3\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta} - 1}{3 - \frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}}$

$= \frac{2 - 4\tan^2\beta}{2 + 4\tan^2\beta} = \frac{1 - 2\tan^2\beta}{1 + 2\tan^2\beta} \Rightarrow \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1 - 2\tan^2\beta}{1 + 2\tan^2\beta}$

$\Rightarrow \frac{2}{2\tan^2\alpha} = \frac{2}{4\tan^2\beta}$ [যোজন বিয়োজন]

$\Rightarrow \tan^2\alpha = 2\tan^2\beta$ ∴ $\tan\alpha = \pm\sqrt{2}\tan\beta$ **(Proved)**

14. যদি sinx + siny = 1 এবং, cosx + cosy = 0 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, x + y = π [01-02]

Solve $\sin x + \sin y = 1$

$\Rightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$ .... (i)

আবার, $\cos x + \cos y = 0$

$\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 0$ .... (ii)

(ii) হতে, $\cos\frac{x-y}{2} \neq 0$ কেননা তা না হলে, (i) সিদ্ধ হবেনা

∴ $\cos\frac{x+y}{2} = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2}$

এবং $\sin\frac{x+y}{2} = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ উভয়ক্ষেত্রে $x + y = \pi$ **(Proved)**

15. প্রমাণ কর যে : $\dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3} = \dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$ [98-99]

Solve L.H.S $= \dfrac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}$

$= \dfrac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$ (লব, হরকে $\cos 15^\circ$ দ্বারা ভাগ করে)

$= \tan(45^\circ + 15^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} =$ R.H.S **(Proved)**

16. দেখাও যে : $\tan\dfrac{45^\circ+\theta}{2}\tan\dfrac{45^\circ-\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{\sqrt{2}\cos\theta + 1}$ [98-99]

Solve L.H.S $= \tan\dfrac{45^0+\theta}{2}\tan\dfrac{45^0-\theta}{2} = \dfrac{2\sin\frac{45^\circ+\theta}{2}\sin\frac{45^\circ-\theta}{2}}{2\cos\frac{45^\circ+\theta}{2}\cos\frac{45^\circ-\theta}{2}}$

$= \dfrac{\cos\theta - \cos 45^0}{\cos\theta + \cos 45^0} = \dfrac{\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{\sqrt{2}\cos\theta + 1} =$ R.H.S

(Showed)

17. যদি $\sin x = m\sin y$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{m-1}{m+1}\tan\dfrac{x+y}{2}$ [97-98]

Solve $\sin x = m\sin y$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\sin y} = m \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \dfrac{m-1}{m+1}$ (বিয়োজন যোজন করে)

$\Rightarrow \dfrac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \dfrac{m-1}{m+1}$

$\therefore \tan\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{m-1}{m+1}\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ **(proved)**

18. 10 সে.মি. উঁচু একটি পিরামিড 15 সে.মি., 14 সে.মি. ও 13 সে.মি. বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজাকৃতি ভূমির উপর অবস্থিত। পিরামিডটির আয়তন নির্ণয় কর। [96-97]

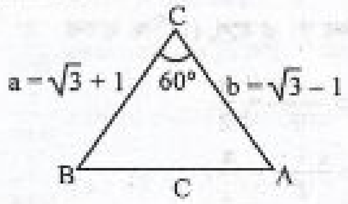
Solve $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$

$V = \dfrac{1}{3}$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $= \dfrac{1}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \times h$

$= \dfrac{1}{3} \times \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} \times 10 = 280$ ঘন সে.মি. **Ans.**

19. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য $\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1$ এবং উহাদের অর্ন্তভূক্ত কোণ 60° হলে, ত্রিভুজটির অন্য বাহু এবং কোণসমূহ নির্ণয় কর। [96-97]

Solve



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$\Rightarrow c = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\cos...}$

$= \sqrt{8 - 2 \times 2 \times \frac{1}{2}}$ $\boxed{\therefore c = \sqrt{6}}$

আবার, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \dfrac{b}{c}\sin C = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\sin 60^\circ$

$\Rightarrow \sin B = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ... $= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \sin 15^\circ$

$\boxed{\therefore B = 15^\circ}$

$A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ$

$\boxed{\therefore A = 105^\circ}$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

01. ABC ত্রিভুজে $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। [05-06; RUET 04-05, 08-09; BUET 95-96]

Solve $\cos A = \sin B - \cos C$

$\Rightarrow \cos A + \cos C = \sin B$

$\Rightarrow 2\cos\left(\dfrac{A+C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-C}{2}\right) = 2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-C}{2}\right) = \sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$

$\Rightarrow \sin\dfrac{B}{2}\cos\left(\dfrac{C-A}{2}\right) = \sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$ $[\because B \neq 0]$

$\Rightarrow \cos\dfrac{C-A}{2} = \cos\dfrac{B}{2}$

$\Rightarrow C - A = B \;\Rightarrow C = A + B = \pi - C$

$\therefore C = \dfrac{\pi}{2}$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী

02. θ কোণকে α ও β অংশে এমনভাবে বিভক্ত করা হলো যেন $\tan\alpha$ ... হয়, প্রমাণ কর যে, $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{k-1}{k+1}\sin\theta$ । [03-04]

Solve $\tan\alpha = k\tan\beta$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = k\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = \dfrac{k}{1}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{k-1}{k+1}$ [যোজন - বিয়োজন ...]

$\Rightarrow \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{k-1}{k+1}$

$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \dfrac{k-1}{k+1}\sin\theta$ $[\because \alpha + \beta = \theta]$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

01. প্রমাণ কর যে, $4(\sin^3 25^\circ + \cos^3 5^\circ) = 3\sqrt{3}\sin 55^\circ$ [13-14]

Solve $4\sin^3 25^\circ + 4\cos^3 5^\circ$

$= 3\sin 25^\circ - \sin 75^\circ + \cos 15^\circ + 3\cos 5^\circ$

$= 3\sin 25^\circ - \sin 75^\circ + \sin 75^\circ + 3\sin 85^\circ$

$= 3(\sin 25^\circ + \sin 85^\circ) = 3.\ 2\sin 55^\circ\cos 30^\circ$

$= 3.2\sin 55^\circ \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\sin 55^\circ$

...টি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়কে নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা ... যায়। সূক্ষ্মকোণদ্বয় এর মান নির্ণয় কর। [09-10]

...: $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$

Solve

$... = 2\cos\theta - 1$

$\frac{...}{...}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ধরি, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$...\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = \sin\alpha$ $\therefore \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$...(\theta - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\therefore \tan\alpha = \frac{1}{2}$

$... - \alpha = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$... = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2\alpha$ যেখানে $n \in Z$

... সূক্ষ্মকোণ সুতরাং $\theta \neq 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in Z$

$... 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2\alpha, n \in Z$ সুতরাং সূক্ষ্মকোণের জন্য θ- এর কোন সমাধান নাই।

... কোন সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া সম্ভব নয়। **Ans.**

... কর যে, $2\sin 11^\circ 15' = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ [05-06]

Solve $L.H.S = 2\sin 11^\circ 15' = \sqrt{2(2\sin^2 11^\circ 15')}$

$... - \cos 22^\circ 30')$

$... \sqrt{2(1 + \cos 45^\circ)}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = R.H.S.$ **(Proved)**

... কর যে, $\tan 54^\circ = \tan 36^\circ + 2\tan 18^\circ$ [04-05]

Solve $2\tan 18^\circ = 2\tan(54^\circ - 36^\circ)$

$= 2\left(\frac{\tan 54^\circ - \tan 36^\circ}{1 + \tan 54^\circ \tan 36^\circ}\right) = 2\left\{\frac{\tan 54^\circ - \tan 36^\circ}{1 + \tan(90^\circ - 36^\circ)\tan 36^\circ}\right\}$

$= 2\left(\frac{\tan 54^\circ - \tan 36^\circ}{1 + \cot 36^\circ \tan 36^\circ}\right) = 2\left(\frac{\tan 54^\circ - \tan 36^\circ}{1 + 1}\right)$

$= \tan 54^\circ - \tan 36$

$\therefore \tan 54^\circ = \tan 36^\circ + 2\tan 18^\circ$ **(Proved)**

... কর যে, কোন ত্রিভুজের বাহু $x^2 + x + 1, 2x + 1$ এবং $x^2 - 1$ হলে ... কোণটির মান 120° [03-04]

Solve আমরা জানি, বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তর

$\cos A = \frac{(x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 - (x^2 + x + 1)^2}{2(x^2 - 1)(2x + 1)}$

$= \frac{... - 2x^2 + 1 + 4x^2 + 4x + 1 - x^4 - x^2 - 1 - 2x^3 - 2x - 2x^2}{2(x^2 - 1)(2x + 1)}$

$= \frac{... - x^2 - 2x^3 + 1}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} = \frac{(2x + 1)(1 - x^2)}{2(2x + 1)(x^2 - 1)} = -\frac{1}{2}$ $\therefore A = 120^\circ$

(Showed)

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

... $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ হলে, $\cos 4\theta = ?$ [12-13]

Solve $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2 \times \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

$\cos 4\theta = 2 \times \left\{\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\right\}^2 - 1$

$= 2 \times \frac{1}{4}\left(x^4 + \frac{1}{x^4} + 2\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ **Ans.**

02. $A + B = \frac{\pi}{4}$ হলে দেখাও যে, $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ [10-11]

Solve দেওয়া আছে, $A + B = \frac{\pi}{4}$

$L.S = (1 + \tan A)(1 + \tan B)$

$= (1 + \tan A)\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)\right\}$

$= (1 + \tan A)\left\{1 + \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan A}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan A}\right\}$

$= (1 + \tan A)\left(1 + \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}\right) = (1 + \tan A + 1 - \tan A)$

$= 2 = R.S \therefore L.S = R.S$ **(Showed)**

03. যদি $A + B + C = \pi$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$. [09-10]

Solve $L.S = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2\sin(\pi - C)\cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2\sin C\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C[\cos(A - B) + \cos\{\pi - (A + B)\}]$

$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$= 2\sin C \times 2\sin A\sin B = 4\sin A\sin B\sin C = R.S.$ **(Proved)**

04. ABC ত্রিভুজ থেকে প্রমাণ কর যে, $a\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b + c)\sin\left(\frac{A}{2}\right)$. [07-08]

Solve $\frac{a}{b + c} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B - C}{2}\right)}$

$= \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B - \pi + (A + B)}{2}\right)}$ $\left[\because \sin\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\right]$

$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left\{-\frac{\pi}{2} + \left(\frac{A}{2} + B\right)\right\}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2} + B\right)}$

$\therefore a\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b + c)\sin\frac{A}{2}$ **(Proved)**

05. ABC ত্রিভুজ থেকে প্রমাণ কর যে, $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$ [06-07]

Solve $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$

$= \frac{1}{4R^2}\{a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2)\} = 0$ **(Proved)**

06. সমাধান কর: $\dfrac{(\sec x+\tan x)^2-(\sec 2x+\tan x)^2}{\sin 2x-\sin x}=2;\ [-\pi\le x\le\pi]$ **[06-07]**

Solve $\dfrac{(\sec x+\tan x)^2-(\sec 2x+\tan x)^2}{\sin 2x-\sin x}-2\ [-\pi\le x\le\pi]$

প্রদত্ত ব্যবধানে Solve করা সম্ভব নয়। **Ans.**

07. ABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে, $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$। **[05-06; RUET : 12-13]**

Solve যে কোন ত্রিভুজ ABC এর জন্য $A+B+C=\pi$

$\Rightarrow A+B=\pi-C \Rightarrow \cot(A+B)=\cot(\pi-C)$

$\Rightarrow \dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$

$\therefore \cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$ **(Proved)**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

01. যদি $\tan\theta=\dfrac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ধনাত্মক হয়, তবে $\dfrac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$ এর মান হবে: **[11-12]**

A. $\dfrac{34}{39}$ B. $\dfrac{34}{40}$ C. $\dfrac{30}{39}$ D. $\dfrac{35}{50}$

Ans A Solve $\tan\theta=\dfrac{5}{12}$, $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$, $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

$\therefore \dfrac{\sin\theta+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\dfrac{\frac{5}{13}+\frac{12}{13}}{\frac{13}{12}+\frac{5}{12}}=\dfrac{17}{13}\times\dfrac{12}{18}=\dfrac{34}{39}$

02. $\sin 18^\circ+\cos 18^\circ$ এর মান নির্ণয় কর। **[09-10; RUET : 13-14]**

A. $\sin 36^\circ$ B. $-\sqrt{2}\cos 27^\circ$ C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 27^\circ$ D. $\sqrt{2}\cos 27^\circ$

Ans D Solve $\sin 18^\circ+\cos 18^\circ=\sin 18^\circ+\sin 72^\circ$

$=2\sin\dfrac{90^\circ}{2}.\cos 27^\circ=2.\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\cos 27^\circ=\sqrt{2}\cos 27^\circ$

03. যদি $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ হয়, তবে $x\cos 2\theta+y\sin 2\theta$ এর মান হবে- **[05-06]**

A. 2x B. x + y C. x − y D. x

Ans D Solve $\tan\theta=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\dfrac{y}{x}$

$\Rightarrow x-x\cos 2\theta=y\sin 2\theta \therefore x\cos 2\theta+y\sin 2\theta=x$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

01. $\cos^2 A+\cos^2\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)$ এর মান কোনটি? **[17-18]**

A. $\dfrac{3}{2}$ B. $\dfrac{3}{2}+1$ C. $\dfrac{1}{2}+5$

D. $\dfrac{5}{7}$ E. $\dfrac{7}{9}$

Ans A Solve $\cos^2 A+\cos^2\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2A)+1+\cos^2\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2A+\cos\left(A-\dfrac{\pi}{3}+A+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(A+\dfrac{\pi}{3}-A+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2A+\cos 2A\cos\dfrac{2\pi}{3}$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2A-\dfrac{1}{2}\cos 2A=\dfrac{3}{2}$

02. $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$ হলে θ এর মান কোনটি? **[16-17]**

A. $\pm\dfrac{\pi}{4}+\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ B. $\pm\dfrac{\pi}{2}+\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

C. $\pm\dfrac{\pi}{4}+\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ D. $\pm\dfrac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

E. $\pm\dfrac{\pi}{4}+\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{1\sqrt{2}}\right)$

Ans A Solve $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

$\Rightarrow \sin(\pi\cos\theta)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\right)$

$\Rightarrow \pi\cos\theta=\dfrac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta\pm\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4}\pm\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \theta=\pm\dfrac{\pi}{4}+\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

03. $\dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{2}$ এবং $\dfrac{\tan x}{\tan y}=\sqrt{3}$ হলে, x এবং y এর মান কোনটি?

A. $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}$ B. $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{5}$ C. $-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{8}$ D. $\dfrac{\pi}{7},\dfrac{\pi}{5}$ E. –

Ans A Solve $\dfrac{\frac{\tan x}{\sin x}}{\frac{\tan y}{\sin y}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow\dfrac{\cos y}{\cos x}=\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/\sqrt{2}}$

$\therefore y=\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ এবং $x=\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

04. ABC ত্রিভুজে যদি $a=3$, $b=3\sqrt{3}$ এবং $A=30^\circ$ হয় তবে ... এর মান কোনটি? **[16-17]**

A. 45°, 30° B. 30°, 40° C. 20°, 45°

D. 10°, 70° E. 30°, 90°

Ans Blank Solve $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow \sin B=\dfrac{3\sqrt{3}\times\sin 30^\circ}{3}$

$\therefore B=60^\circ$ or 120°

$C=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$ or $C=180^\circ-120^\circ-30^\circ=$ ...

যদি cos(A + B) sin (C + D) = cos (A– B) sin (C – D) হয়, তাহলে tanD এর মান কোনটি? [15-16]

A. tanA tanB tanC B. cotA cotB cotC C. sinA sinB sinC
D. cosA cosB cosC E. secA secB secC

Ans A Solve $\cos(A+B)\sin(C+D) = \cos(A-B)\sin(C-D)$

$\Rightarrow \frac{\sin(C+D)}{\sin(C-D)} = \frac{\cos(A-B)}{\cos(A+B)}$

$\Rightarrow \frac{\sin(C+D)+\sin(C-D)}{\sin(C+D)-\sin(C-D)} = \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}$ [যোজন-বিয়োজন]

$\Rightarrow \frac{2\sin C\cos D}{2\cos C\sin D} = \frac{2\cos A\cos B}{2\sin A\sin B}$

$\Rightarrow \tan C\cot D = \cot A\cot B$

$\therefore \tan D = \tan A\tan B\tan C$

tan(45° + A) + tan(45° – A) এর মান কত? [14-15]

A. 2sinA B. 2cosA C. 2tanA D. 3cotA E. 2sec2A

Ans E Solve $\frac{\tan 45° + \tan A}{1-\tan 45°\tan A} + \frac{\tan 45° - \tan A}{1+\tan 45°\tan A}$

$= \frac{(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2}{(1-\tan A)(1+\tan A)} = \frac{2(1+\tan^2 A)}{1-\tan^2 A} = 2\sec 2A$

একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 9, 40 এবং 41। ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত? [13-14]

A. 20.5 B. 30.0 C. 20.5 D. 25.0

Ans C Solve $\frac{a}{\sin A} = 2R$ যেখানে R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ।

আবার, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{40^2+41^2-9^2}{2\times 40\times 41} = \frac{40}{41}$

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{40^2}{41^2}} = \frac{9}{41}$

$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{9}{2\times\frac{9}{41}} = \frac{41}{2} = 20.5$

Shortcut $R = \frac{abc}{4\Delta}$ অথবা, $\because c^2 = a^2+b^2$, $\therefore R = \frac{c}{2} = \frac{41}{2}$

$\cos\theta = \frac{a\cos\varphi - b}{a - b\cos\varphi}$ হলে $\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}}$ এর মান কোনটি? [13-14]

A. $\frac{a+b\sin\varphi}{b+a\sin\varphi}$ B. $\sqrt{\frac{a+b\cos\varphi}{a-b\sin\varphi}}$ C. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$
D. $\frac{\frac{a}{b}+b}{b}$ E. $\frac{(a+b)^2}{a-b}$

Ans C Solve $\cos\theta = \frac{a\cos\varphi - b}{a - b\cos\varphi}$

$\Rightarrow \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{a+b-(a+b)\cos\varphi}{a-b+(a-b)\cos\varphi}$ [যোজন বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(a+b)(1-\cos\varphi)}{(a-b)(1+\cos\varphi)} = \frac{a+b}{a-b}\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{a+b}{a-b}\tan^2\frac{\varphi}{2}$ $\therefore \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

09. যদি tanα – tanβ = p, cotβ – cotα = q ও θ = α – β হয়, তবে cotθ -এর মান হলো- [12-13]

A. $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ B. $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ C. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ D. $1-\frac{p}{q}$ E. $1+\frac{p}{q}$

Ans C Solve $\tan\alpha - \tan\beta = p$

$\Rightarrow \frac{\cot\beta - \cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta} = p \Rightarrow \cot\alpha\cot\beta = \frac{q}{p}$

Now, $\cot\theta = \cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

$= \frac{\frac{q}{p}+1}{q} = \frac{q+p}{pq} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

10. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 2x + 3, x^2 + 3x + 3 এবং x^2 + 2x হলে, বৃহত্তম কোণটি হবে- [11-12]

A. 90° B. 120° C. 60° D. 180°

Ans B Solve সবচেয়ে বড় বাহু $a = x^2+3x+3$ এবং বড় কোণ A হলে, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{(2x+3)^2+(x^2+2x)^2-(x^2+3x+3)^2}{2\times(2x+3)(x^2+2x)} = -\frac{1}{2}$ $\therefore A = 120°$

11. যদি cos x + cos y = a এবং sin x + sin y = b হয়, তবে cos (x + y) এর মান কোনটি? [11-12, 09-10]

A. $\frac{a-b}{a+b}$ B. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ C. $\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}$ D. $\frac{a^3+2b^2}{a^3-b^2}$ E. $\frac{a^2+3b^2}{a^2-2b^2}$

Ans B Solve $\cos x + \cos y = a$

$\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$ ..... (i)

আবার, $\sin x + \sin y = b \Rightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = b$ .... (ii)

$(i)\div(ii) \Rightarrow \frac{\cos\frac{x+y}{2}}{\sin\frac{x+y}{2}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{x+y}{2}-\sin^2\frac{x+y}{2}}{\cos^2\frac{x+y}{2}+\sin^2\frac{x+y}{2}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ [যোজন - বিয়োজন]

$\therefore \cos(x+y) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

12. (a+b+c) (b+c–a) = 3bc হলে, A কোণের মান নির্ণয় কর। [10-11; CUET : 13-14]

A. 30° B. 0° C. 60° D. 45°

Ans C Solve $(b+c)^2 - a^2 = 3bc$

$\Rightarrow b^2+c^2-a^2 = bc$

$\Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}$ $\therefore A = 60°$

13. যদি $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ এবং $\sin B \sin C = -\sin A$ হয়, তবে $\cot A + \cot B + \cot C$ এর মান কোনটি? [11-12]

A. 1 B. –1 C. 0 D. 2 E. –2

Ans C Solve $A + B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow B + C = \frac{\pi}{2} - A$

$\Rightarrow \cot(B + C) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \Rightarrow \frac{\cot B \cot C - 1}{\cot C + \cot B} = \frac{1}{\cot A}$

$\Rightarrow \cot A \cot B \cot C - \cot A = \cot C + \cot B$

$\therefore \cot A + \cot B + \cot C = \cot A.\cot B.\cot C$

$= \cot A \frac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \cot A \frac{\cos(B + C) + \sin B \sin C}{\sin B \sin C}$

$= \cot A \frac{\sin A - \sin A}{-\sin A} = 0$

14. যদি $\cot\alpha + \cot\beta = a$, $\tan\alpha + \tan\beta = b$ ও $\alpha + \beta = \theta$ হয় তবে $\cot\theta$ এর মান কত? [10-11]

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ C. $\frac{1}{a+b}$

D. $\frac{1}{a-b}$ E. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

Ans E Solve $\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} = a$

$\Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta = a(\tan\alpha \tan\beta)$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \tan\alpha \tan\beta$ ..... (i)

এখন, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{1 - \frac{b}{a}}$ [(i) নং হতে] $= \frac{ab}{a - b} \Rightarrow \cot\theta = \frac{a - b}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

15. $\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta)$ এর মান কোনটি? [09-10]

A. $\sec 2\theta$ B. $\tan 3\theta$ C. $\sin 2\theta$

D. $\frac{1}{4}\sin 3\theta$ E. $\frac{1}{2}\cos 2\theta$

Ans D Solve $\sin\theta \sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta)$

$= \sin\theta(\sin^2 60^\circ - \sin^2\theta) = \sin\theta\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\theta\right\}$

$= \sin\theta\left(\frac{3}{4} - \sin^2\theta\right) = \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{4} = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

16. $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1$ এর মান কোনটি? [08-09]

A. $2\sin^2\theta$ B. $2\cos^2\theta$ C. $\sin 2\theta$

D. $\cos 2\theta$ E. $\cos^2 2\theta$

Ans D Solve $8\sin^4\frac{\theta}{2} - 8\sin^2\frac{\theta}{2} + 1$

$= -8\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 1 = -8\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 1$

$= 1 - 2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta$

17. $\sin\theta$ কে $\cot\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর- [06-07]

A. $\pm\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2 + \cot^2\theta}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta}}$

D. $\pm\frac{1}{\sqrt{1 - \cot^2\theta}}$ E. $\frac{1}{\sqrt{2 - \cot^2\theta}}$

Ans A Solve $\sin\theta = \frac{1}{\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \cot^2\theta}}$

18. cosec (–660°) এর মান হল? [06-07]

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ D. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ E.

Ans A Solve $\mathrm{cosec}(-660^\circ) = \mathrm{cosec}(-720^\circ + 60^\circ)$

$= \mathrm{cosec}\,60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

19. $\sin 27^\circ + \cos 27^\circ$ এর মান কত? [06-07]

A. $\sqrt{2}\cos 18^\circ$ B. $-\sqrt{2}\cos 18^\circ$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 18^\circ$

D. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 18^\circ$ E. $\sin 18^\circ$

Ans A Solve $\sin 27^\circ + \cos 27^\circ = \sqrt{2}\cos(45^\circ - 27^\circ)$

$= \sqrt{2}\cos 18^\circ$

20. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো 13, 14 এবং 15 একক হলে, ত্রি... ক্ষেত্রফল হবে- [06-07]

A. 84 sq. units B. 88 sq. unit C. 80 sq. units D. 64 ...

Ans A Solve $s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$

$\therefore \Delta = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)}$

$= 84$ sq. units

21. cot (–1395°)- এর মান- [05-06]

A. 1 B. –1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

Ans A Solve $\cot(-1395^\circ) = \cot(-1440^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ$ ...

22. যদি $A + B + C = \pi$ ও $\cos A + \cos B = \sin C$ হয় তবে B কোণের মান হলো- [13-14]

A. $\pi/3$ B. $\pi/6$ C. $\pi/4$ D. $\pi/2$ E. 2π...

Ans D Solve $\cos B + \cos A = \sin C$

$\Rightarrow 2\cos\frac{A + B}{2}\cos\frac{B - A}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{B - A}{2}\right) = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{B - A}{2}\right) = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{B - A}{2} = \cos\frac{C}{2} \Rightarrow B - A = C \therefore B = A + C = \frac{\pi}{2}$

23. যদি $A + B = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে $\cos^2 A - \cos^2 B$ এর মান কত? [1...]

A. $\sin(A - B)$ B. $\sin(B - A)$ C. $\cos(B...$

D. $-\cos(B - A)$ E. 1

Ans B Solve $\cos^2 A - \cos^2 B$

$= \sin^2 B - \sin^2 A = \sin(B + A).\sin(B - A) = 1.\sin(B - A)$

$= \sin(B - A)$

... $\cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$ হয়, তবে A+B+C ... কত? [10-11]

B. π C. $\frac{3\pi}{2}$

E. $\frac{7\pi}{2}$

Ans B Solve $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

... $\cot C + \cot C \cot A = 1 - \cot A \cot B$

... $C = -\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot(A+B)$

... $C = \cot\{\pi - (A+B)\}$

... $C = \pm - (A+B)$

... $B + C = \pi$

... কোন ত্রিভুজে যদি $B + C = 2A$ হয়, তবে $2a \cos\frac{B-C}{2}$ এর ... মান কত? [08-09]

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ B. $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ C. $a-b$

E. $b+c$

Ans E Solve $B + C = 2A$

... $- A = 2A \Rightarrow A = 60°$

$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A}$

$= \frac{2\sin\frac{2A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A} = 2\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$

$2a\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = b + c$

... কোন ত্রিভুজে $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ হলে $\angle C$ এর মান ... [07-08]

... B. 30° C. 45° D. 90° E. 60°

Ans E Solve $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$

$\frac{a+b+2c}{ab+ca+bc+c^2} = \frac{3}{a+b+c}$

... $ca+ab+b^2+bc+2ca+2bc+2c^2 = 3ab+3ca+3bc+3c^2$

... $a^2+b^2-c^2 = ab$

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2} \therefore C = 60°$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

... $B + C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হলে, $\tan B\tan C + \tan C\tan A + \tan A \tan B$ এর মান বের কর। [15-16]

... B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. 1 D. 1/2

Ans C Solve $A + B + C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A + B = (2n+1)\frac{\pi}{2} - C$

$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} - C\right\}$

$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = \cot C \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = \frac{1}{\tan C}$

$\Rightarrow \tan c \tan A + \tan B \tan C = 1 - \tan A \tan B$

$\therefore \tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1$

02. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2+b^2)$ হলে, $\cos C$ এর মান হবে: [14-15]

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. None

Ans B Solve $(a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2(-c^2)a^2 + 2(b^2)(-c^2) + 2a^2b^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2+b^2-c^2)^2 = 2a^2b^2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \cos C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

03. যদি $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$, হয়, তাহলে $\cos(\alpha - \beta)$ এর মান কত? [14-15]

A. $\frac{a^2+b^2+2}{2}$ B. $\frac{a^2+b^2-2}{2}$ C. $\frac{a^2-b^2-2}{2}$ D. $\frac{a^2-b^2+2}{2}$

Ans B Solve $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$

$\therefore a^2+b^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta$

$= 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$\therefore \cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

04. A এর কোন মানের জন্য $\cos A \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান বৃহত্তম হবে? [14-15]

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. None

Ans B Solve $\cos A\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left\{\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\right\}$

সুতরাং $\cos A\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ বৃহত্তম হয়, অর্থাৎ $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ হয় অর্থাৎ $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ হয় অর্থাৎ $A = \frac{\pi}{3}$ হয়।

05. $\cos^{-1}\left(\frac{144}{169}\right) = \theta$ হলে $\tan\theta$ এর মান হবে- [09-10]

A. 25 / 169 B. 169 /25

C. 25 / 144 D. None of them

Ans D Solve $\cos^{-1}\frac{144}{169} = \theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{144}{169} \Rightarrow \sec\theta = \frac{169}{144}$

$\therefore \tan\theta = \pm\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \pm\sqrt{\left(\frac{169}{144}\right)^2 - 1}$

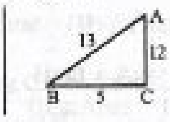
$= \pm\frac{\sqrt{(169)^2 - (144)^2}}{144} = \pm\frac{5\sqrt{313}}{144}$

06. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5cm, 12cm, 13cm হলে ত্রিভুজটি– [09-10; RUET : 10-11]

A. স্থূলকোণী ত্রিভুজ B. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ
C. সমকোণী ত্রিভুজ D. None of them

Ans | C | Solve $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী



07. $\cos^2\theta = \dfrac{(a+b)^2}{4ab}$ সমীকরণে a = b হলে θ এর মান হবে– [09-10]

A. 0° B. 90°
C. 45° D. None of them

Ans | A | Solve $\cos^2\theta = \dfrac{(2b)^2}{4b^2} = 1 \therefore \theta = 0$

08. একটি ত্রিভুজের $(\sqrt{3}+1)$cm দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহু সংলগ্ন দুটি কোণ 30° ও 45°। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত? [11-12]

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ B. 2 C. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ D. None of these

Ans | C | Solve ত্রিভুজের sine সূত্র মতে,

$\dfrac{AB}{\sin 45°} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sin 105°} \Rightarrow AB = 2$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2} \times AB \times BC \sin 30° = \dfrac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{3}+1) \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ বর্গ একক

09. যদি ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয় BC = a, CA = b, AB = c হয় এবং $(b+c-a)(a+b+c) = (\sqrt{3}+2)bc$ হয়, তবে A এর মান কত? [12-13]

A. 60° B. 45°
C. 30° D. None

Ans | C | Solve $(b+c-a)(a+b+c) = (\sqrt{3}+2)bc$

$\Rightarrow ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 - a^2 - ba - ac = \sqrt{3}bc + 2bc$

$\Rightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° \therefore A = 30°$

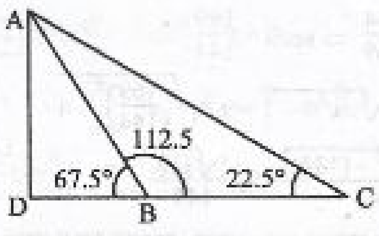
RUET এর বিগত প্রশ্নাবলী

01. কোন ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় 22.5° ও 112.5° ও ত্রিভুজের উচ্চতা h হলে ভূমি কত? [14-15]

A. h B. 2h C. $\dfrac{h}{2}$

D. $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$ E. None

Ans | B | Solve



$BC = CD - BD = h\cot 22.5° - h\cot 67°5°$

$\therefore BC = h\left(\dfrac{\cos 22.5°}{\sin 22.5°} - \dfrac{\cos 67.5°}{\sin 67.5°}\right)$

$= h\dfrac{\cos 22.5° \sin 67.5 - \sin 22.5° \cos 67.5°}{\sin 22.5° \sin 67.5°}$

$= h\dfrac{2\sin(67.5° - 22.5°)}{2\sin 22.5° \cos 22.5°} = h \times \left(\dfrac{2\sin 45°}{\sin 45°}\right) = 2h$

02. যদি 0° < θ < 180° হয়, তবে $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+2(1+\cos\theta)}}} =$ (n সংখ্যক 2) [14-15]

A. $2\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$ B. $2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ C. $2\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$

D. $2\cos\dfrac{n\theta}{2}$ E. $2\cos\dfrac{\theta}{2n}$

Ans | B | Solve $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}} = \sqrt{2+\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}$

$= \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^2}} = 2\cos\frac{\theta}{2^2}$

আবার, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}}$

$= \sqrt{2+\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^2}}}$

$= \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^2}}$

$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^3}} = 2\cos\frac{\theta}{2^3}$

এইভাবে অগ্রসর হলে,

$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2(1+\cos\theta)}}}}}_{\text{n সংখ্যক 2}} = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

03. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^4}\right)$ এর মান- [13-14]

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B. $\frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ E. None

Ans | C | Solve $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^4}\right) = \sin 11°15' = \frac{1}{2} 2\sin 11°15'$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4\sin^2 11°15'} = \frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos 22°30')}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos 22°30'} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2 22°30'}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos 45°)}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

[illegible] $\sin^3 x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x) = ?$ [11-12]

A. $-3\sin 3x$ B. $-\frac{1}{4}\sin 3x$ C. $\frac{3}{4}\sin 3x$

D. $-\frac{3}{4}\sin 3x$ E. $-\frac{1}{3}\sin 3x$

Ans: D **Solve** $\sin^3 x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x)$

[illegible] $\sin x - \sin 3x + 3\sin(120° + x) - \sin(360° + 3x)$

[illegible] $\sin(240° + x) - \sin(720° + 3x)$

[illegible] $\sin x + \sin(120° + x) + \sin(240° + x) - \frac{1}{4}(\sin 3x + \sin 3x + \sin 3x)$

[illegible] $\sin x + 2\sin\left(\frac{120° + x + 240° + x}{2}\right)\cos\left(\frac{240° + x - 120° - x}{2}\right)\} - \frac{3}{4}\sin 3x$

[illegible] $\sin x + 2\sin(180° + x)\cos 60°\} - \frac{3}{4}\sin 3x$

[illegible] $\sin x - \sin x) - \frac{3}{4}\sin 3x = -\frac{3}{4}\sin 3x$

[illegible] $\frac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = ?$ [10-11]

A. $\tan 18°$ [illegible] B. $\tan 18°$ C. $\cos 18°$

D. $\tan 15°$ [illegible] E. $\cot 15°$

Ans: B **Solve** $\frac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = \frac{2\sin\frac{27° + 63°}{2}\sin\frac{63° - 27°}{2}}{2\cos\frac{27° + 63°}{2}\cos\frac{63° - 27°}{2}}$

$= \frac{\sin 45° \sin 18°}{\cos 45° \cos 18°} = \tan 18° \tan 45° = \tan 18°$

[illegible] $\cos\alpha + \cos\beta = a$, $\sin\alpha + \sin\beta = b$ এবং $\alpha - \beta = 2\theta$ হয় তবে $\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ এর মান? [09-10]

A. $a^2 + b^2 - 3$ B. $a^2 - b^2 + 3$ C. $3 - a^2 + b^2$

D. $\frac{a^2 + 3}{b^2}$ E. $a^2 - 3 - b^2$

Ans: A **Solve** $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2 - 2$

$\Rightarrow 2\cos 2\theta = a^2 + b^2 - 2$

$\Rightarrow 2(2\cos^2\theta - 1) - 1 = a^2 + b^2 - 3$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta - 3 = a^2 + b^2 - 3 \quad \therefore \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = a^2 + b^2 - 3$

SELF TEST [WRITTEN]

01. ΔABC-এ $\cos C - \cos B = 2\left(\frac{b - c}{a}\right)\cos^2\frac{A}{2}$

02. ΔABC-এ $\frac{a^2 - b^2}{2}\frac{\sin A \sin B}{\sin(A - B)} = \Delta$

03. ΔABC-এ $4\Delta(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2$

04. ΔABC-এ $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4\Delta$

05. ΔABC-এ $(a + b + c)(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}) = 2c\cot\frac{C}{2}$

06. ABC ত্রিভুজে সমাধান কর যখন a = 52 সে.মি. B = 77° C = 48°

Ans. A = 55°; b = 61.85 সে.মি. c = 47.17 সে.মি.

07. ABC ত্রিভুজের a = 229.2 b = 181.2 c = 257 হলে সব কোণ নির্ণয় কর। **Ans.** 60°10′; 43°18′; 181°32′

08. Δ ABC-এ $c^4 - 2c^2(a^2 + b^2) + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, c = 60° বা 120°

09. Δ ABC-এ A,B,C বিন্দুত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর অংকিত লম্বত্রয় α, β, γ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\Delta}$

10. AB উল্লম্ব দন্ডের A প্রান্ত ভূমির উপর ও C, AB-এর মধ্যবিন্দু। P ভূমির উপর এমন একটি বিন্দু যেন CB, P বিন্দুতে β কোণ উৎপন্ন করে এবং AP = n. AB। দেখাও যে, $\tan\beta = \frac{n}{2n^2 + 1}$

11. একটি স্তম্ভের পাদবিন্দুগামী রেখার উপর অবস্থিত দুইটি বিন্দু হতে এর শীর্ষের উন্নতি পরস্পর পূরক। পাদবিন্দু হতে বিন্দু দুইটির দূরত্ব a ও b হলে, দেখাও যে, স্তম্ভের উচ্চতা $\sqrt{ab}$। যদি বিন্দু দুইটি স্তম্ভের শীর্ষে θ কোণ গঠন করে তবে দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{a - b}{a + b}$ (a > b)

12. ভূমির একটি বিন্দু হতে একই সময় পরপর অনুভূমিক রেখা বরাবর সমবেগে উড়ন্ত একটি পাখির উন্নতি α, β, γ এক δ।

দেখাও যে $\cot^2\alpha - \cot^2\delta = 3(\cot^2\beta - \cot^2\alpha)$

13. একটি সিঁড়ি বরাবর c মিটার উপর হতে মেঝের উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর অবনতি 30^0। যখন আরও c মিটার উপরে উঠে তখন একই বিন্দুর অবনতি 45^0। অনুভূমিকের সাথে সিঁড়ির নতি নির্ণয় কর। Ans:75^0

14. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের কৌণিক বিন্দু হতে অতিভুজের উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য অতিভুজের দৈর্ঘ্যের এক চতুর্থাংশ। ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি নির্ণয় কর। Ans:15^0,75^0

15. AC ব্যাস বিশিষ্ট একটি বৃত্ত B বিন্দুগামী। A গামী একটি সরলরেখা BC কে, D বিন্দুতে ছেদ করে। ∠DAB = α এবং ∠CAB = β। DC-এর মধ্যবিন্দু এবং A-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব d হলে দেখাও যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\pi d^2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\beta - \alpha)}$

16. a বাহুবিশিষ্ট একটি অনুভূমিক বর্গাকৃতি ক্ষেত্রের উপর একটি স্তম্ভ অবস্থিত। এর অনুভূমিক ভূমিতলের উপর একটি বিন্দু হতে উপরের তিনটি শীর্ষবিন্দুর উন্নতি 45^0, 60^0 এবং 45^0। স্তম্ভের উচ্চতা h হলে, দেখাও যে,

$h = \frac{1}{4}a\sqrt{6}(\sqrt{5} + 1)$

17. ΔABC-এর ∠C = 90^0, a = 3, b = 4 এবং AB-এর উপর D এমন একটি বিন্দু যেন ∠BCD = 30^0। CD নির্ণয় কর। Ans: $\frac{8}{13}(4\sqrt{3} - 3)$

18. ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান্তর প্রগমন প্রেণিভুক্ত বৃহত্তম কোণ ক্ষুদ্রতম কোণ অপেক্ষা ৯০° বড়। দেখাও যে,বাহুগুলোর অনুপাত

$(\sqrt{7} + 1) : \sqrt{7} : (\sqrt{7} - 1)$

19. ΔABC-এ A, B, C সমান্তর শ্রেণিভুক্ত। দেখাও যে,

$2\cos\frac{A - C}{2} = \frac{a + c}{\sqrt{a^2 - ac + c^2}}$

20. যদি ΔABC-এ cosA + cosB + cosC = $\frac{3}{2}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, ΔABC সমবাহু।

SELF TEST [MCQ]

01. Δ ABC-এ sinA + sinB + sinC = ?

A. $\frac{1}{R}$ B. $\frac{s}{R}$
C. $\frac{2s}{R}$ D. None

02. Δ ABC-এ cos (B – C) + cosA = ?

A. $\frac{bc}{4R^2}$ B. $\frac{bc}{2R^2}$ C. $\frac{bc}{2R^2}$ D. $\frac{bc}{R^2}$

03. Δ ABC-এ কোনটি সত্য?

A. $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ B. $\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$
C. $\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$ D. সবগুলো

04. Δ ABC-এ a sinB sinC + b sinC sinA + c sinA sinB = ?

A. $\frac{\Delta}{R}$ বর্গ একক B. $\frac{3\Delta}{R^2}$ বর্গ একক
C. $\frac{3\Delta}{R}$ বর্গ একক D. 3△ বর্গ একক

05. Δ ABC-এ $b^2 \sin^2C + c^2 \sin^2B$ = ?

A. 4△ B. $\frac{abc}{R}$
C. A ও B উভয়ই D. None

06. Δ ABC-এ a = 17 cm, b = 21cm, ∠A = 41° হলে ∠B = ?

A. 54°8′ B. 55°
C. 56° D. None

07. কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 60 বর্গ একক এবং পরিসীমা 40 হলে ঐ ত্রিভুজের অন্তঃব্যাসার্ধ -

A. 3 B. 1.5
C. 2 D. None

08. Δ ABC-এ $\cot\frac{B}{2}$ = ?

A. $\frac{s(s-b)}{R}$ B. $\frac{s(s-b)}{\Delta}$
C. $\frac{s(s-c)}{\Delta}$ D. None

09. ΔABC তে ∠B = 90° এবং s – a = 3, s – c = 2 তাহলে a ও c এর মান যথাক্রমে–

A. 2, 3 B. 3, 4
C. 4, 3 D. 6, 8

10. কোন ত্রিভুজে a = 13, b = 14, c = 15; অন্তঃব্যাসার্ধ r = ?

A. 2 B. 8
C. 4 D. 6

11. যদি Δ ABC-এ $\cot\frac{A}{2} = \frac{b+c}{a}$ হয় তবে ΔABC হবে–

A. সমদ্বিবাহু B. সমবাহু
C. সমকোণী D. None

12. ABC ত্রিভুজে a(b cos C – c cos B) = ?

A. a^2 B. $b^2 - c^2$
C. 0 D. None

13. Δ ABC-এ $\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$ = ?

A. $\sin\frac{A}{3}$ B. $\sin\frac{B}{4}$
C. $\sin\frac{B}{2}$ D. $\cos\frac{B}{2}$

14. Δ ABC-এ $\frac{2\Delta}{ca}$ = ?

A. sin B B. sin C
C. sin A D. cos A

15. কোন ত্রিভুজে a cos A = b cos B হলে ত্রিভুজটি–

A. সমবাহু B. সমকোণী
C. সমদ্বিবাহু D. সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী

16. যদি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 17, 25, 28 একক হয়, তাহলে ... উচ্চতার দৈর্ঘ্য–

A. $\frac{420}{17}$ B. $\frac{84}{5}$
C. 15 D. None

17. যদি A ক্ষেত্রফল এবং 2s ত্রিভুজের পরিসীমা হয় তবে নিম্নের কোনটি

A. $A \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ B. $A \le \frac{s^2}{2}$
C. $A > \frac{s^2}{\sqrt{3}}$ D. None

18. সমবাহু ত্রিভুজের বাহু a হলে পরিঃব্যাসার্ধ -

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$
C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	15. Ⓐ
02. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	16. Ⓐ
03. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	17. Ⓐ
04. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	18. Ⓐ
05. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	
06. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	
07. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

18.B	17.A	16.A	15.D	14.A	13.C	12.B	11.C
09.C	08.B	07.A	06.A	05.C	04.C	03.D	02.B

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDENTS

01. ΔABC-এ D, BC মধ্যবিন্দু। যদি AD, AC বাহুর উপর লম্ব ... প্রমাণ কর যে, $\cos A \cdot \cos C = \frac{2(c^2 - a^2)}{3ca}$

02. ΔABC-এ প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin^2A + \sin A + 1}{\sin A} \ge 3$

[illegible] ΔABC-এ, $\frac{2\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{2\cos C}{C} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac}$ হয় তবে [illegible] $A = 90°$

[illegible] দুটি বাহু a, b এবং কোণ A দেওয়া আছে। যদি তৃতীয় বাহুর [illegible] c_1, c_2 হয় তবে প্রমাণ কর যে, $c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos 2A =$ [illegible]

[illegible] BC-এর মধ্যমার দৈর্ঘ্য $\frac{1}{\sqrt{11-6\sqrt{3}}}$ এবং এই মধ্যমা, A [illegible] এবং 45° কোণে ভাগ করে। BC বাহুর দৈর্ঘ্য বের কর।

Ans: 2

[illegible] cosA cosB + sinA sinB sinC = 1 হয় তবে [illegible] $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{2}$

[illegible] -এর দুই বাহু $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি মূল [illegible] অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয় তবে ΔABC-এর পরিসীমা বের কর।

Ans: $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

[illegible] $a = 5$, $b = 4$ এবং $\cos(A - B) = \frac{31}{32}$ হলে c = ?   Ans:6

[illegible] $b:C = r : l$ $(r < 1)$ হয় তবে দেখাও যে, A বিন্দু হতে BC [illegible] অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য, $l \leq \frac{ar}{1-r^2}$

[illegible] যে, ΔABC-এর অন্তঃস্থ কোণের দ্বিখণ্ডকত্রয় বাহুত্রয়কে যেই [illegible] বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\frac{2abc\Delta}{[illegible](c+a)(a+b)}$

[illegible] $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$ হয় তবে [illegible] যে, ΔABC হয় সমদ্বিবাহু অথবা সমকোণী।

[illegible] sinA + sinB + sinC = p, cosA . cosB . cosC = q [illegible] যে, tanA, tanB, tanC, $qx^3 - px^2 + (1 + q)x - p = 0$ [illegible] তিনটি মূল।

[illegible] AD রেখা, BC রেখাকে m:n অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে ভাগ [illegible] $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$, $\angle CDA = \theta$ এবং AD = x হয় তবে [illegible] যে, $(m + n)^2x^2 = (m + n)(mb^2 + nc^2) - mna^2$

[illegible] $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ সমান্তর প্রগমনে থাকে তবে প্রমাণ [illegible] cosA, cosB, cosC সমান্তর প্রগমনে থাকবে।

[illegible] a, b, c বিপরীত প্রগমনে থাকে তবে দেখাও যে, [illegible] $\sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}$ বিপরীত প্রগমনে থাকবে।

[illegible] পরিব্যাসার্ধ = R, অন্তঃব্যাসার্ধ = r হয় তবে প্রমাণ কর যে, [illegible] $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\Big) = 2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2$

[illegible] ΔABC-এর লম্বকেন্দ্র থেকে A, B, C বিন্দুত্রয়ের দূরত্ব যথাক্রমে [illegible] হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}$

[illegible] ΔABC-এর অন্তঃবৃত্ত BC, CA এবং AB বাহুত্রয়কে যথাক্রমে A_1, [illegible] বিন্দুতে স্পর্শ করে। অনুরূপভাবে $\Delta A_1B_1C_1$ -এর অন্তঃবৃত্ত B_1C_1, [illegible] A_1B_1 বাহুত্রয়কে যথাক্রমে A_2, B_2, C_2 বিন্দুতে স্পর্শ করে। এভাবে [illegible] যদি $\Delta A_nB_nC_n$, n-তম ত্রিভুজ গঠন করে তবে প্রমাণ কর যে, [illegible] $A_nB_nC_n$-এর কোণত্রয় যথাক্রমে [illegible] $- 2^{-n}\left(A - \frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{\pi}{3} - 2^{-n}\left(B - \frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{\pi}{3} - 2^{-n}\left(C - \frac{\pi}{3}\right)$। এখান [illegible] প্রমাণ কর যে, $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \Delta A_nB_nC_n$ = সমবাহু ত্রিভুজ

19. ΔABC-এর সদৃশ অন্তঃস্থ ΔA'B'C' এমন ভাবে আঁকা হল যেন B'C': BC = λ : 1। যদি B'C' বাহু, BC বাহুর সাথে θ কোণে আনত থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $\lambda\cos\theta = \frac{1}{2}$

20. P, ΔABC-এর অন্তঃস্থ এমন বিন্দু হয় যেন, ∠APB = ∠BPC = ∠CPA। প্রমাণ কর যে, $PA + PB + PC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\,\Delta}$

21. ΔABC, ΔPQR দ্বারা পরিবেষ্টিত। যদি ΔPQR সমবাহু হয় তবে দেখাও যে, ΔPQR-এর সর্বাধিক ক্ষেত্রফল $= 2\Delta + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$

22. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা এবং বৃহত্তর কোন, ক্ষুদ্রতর কোণের দ্বিগুণ হলে, ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য বের কর।

Ans: 4 একক, 5 একক, 6 একক

23. ধরি, O বিন্দু ΔABC-এর অভ্যন্তরস্থ বিন্দু, যেন ∠OAB = ∠OBC = ∠OCA = θ। প্রমাণ কর যে, cotθ = cotA + cotB + cotC

24. ধরি, ΔABC সমকোনী ত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে, r + 2R = s

25. ধরি, ΔABC সমকোনী ত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে, $r_A = r_B + r_C + r$। যেখানে $\angle A = 90^0$ এবং r_A, r_B, r_C যথাক্রমে ∠A, ∠B, ∠C-এর সাপেক্ষে বহিঃব্যাসার্ধ এবং r অন্তঃব্যাসার্ধ।

26. যদি ΔABC-এর বহিঃব্যাসার্ধত্রয় r_1, r_2, r_3 বিপরীত প্রগমনে থাকে তবে দেখাও যে, বাহুত্রয় a, b, c সমান্তর প্রগমনে থাকবে।

27. ΔABC-এ I, অন্তঃকেন্দ্র। প্রমান কর যে, $\frac{IA}{\text{cosec}\frac{A}{2}} = \frac{IB}{\text{cosec}\frac{B}{2}} = \frac{IC}{\text{cosec}\frac{C}{2}}$

28. যদি ΔABC-এর বাহুত্রয় গুনোত্তর প্রগমনে থাকে এবং বৃহত্তম কোন, ক্ষুদ্রতম কোনের দ্বিগুণ হয় তবে দেখাও যে, $r^4 - r - 1 = 0$, যেখানে r = অন্তঃব্যাসার্ধ।

29. ΔABC- এর পাদত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, পরিব্যাসার্ধ এবং অন্তঃব্যাসার্ধ বের কর।

Ans: পরিব্যাসার্ধ $= \frac{R}{2}$, অন্তঃব্যাসার্ধ = 2R cosA cosB cosC ;

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C$

30. যদি ΔABC-এর অন্তঃকেন্দ্র I, বহিঃকেন্দ্রত্রয় যথাক্রমে I_1, I_2, I_3 হয় তবে প্রমাণ কর যে, $II_1.II_2.II_3 = 16R^2r$

31. ধরি ABCDE সুষম পঞ্চভুজের ক্ষেত্রফল, A_1 এবং পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল, A_2। প্রমাণ কর যে, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$

32. যদি ABCD বৃত্তঃস্থ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 একক এবং AB = 1, BD = $\sqrt{3}$ একক হয় তবে দেখাও যে, BD.DC = 2

33. একটি সুষম পঞ্চভুজের পরিসীমা এবং একটি সুষম দশভুজের পরিসীমা সমান হলে প্রমাণ কর যে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $2 : \sqrt{5}$।

34. যদি একটি বৃত্তস্থঃ চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2 একক, 5 একক ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোন 60^0 এবং চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $4\sqrt{3}$ বর্গ একক হয় তবে চতুর্ভুজের অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য বের কর।

Ans: 2 একক, 3 একক

35. যদি a, b, c, d চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে তবে দেখাও যে, $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} \geq \frac{1}{3}$

36. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। যদি পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 একক হয় তবে দেখাও যে, AB. AC. AE = 3 ঘনএকক।

XCLUSIVE ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(অজানাকে জানো)

❒ $\cos(1.5°) = \dfrac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\times\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\times\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}{16} = \sin(88.5°)$

❒ $\sin(1.5°) = \dfrac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\times\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\times\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)}{16} = \cos(88.5°)$

❒ $\cos3° = \dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16} = \sin87°$

❒ $\sin3° = \dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16} = \cos87°$

❒ $\tan3° = \dfrac{\left[(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{5})-2\right]\left[2-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]}{4} = \cot87°$

❒ $\cot3° = \dfrac{\left[(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{5})-2\right]\left[2+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right]}{4} = \tan87°$

❒ $\cos(4.5°) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}} = \sin(85.5°)$

❒ $\sin(4.5°) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}} = \cos(85.5°)$

❒ $\cos6° = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \sin84°$

❒ $\sin6° = \dfrac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8} = \cos84°$

❒ $\tan6° = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = \cot84°$

❒ $\cot6° = \dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{2} = \tan84°$

❒ $\cos(7.5°) = \dfrac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}} = \sin(82.5°)$

❒ $\sin(7.5°) = \dfrac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}} = \cos(82.5°)$

❒ $\tan 7\dfrac{1}{2}° = \sqrt{6}+\sqrt{2}-2-\sqrt{3} = \cot 82\dfrac{1}{2}°$

❒ $\cot\dfrac{1}{2}° = \sqrt{6}+\sqrt{2}+2+\sqrt{3} = \tan 82\dfrac{1}{2}°$

❒ $\cos9° = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} = \sin81°$

❒ $\sin9° = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8} = \cos81°$

❒ $\tan9° = \sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \cot81°$

❒ $\cot9° = \sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \tan81°$

❒ $\cos12° = \dfrac{\sqrt{5}-1+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8} = \sin78°$

❒ $\sin12° = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} = \cos78°$

$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2} = \cot78°$

$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} = \tan78°$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos75°$ ❒ $\cos15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin75°$

$2-\sqrt{3} = \cot75°$ ❒ $\cot15° = 2+\sqrt{3} = \tan75°$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin45°$ ❒ $\tan45° = 1 = \cot45°$

$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin72°$ ❒ $\sin18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos72°$

$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = \cot72°$ ❒ $\cot18° = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = \tan72°$

$\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15-3\sqrt{5}}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16} = \sin69°$

$\frac{-\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15-3\sqrt{5}}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16} = \cos69°$

$\frac{\left[2-(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{5})\right]\left(2-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{4} = \cot69°$

$\frac{\left[2-(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})\right]\left(2+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{4} = \tan69°$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sin(67.5°)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \cos(67.5°)$

$= \sqrt{2}-1 = \cot(67.5°)$

$= \sqrt{2}+1 = \tan(67.5°)$

$\frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8} = \sin66°$

$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8} = \cos66°$

$\frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{2} = \cot66°$

$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} = \tan66°$

$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} = \sin63°$

$\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8} = \cos63°$

$\sqrt{5}-1-\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \cot63°$

$\sqrt{5}-1+\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \tan63°$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin60°$

$\frac{1}{2} = \cos60°$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot60°$

$\sqrt{3} = \tan60°$

$\frac{-\sqrt{30}+\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16} = \sin57°$

❒ $\sin 33^\circ = \dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}-2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16} = \cos 57^\circ$

❒ $\tan 33^\circ = \dfrac{\left[2-(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{5})\right]\left(2+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}{4} = \cot 57^\circ$

❒ $\cot 33^\circ = \dfrac{\left[2-(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})\right]\left(2-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}{4} = \tan 57^\circ$

❒ $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ$

❒ $\sin 36^\circ = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^\circ$

❒ $\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \cot 54^\circ$

❒ $\cot 36^\circ = \dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} = \tan 54^\circ$

❒ $\tan 37\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6}-\sqrt{2}-2+\sqrt{3} = \cot 52\frac{1}{2}^\circ$

❒ $\cot 37\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{6}+2-\sqrt{2}-\sqrt{3} = \tan 52\frac{1}{2}^\circ$

❒ $\cos 39^\circ = \dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{15-3\sqrt{5}}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16} = \sin 51^\circ$

❒ $\sin 39^\circ = \dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{15-3\sqrt{5}}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16} = \cos 51^\circ$

❒ $\tan 39^\circ = \dfrac{\left[-2+(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})\right]\left(2-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{4} = \cot 51^\circ$

❒ $\cot 39^\circ = \dfrac{\left[-2+(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{5})\right]\left(2+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{4} = \tan 51^\circ$

❒ $\cos 42^\circ = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} = \sin 48^\circ$

❒ $\sin 42^\circ = \dfrac{1-\sqrt{5}+\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{8} = \cos 48^\circ$

❒ $\tan 42^\circ = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} = \cot 48^\circ$

❒ $\cot 42^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2} = \tan 48^\circ$

❒ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2}}}}$ [n সংখ্যক 2]

❒ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2}}}}$ [n সংখ্যক 2]

❒ $\cos\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^{n}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{3}}}}$ [(n–1) সংখ্যক 2]

❒ $\sin\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^{n}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{3}}}}$ [(n –1) সংখ্যক 2]

❒ $\cos\left(\dfrac{\pi}{5\times 2^{n}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2.5+\sqrt{1.25}}}}}$ [(n–1) সংখ্যক 2]

❒ $\sin\left(\dfrac{\pi}{5\times 2^{n}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{2.5+\sqrt{1.25}}}}}$ [(n –1) সংখ্যক 2]

❒ $\cos\left(\dfrac{\pi}{15\times 2^{n}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{\sqrt{\sqrt{0.703125}+1.875}+\sqrt{0.3125}+1.75}}}}$ [(n–1) সংখ্যক 2]

❒ $\sin\left(\dfrac{\pi}{15\times 2^{n}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\cdots+\sqrt{\sqrt{\sqrt{0.703125}+1.875}+\sqrt{0.3125}+1.75}}}}$ [(n –1) সংখ্যক 2]

ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র
(Functions & graph of functions)

এক নজরে ফাংশনের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

... সম্পর্ক ঃ অন্বয় বা সম্পর্ক বলতে সাধারণত দুটি ভিন্ন মধ্যকার ... বা সংযোগ বুঝে থাকি।

... বড় ⇒ P(a, b) — এখানে P দ্বারা কোন একটি বস্তু অপর কোন বস্তুর মধ্যকার সম্পর্ককে বুঝানো হয়েছে।

... ⇒ S (হোমা, উপল) — এখানে S দ্বারা কোন একজন ব্যক্তি অপর কোন ব্যক্তির সন্তানের এমন সম্পর্ককে বুঝানো হয়েছে।

... স্থুজ ও কোটি ⇒ C(x, y) — এখানে C দ্বারা কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে এমন সম্পর্ককে বুঝানো হয়েছে।

... সম্পর্কের সংজ্ঞা ঃ A এবং B দুইটি অশূন্য সেট হলে A×B এর ... অশূন্য উপসেট R কে A হতে B-এ বর্ণিত একটি অন্বয় বলা হয়। ... পড়া হয় a is related to b) এর অর্থ (a, b)∈ R সম্পর্কটি যদি ... বিশিষ্ট উক্তি P(x, y) দ্বারা নির্ধারিত হয়,
... = {(a, b)∈A×B : P(a, b) সত্য}।

... ম্যাপিং, ডোমেন, কো-ডোমেন ঃ সাধারণভাবে একটি অন্বয়ের ... একটি উপাদান (x, y) হলে x-কে স্বাধীন চলক এবং y-কে অধীন ... বলে। অন্বয়ের সকল স্বাধীন চলক (x), যে সেটের সদস্য তাকে ঐ ... ডোমেন বলে এবং সকল অধীন চলক y যে সেটের সদস্য তাকে ঐ ... কো-ডোমেন বলে। y-কে x এর image বলা হয় এবং x-কে y ... pre-image বলা হয়।

... এর সংজ্ঞা ঃ ফাংশন এক ধরনের অন্বয় একে বিভিন্ন উপায়ে ... করা যায়।

... মাধ্যমে ঃ যদি একটি স্বাধীন চলক x এবং একটি অধীন চলক y ... সম্পর্কিত হয় যে স্বাধীন চলক x এর প্রত্যেক মানের জন্য অধীন ... y এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায়, তখন y কে x এর ফাংশন ... এবং y = f(x) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। f(x) কে "f of x" পড়া হয়। ... কে বাংলায় y, x এর ফাংশন এবং ইংরেজিতে y is a function ... পড়া হয়। অনেক সময় ফাংশন f(x) এর পরিবর্তে F(x), g(x), ... ইত্যাদি লেখা হয়ে থাকে।

... গণিতবিদ টিচমার্শ (Titchmarsh) এর মতে y = f (x) এর ... যায় f একটি মেশিন, x কাঁচামাল এবং y উৎপাদ।

... সেটের মাধ্যমে ঃ ধরি, A এবং B যেকোন দুইটি বাস্তব সংখ্যার সেট ... A, y∈B) এবং f এমন একটি নিয়ম বা সম্পর্ক যার মাধ্যমে A এর ... প্রত্যেক সদস্য x এর জন্য B সেটটির একটি মাত্র বিম্ব (Image) y ... করা যায় তখন f কে A সেট হতে B সেটে বর্ণিত একটি ফাংশন বা ... (Mapping) বলা হয় এবং একে f : A → B দ্বারা নির্দেশ করা হয়। ... A → B কে বাংলায় 'f, A সেট হতে B সেটে বর্ণিত একটি ফাংশন' ... পড়া হয়। f:A→B কে ইংরেজিতে 'f is a function of A in to B' ... a function from A in to (or on to) B' বা 'f maps A in to ... পড়া হয়। A কে ডোমেন ও B কে কো-ডোমেন বলা হয়।

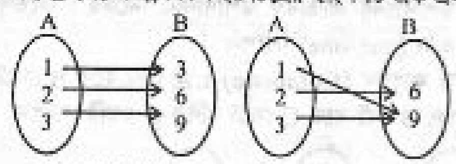
গ. ক্রমযুগলের মাধ্যমে ঃ A × B এর উপসেট f কে A সেট হইতে B সেটে ফাংশন বা চিত্রণ বলা হয় (অর্থাৎ f : A→B হবে) যদি f সেটের অন্তর্গত দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম পদ একই না থাকে। যেমন- ধরি A={a,b,c} এবং B={2,3,4} সুতরাং f = {(a,2), (b,3), (c,4)} একটি ফাংশন কেননা f ⊂ A × B কিন্তু g = {(a,2), (a,4), (b,4)} কোন ফাংশন নয়। কেননা A সেটের একই a উপাদানটি (a,2) এবং (a,4) ক্রমজোড়ে অর্থাৎ দুইবার বিদ্যমান। আবার h={(a,2), (b,3), (c,4),(d,4)} A হতে B ফাংশন নয়, কেননা (d, 4) ∉ A × B

Note:
(i) ফাংশনকে অনেক সময় ম্যাপিং (mapping) বা ট্রান্সফরমেশন (transformation) বলা হয়।
(ii) যদি কোন অন্বয়ে একই ১ম পদ বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে তবে উক্ত অন্বয়টি ফাংশন।
(iii) A × B এর উপসেট নিয়ে ফাংশন গঠন করতে হলে A সেটের সকল উপাদান ফাংশনের অন্তর্গত ক্রমজোড়ের প্রথম পদ হিসেবে থাকবে।
(iv) প্রত্যেক ফাংশনই অন্বয় কিন্তু সকল অন্বয় ফাংশন নয়।

ডোমেন ও রেঞ্জ ঃ x এর যে সকল মানের জন্য ফাংশন সংজ্ঞায়িত হয় সে সকল মানের সেটকে ডোমেন বা চরণস্থল (Domain) বলে এবং ফাংশনটিতে x এর মান বসালে যে মানগুলো পাওয়া যায় সেগুলোর সেটকে রেঞ্জ বা বিস্তার বা পাল্লা (Range) বলে। সংক্ষেপে ডোমেনকে D_f এবং রেঞ্জকে R_f দ্বারা সূচিত করা হয়।

বিভিন্ন প্রকার ফাংশন ঃ

01. এক-এক ফাংশন (One-One Function) ঃ f: A→B দ্বারা সূচিত ফাংশনকে এক-এক ফাংশন বলা হয়, যদি A সেটের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের জন্য যদি B সেটে ভিন্ন ভিন্ন প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। তবে এরূপ ফাংশনকে এক-এক ফাংশন বলে।
যেমন ঃ A = {1, 2, 3} B = {3, 6, 9} এবং f:A→B : f(x) = 3x হলে ফাংশনটি এক-এক, নীচের প্রথম চিত্র হতে এটা স্পষ্ট যে A সেটের প্রতিটি ভিন্ন উপাদানের জন্য B সেটে ভিন্ন বিম্ব। ২য় চিত্রের ফাংশনটি এক এক নয়, বহু এক।

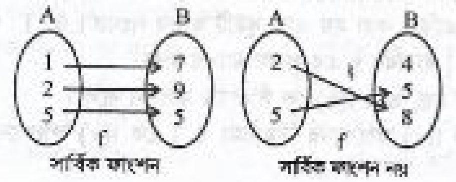


এক এক ফাংশন   বহু এক ফাংশন

এক-এক ফাংশন নির্ণয় ঃ ডোমেন উল্লেখ না থাকলে প্রদত্ত ফাংশনে $x_1, x_2 \in D_f$ এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ বা অন্যভাবে $x_1 \neq x_2$ হলে $f(x_1) \neq f(x_2)$।

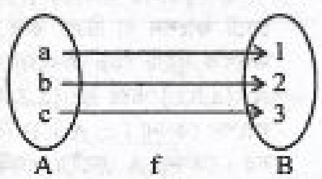
Note : ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে ডোমেন নির্দিষ্ট না থাকলে কখনও এক-এক ফাংশন হবে না।

02. সার্বিক ফাংশন (Onto) ঃ f:A→B দ্বারা সূচীত ফাংশনকে সার্বিক ফাংশন বলা হয়, যদি B সেটের প্রত্যেক উপাদান A সেটের বিম্ব হয়।
অর্থাৎ রেঞ্জ f = B বা f(A) = B হলে ফাংশনটিকে সার্বিক ফাংশন বলে। ইংরেজিতে "f is a function A on to B"। সার্বিক ফাংশনকে সর্বগ্রাহী (Onto) ফাংশন বলা হয়ে থাকে। অর্থাৎ **রেঞ্জ = কো-ডোমেন হলে ফাংশন সার্বিক**। যেমন-
A = {1, 2, 3}, B = {2, 5, 10} এবং f:A→B; f(x) = $x^2 + 1$ ফাংশনটি সার্বিক কেননা B সেটের সব কয়টি উপাদান A সেটের কোন না কোন উপাদানের বিম্ব। এক কথায়, কো-ডোমেন = রেঞ্জ।

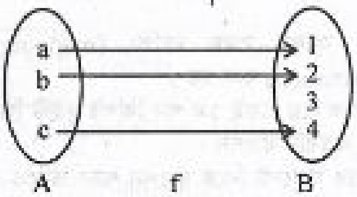


সার্বিক ফাংশন   সার্বিক ফাংশন নয়

03. এক-এক প্রতিসঙ্গ ফাংশন (One to One correspondence) ঃ f:A→B ফাংশনটি এক-এক প্রতিসঙ্গ ফাংশন বলা হয় যদি একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক (Onto) ফাংশন হয়। একে অনেক সময় Bijective mapping ও বলা হয়ে থাকে।

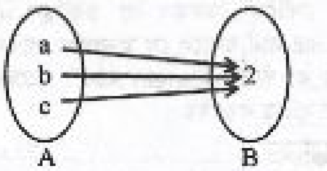


একটি এক-এক প্রতিসঙ্গ ফাংশন



এক-এক প্রতিসঙ্গ ফাংশন নয়।

04. ধ্রুবক ফাংশন (Constant) ঃ f:A→A ফাংশনকে ধ্রুবক ফাংশন বলা হয় যদি A সেটের সকল উপাদানের বিম্ব একই হয় যা B সেটে বিদ্যমান।



বিকল্প সংজ্ঞা ঃ যদি একটি ফাংশন f এর রেঞ্জ কেবলমাত্র একটি সদস্য হয় তবে সেই ফাংশনকে ধ্রুবক ফাংশন বলে।

05. অভেদ ফাংশন (Identity) ঃ f:A→A দ্বারা সূচিত ফাংশনকে অভেদ ফাংশন বলা হয় যদি A সেটের প্রত্যেক উপাদানের বিম্ব ঐ উপাদান নিজেই হয়। যেমন- A = {1,2,3} এবং f:A→A: f(x) = x, x∈A একটি অভেদ ফাংশন কেননা f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3 অর্থাৎ প্রত্যেক উপাদানের প্রতিবিম্ব উপাদানটা নিজেই। অভেদ ফাংশন সর্বদা (Onto) এবং (one-one) ফাংশন।

06. সংযোজিত ফাংশন (Comosite) ঃ A সেট হতে B সেটে বর্ণিত f একটি ফাংশন এবং B সেট হতে C সেটে বর্ণিত g একটি ফাংশন,

অর্থাৎ 

ধরি, a∈A সুতরাং এর বিম্ব f(a)। অতএব f(a)∈B আবার f(a) হল g ফাংশনটির ডোমেন। সুতরাং এর বিম্ব g(f(a)), অতএব g(f(a))∈C এভাবে A সেটের a ব্যতীত অন্য উপাদান নিয়েও দেখানো যায় যে তা C সেটের যে কোন অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট। অর্থাৎ A সেট থেকে C সেটে বর্ণিত একটি ফাংশন এবং এই নতুন ফাংশনটিকে f এবং g এর গুণফল ফাংশন বা সংযোজিত ফাংশন বলে এবং একে (gof) দ্বারা সূচিত করা হয়। gof কে g সংযুক্তি f পড়া হয়।

07. বিপরীত ফাংশন (Inverse function) ঃ যদি f : A → B একটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হয়, তবে f^{-1}: B→A দ্বারা সূচিত ফাংশনকে বিপরীত ফাংশন বলা হয়। এবং সর্বদাই

$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ হয়।

08. সীমাবদ্ধ ফাংশন (Bounded Function) ঃ যদি f(x) ফাংশনকে [a, b] ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত করা হয় এবং দুইটি বাস্তব সংখ্যা t ও T পাওয়া যায়; যেখানে [a, b] ব্যবধির x এর সকল মানের জন্য

$t \le f(x) \le T$ হয়, তবে f(x) কে সীমাবদ্ধ ফাংশন বলে।

এখানে, t কে f(x) ফাংশনের নিম্নসীমা ও T কে f(x) ফাংশনের উর্ধ্বসীমা বলা হয়।

09. যুগ্ম ফাংশন (Even Function) ঃ f(– x) = f(x) হলে, তা... জোড় ফাংশন বলে। যেমন- f(x) = cosx একটি যুগ্ম ফাংশন।

10. অযুগ্ম ফাংশন (Odd Function) ঃ f(– x) = – f(x) হলে ত... বা বিজোড় ফাংশন বলে। যেমন- f(x) = x + sinx একটি অযুগ্ম ফা...

11. পর্যায়ী বা পর্যাবৃত্ত ফাংশন (Periodic) ঃ যে ফাংশনের মান চ... নির্দিষ্ট মান পরপর পুনঃরাবৃত্তি হয় তাকে পর্যায়ী বা পর্যাবৃত্ত ফাংশন ব... চলকের ঐ মানটিকে ফাংশনের পর্যায়কাল বা মৌলিক পর্যায় ব... (sinx, cosx, tanx, cotx, cosecx, secx)।

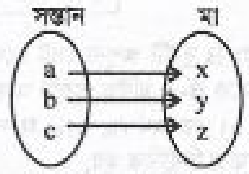
12. ব্যক্ত ফাংশন (Explicit) ঃ যে সকল ফাংশনকে y = f(x) ব... আকারে প্রকাশ করা যায় তাদেরকে ব্যক্ত ফাংশন বলে।

যেমন- $ax^2 + by + c = 0$ ও $ax^2y + by^2 + cx + d = 0$ ব্যক্ত ফা...

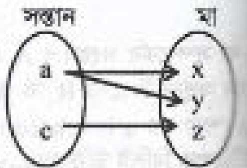
13. অব্যক্ত ফাংশন (Implicit) ঃ যে সকল ফাংশনকে y = f(x) ব... আকারে সহজে প্রকাশ করা যায় না তাদেরকে অব্যক্ত ফাংশন ব... যেমন- $x^2y^2 + 5xy - 2y^3 = 0$ ও $x + y = \tan(x-y)$ অব্যক্ত ফা...

একটি মজার বিষয়ের মাধ্যমে ফাংশন ঃ কোন একটি অন্বয়, ফা... কিংবা ফাংশন হলে কেমন ফাংশন (এক-এক/বহু-এক, সা... ইত্যাদি) তা ম্যাপিং দেখে সহজে মনে রাখার নিয়ম ঃ

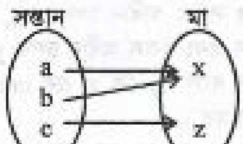
ডোমেনকে সন্তানদের সেট এবং কো-ডোমেনকে মায়েদে... করি, এবার বাস্তবে যা ঘটতে পারে তা ফাংশন এবং বাস্তবে যা ঘ... না তা ফাংশন নয়।



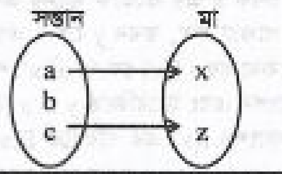
একজন সন্তানের একটি মাত্র মা থাকবে, এটাই স্বাভাবিক। তাই এটি একটি ফাংশন এবং এক এক।



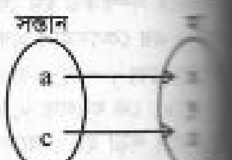
একজন সন্তানের দুটি মা থা... স্বাভাবিক নয়। তাই এটি এক... নয়।



দু'জন সন্তানের একটি মাত্র মা থাকতে পারে, এটা স্বাভাবিক। তাই এটি এক... কিন্তু বহু সন্তান বিশিষ্ট মা থাকার কারণে উহা বহু-এক ফাংশন, এক-এক না...



মা ছাড়া সন্তান থাকতে পারে, এটা স্বাভাবিক নয়, তাই এটি একটি ফাংশন নয়, অন্বয় মাত্র। (মনে রাখবে, ডোমেনে অতিরিক্ত উপাদান থাকলে ফাংশন হয় না। এখানে b ডোমেনের অতিরিক্ত উপাদান)



মা আছেন সন্তান নেই এটা... এটি একটি ফাংশন তবে... উহা সার্বিক হবে না, অ...

SHORT TECHNIQUE:

বিশেষ দ্রষ্টব্য: "Shortcut" ব্যাপারে আমরা সবাইকে নিরু... আমরা যে কোন ক্ষেত্রে basic- এ সর্বাধিক গুরুত্ব দিয়ে... তোমাদের যদি basic clear থাকে তাহলে নিজেরাই সুন্দর "Sh... করতে পারবে। আমাদের বইয়ের "Shortcut" গুলো নিয়ে... করে চিন্তা করলেই বুঝতে পারবে যে, "Shortcut" গুলো ... থেকেই নেয়া।

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

Technique-01: $f(x) = ax + b$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
$D_f = R$ এবং $R_f = \mathbf{R}$

Technique-02: $f(x) = \frac{a}{bx + c}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
$D_f = R - \left\{-\frac{c}{b}\right\}$ এবং $R_f = \mathbf{R} - \{0\}$

Technique-03: $f(x) = \frac{ax}{bx + c}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
$D_f = R - \left\{-\frac{c}{b}\right\}$ এবং $R_f = \mathbf{R} - \left\{\frac{a}{b}\right\}$

Technique-04: $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
$D_f = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ এবং $R_f = \mathbf{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

Technique-05: $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
$D_f = R - \{a\}$ এবং $R_f = \mathbf{R} - \{2a\}$

Technique-06: $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x + a}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
$D_f = R - \{-a\}$ এবং $R_f = \mathbf{R} - \{-2a\}$

Technique-07: $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
D_f: $x \le -a$ or $x \ge a$ এবং $R_f = [0, \infty)$

Technique-08: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে,
D_f: $-a \le x \le a$ এবং $R_f = [0, a]$

Technique-09: $f(x) = \log(a + bx)$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে log এর অন্তর্গত রাশিটি শূন্য অপেক্ষা বড় হবে।

ডোমেন $x > -\frac{a}{b}$ বা $(-\frac{a}{b}, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= \mathbf{R}$

Technique-10: $f(x) = e^x$ আকৃতির ফাংশনের ক্ষেত্রে $D_f = \mathbf{R}$ এবং $R_f = (0, \infty)$

ফাংশনের সমতা **(Equality of function)** ঃ যদি f এবং g দুইটি ফাংশন এমন হয় যে $D_f = D_g = D$ এবং $f(a) = g(a)$, যখন $a \in D$; তখন f এবং g কে সমান ফাংশন বলা হয়।

সংক্ষেপে ঃ $f = g \Rightarrow D_f = D_g$ এবং $f(x) = g(x)$ প্রত্যেক $x \in D_f = D_g$

বিপরীত ফাংশন নির্ণয় :

Technique-01: x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে $f^{-1}(x)$ নির্ণয় করা যায়।

Technique-02: $f(x) = ax + b$ হলে $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$

Technique-03: $f(x) = \frac{a}{bx + c}$ হলে $f^{-1}(x) = \frac{a - cx}{bx}$

Technique-04: $f(x) = \frac{ax}{bx + c}$ হলে $f^{-1}(x) = \frac{cx}{a - bx}$

Technique-05: $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ হলে $f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$

Special Technique: $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}$ হলে

(i) $f^{-1}(x) = f(x)$ (ii) $f(y) = x$ হয়।

Note: বিপরীত ফাংশনের ডোমেন = প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ এবং বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ = প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন।

ফাংশনের গানিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01 : ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত ফাংশন

Ex-01 $f(x) = \frac{3}{2x - 3}$ হলে ফাংশনটির ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

Sol^n: $D_f = R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $R_f = R - \{0\}$, $f^{-1}(x) = \frac{3 + 3x}{2x}$ **Ans.**

Ex-02 $f(x) = \frac{2x - 3}{5x - 7}$ হলে ফাংশনটির ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। $f^{-1}(2) = ?$

Sol^n: $D_f = R - \left\{\frac{7}{5}\right\}$, $R_f = R - \left\{\frac{2}{5}\right\}$

$f^{-1}(x) = \frac{7x - 3}{5x - 2}$ $\therefore f^{-1}(2) = \frac{7.2 - 3}{5.2 - 2} = \frac{11}{8}$ **Ans.**

Ex-03 $f(x) = \frac{3x - 5}{7x - 3}$ হলে $f^{-1}(x) = ?$

Sol^n: $f^{-1}(x) = \frac{3x - 5}{7x - 3} = f(x)$ **Ans.**

Ex-04 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ হলে ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

Sol^n: $D_f = R - \{-3\}$, $R_f = R - \{-6\}$ **Ans.**

Ex-05 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ কে $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

Sol^n: ডোমেন $f = R - \{3\}$ এবং রেঞ্জ $f = R - \{6\}$ **Ans.**

Type-02 : এক এক এবং সার্বিক ফাংশন

Ex-01 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে দেখাও যে, এটি এক এক ও সার্বিক।

Sol^n: এক এক কি না তা যাচাই: ধরি, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$; $f(x_1) = f(x_2)$ হলে,
$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.
$\therefore$ এটি এক-এক ফাংশন

সার্বিক কি না তা যাচাই: ফাংশনটির রেঞ্জ $= \mathbf{R}$
$\because$ কো-ডোমেন = রেঞ্জ
$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক **(Showed)**

Ex-02 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে এটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন কি না যাচাই কর।

Sol^n: এক এক কি না তা যাচাই ঃ
ধরি, $x_1, x_2 \in R$; $f(x_1) = f(x_2)$ হলে,
$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$
$\therefore$ এটি এক এক ফাংশন নয়।

সার্বিক কি না তা যাচাই ঃ
রেঞ্জ $= [0, \infty)$ কো-ডোমেন $= R$
$\because$ রেঞ্জ $\subset$ কো-ডোমেন
$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক নয়। **Ans:**

Ex-03 $y = \frac{x-1}{2x-3}$ ফাংশনটি $R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ থেকে R সেটে এক এক ও সার্বিক কিনা যাচাই কর।

Sol^n: এক এক কি না তা যাচাই : ধরি, $x_1, x_2 \in R$ এবং $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $\Rightarrow \frac{x_1 - 1}{2x_1 - 3} = \frac{x_2 - 1}{2x_2 - 3} \Rightarrow x_1 = x_2$ (সরল করে)

∴ এটি এক এক ফাংশন

সার্বিক কি না তা যাচাই : রেঞ্জ = $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ কিন্তু কো-ডোমেন = R

∵ রেঞ্জ ⊂ কো-ডোমেন ∴ ফাংশনটি সার্বিক নয়। **Ans:**

Type-03 : সংযোজিত ফাংশন

Ex-01 $f(x) = x+1$ এবং $g(x) = x^2 + 2$ হয় তবে gof ও fof নির্ণয় কর।

Sol^n: $gof = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3.$

$\therefore fog = f(g(x)) = f(x^2+2) = x^2 + 2 + 1 = x^2 + 3$. **Ans:**

For practice:

01. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$ হলে সংযোজিত ফাংশন
 i. fog নির্ণয় কর।
 ii. gof নির্ণয় কর। প্রত্যেকটি সংযোজিত ফাংশনের ডোমেন রেঞ্জ নির্ণয় কর।

Ans. (i) $\sqrt{x^2 - 1}$; ডোমেন $x \le -1$ অথবা $x \ge 1$;
রেঞ্জ: সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট।
(ii) $x - 1$, $D_f = R$, $R_f = R$

Type-04 : ফাংশনের মান নির্ণয় সংক্রান্ত-

Ex-01 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x + 2$ হলে $f(x+3) = ?$

Sol^n: ধরি, $\frac{1-x}{1+x} = y \Rightarrow 1 - x = y + xy \Rightarrow 1 - y = x + xy$

$\therefore x = \frac{1-y}{1+y}$ $\therefore f(y) = x + 2 \Rightarrow f(y) = \frac{1-y}{1+y} + 2 \Rightarrow f(y) = \frac{y+3}{1+y}$

$\therefore f(x+3) = \frac{x+3+3}{1+x+3} = \frac{x+6}{x+4}$ **Ans.**

Ex-02 $f(x^2 - 5x + 6) = x + 2$ হলে $f(0) = ?$

Sol^n: এখন যদি $x^2 - 5x + 6 = 0$ হয় অর্থাৎ $x = 2, 3$ তবে $f(-2)$ পাওয়া যাবে। ∴ $f(0) = 2+2 = 4$ অথবা $f(0) = 3+2 = 5$ **Ans.**

For practice:

01. $f(2x^2 + 5x + 4) = \frac{x}{x+2}$ হলে $f(7) = ?$ **Ans.** $3, \frac{1}{5}$

02. $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{x+1}$ হলে $f(x) = ?$ **Ans.** $\frac{1+x}{2}$

03. $f: R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \ge 2 \\ x + 2, & x < 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রকাশিত। $f(5)$, $f(0)$, $f(-2)$ নির্ণয় কর। **Ans.** 10, 2, 0

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

WRITTEN Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে স...

01. যদি $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x + 2$ হয়, তাহলে ডোমেন এবং রেঞ্জসহ f^{-1} (... [17-18]

Sol^n $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = f^{-1}\left\{f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right\} = \frac{1-x}{1+x}$

$\Rightarrow f^{-1}(x - 2 + 2) = \frac{1-(x-2)}{1+(x-2)}$ $\therefore f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-1}$

ডোমেন, $f^{-1}(x) = R - \{1\}$

এবং রেঞ্জ $f^{-1}(x) = R - \{-1\}$

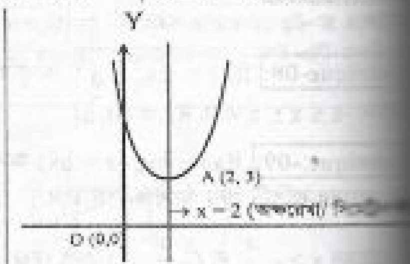
02. $y = x^2 - 4x + 7$ ফাংশনের স্কেচ অংকন কর। একই সাথে ... ডোমেন, রেঞ্জ, সিমেট্রিক লাইন সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান, এবং X-... অক্ষ হতে কর্তিত অংশ বের কর। [16-17]

Solve $y = x^2 - 4x + 7 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y - 3$

$\Rightarrow (x-2)^2 = y - 3 \Rightarrow (x-2)^2 = 4.\frac{1}{4}(y-3)$

শীর্ষবিন্দু, $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ | $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

∴ শীর্ষবিন্দু = (2, 3)
অক্ষরেখা, $x - 2 = 0$
$\Rightarrow x = 2$
$(x-2)^2 = y - 3$
$y = 0$ হলে,
$(x-2)^2 = -3$
যা বাস্তব নয়।
∴ x অক্ষ হতে কর্তিত অংশ নেই।



$x = 0$ হলে, $4 = y - 3 \Rightarrow y = 7$

যেহেতু পরাবৃত্তটি y অক্ষকে একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করে, সু... হতে কর্তিত অংশ শূন্য হবে।

$y = x^2 - 4x + 7$

x এর প্রত্যেক মানের জন্য y এর মান পাওয়া যায়।

∴ ডোমেন = R

চিত্র হতে, $y \ge 3$ ∴ রেঞ্জ = $[3, \infty)$

চিত্র হতে, $y_{max} = \infty$; $y_{min} = 3$

03. মনে কর R বাস্তব সংখ্যার সেট; $A, B \subset R$, $f: A \to B$ যেখা... $f(x) = \frac{3x+2}{7x-3}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং ... ফাংশনটি এক এক ও সার্বিক। f^{-1} ও নির্ণয় কর। [14-15]

Solve $f(x) = \frac{3x+2}{7x-3}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যখন, 7x - 3...

$\Rightarrow x \ne \frac{3}{7}$ ∴ ডোমেন = $R - \left\{\frac{3}{7}\right\} = A$ (ধরি)

আবার, $\frac{3x+2}{7x-3} = \frac{3}{7}$ ধরলে পাই $21x + 14 = 21x - 9$

$\Rightarrow 14 = -9$ ইহা সম্ভব নয় ∴ $f(x) \ne \frac{3}{7}$ ∴ রেঞ্জ = $R - \left\{\frac{3}{7}\right\}$

$\to A$, $x \in A$ হলে $f(x) \in A$ অবশ্যই হবে, এবং $f(A) = A$ হবে।
... এক-এক ও সার্বিক। (Showed)

$= \frac{3x+2}{7x-3} \Rightarrow 7xy - 3y = 3x + 2$

$- 3x = 3y + 2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{7y-3}$

$= \frac{3y+2}{7y-2}$ ∴ $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{7x-3}$ Ans.

$= 2x^3 + 3$ এবং $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$ হলে, দেখাও যে, [03-04]

$= (gof)(x)$

$S = fog(x)$

$\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right) = \left\{2\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right)^3\right\} + 3$

$- 3 + 3 = x$

$S = R.S$

R.S. $= gof(x)$
$= g(2x^3 + 3)$
$= (x^3)^{\frac{1}{3}}$
$= x$

(Showed)

... এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

$= \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $f(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f: A \to B$ হয়, তবে f-এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [05-06]

Solve $f(x) = x + 1$ ∴ $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5$
ফাংশনটির ডোমেন $= \{1, 2, 3, 4\}$; রেঞ্জ $= \{2, 3, 4, 5\}$ Ans.

$= x^3 + 7$ এর বিপরীত ফাংশনটি নির্ণয় কর। [04-05]

Solve ধরি, $y = x^3 + 7$

$= y - 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-7}$

বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = (x-7)^{\frac{1}{3}}$ Ans.

... দুটি সেট A এবং B এর জন্য প্রমাণ কর যে, $A' - B' = B - A$

Solve ধরি, $x \in A' - B'$

... এবং $x \notin B' \Rightarrow x \notin A$ এবং $x \in B \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin A$

$(B - A)$ ∴ $A' - B' \subseteq B - A$

$x \in B - A$

... এবং $x \notin A \Rightarrow x \notin B'$ এবং $x \in A' \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \notin B'$

$(A' - B')$ ∴ $B - A \subseteq A' - B'$

$A' - B' = B - A$ (Proved)

... এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $f: A \to R$ ... $f(x) = x^2 - x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় ... কি একটি এক-এক ফাংশন? [05-06]

Solve $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$f(x) = x^2 - x + 1$
$f(-2) = 7$
$f(-1) = 3$
$f(0) = 1$
$f(1) = 1$
$f(2) = 3$

রেঞ্জ $= \{7, 3, 1\}$
... এক এক নয়। কারণ ডোমেনের ভিন্ন মানের জন্য রেঞ্জ এর মানের ... পাওয়া যায় না। Ans:

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে, $(gof)(2)$ এবং $(fog)(2)$ নির্ণয় কর। [12-13]

Solve $(gof)(2) = g(2^2 + 3.2 + 1) = g(11) = 2.11 - 3 = 19$
$(fog)(2) = f(g(2)) = f(2.2 - 3) = f(1) = 1^2 + 3.1 + 1 = 5$ Ans:

02. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$; (fog) এবং (fof) নির্ণয় কর। [08-09]

Solve দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$
∴ $fog(x) = f(2x-3) = (2x-3)^2 + 3(2x-3) + 1 = 4x^2 - 6x + 1$
এবং $fof(x) = f(x^2 + 3x + 1)$
$= (x^2 + 3x + 1)^2 + 3(x^2 + 3x + 1) + 1$
$= x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$ Ans.

03. একটি ফাংশন $f: R \to R$ এরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে যে, $f(x) = x^2 + 1$। $f^{-1}(5)$ এর মান নির্ণয় কর। [07-08]

Solve ধরি, $f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5$
$\Rightarrow x^2 = 4$ ∴ $x = \pm 2$ ∴ $f^{-1}(5) = \{-2, 2\}$ Ans.

04. নিচের সমীকরণসমূহের y, x এর ফাংশন কি না উল্লেখ কর। যদি ফাংশন হয়, তবে সেক্ষেত্রে ডোমেন নির্ণয় কর। [03-04]

(i) $y = \pm\sqrt{3 - x^2}$ (ii) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

Solve i. নং ফাংশন নয়। কারণ, x এর একই মানের জন্য y এর দুইটি ভিন্ন মান পাওয়া যায়।
ii. নং ফাংশন।
$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ বা, $x \leq -1$
∴ ডোমেন $= R - (-1, 1)$ Ans:

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = 2x$ হয় তবে $(fog^{-1})(2)$ এর মান কত? [13-14]

A. 2 B. 3 C. 1/2 D. 1

Ans A Solve $y = g(x) = 2x$
$\Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{y}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow g^{-1}(2) = 1$
$fog^{-1}(2) = f(1) = 1 + 1 = 2$

02. যদি $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হয়, তবে $fog(2)$ এর মান হবে- [12-13]

A. 0 B. 15 C. 25 D. 5

Ans B Solve $f(g(2)) = f(2^2 + 1) = f(5) = 5^2 - 2|5|$
$= 25 - 10 = 15$

03. যদি $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 3 \\ x^2 - 2 & -2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3 & x < -2 \end{cases}$ হয়, তবে $f(x)$ এর y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ হবে- [11-12]

A. −2 B. 3 C. −1 D. 0

Ans A Solve y অক্ষে $x = 0$
∴ $f(x) = x^2 - 2$ এখন, $x = 0$ হলে, $f(x) = -2$

04. যদি $f(x) = \sqrt{x-2}$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হয়, তাহলে fog এর ডোমেন হবে- [10-11]

A. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ B. $[-1, 1]$ C. $(-\infty, \infty)$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Ans D Solve $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 1$
∴ $fog(x) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 - 1}$ ∴ Dom fog $= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

05. যদি A = R − {3}, B = R − {1} এবং A → B ফাংশনটি $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $f^{-1}(0)$ এর মান কত? [08-09]

A. −1 B. 2 C. −2 D. 1

Ans B Solve ধরি, $y = f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ ∴ $yx - 3y = x - 2$

$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2 \therefore x = \frac{3y-2}{y-1}$

$\therefore x = f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y-1}$ অতএব, $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

$\therefore f^{-1}(0) = \frac{3.0-2}{0-1} = 2$

06. $f(x) = 3x^3 + 2$ এবং $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}$ হলে, (fog) (5) এর মান হবে- [08-09]

A. 1 B. 5 C. $\frac{1}{5}$ D. −5

Ans B Solve $f(x) = 3x^3 + 2;\ g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}$

$\therefore fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}) = 3.\frac{x-2}{3} + 2$

$= x - 2 + 2 = x \therefore fog(5) = 5$

07. একটি ফাংশন f : R → R, f(x) = 2x + 1 দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, $f^{-1}(2)$ এর মান হবে: [06-07]

A. 0 B. ½ C. 5 D. 1

Ans B Solve $f(x) = 2x + 1 = y \quad \therefore x = \frac{y-1}{2} = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \therefore f^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $f : R \rightarrow, g : R \rightarrow R, h : R \rightarrow R, f(x) = \tan^{-1}x, g(y) = \sin y$ এবং $h(z) = \frac{1-z}{1+z}$ হলে $g[foh(\tan 30^0)]$ এর মান– [17-18]

A. 30^0 B. 45^0 C. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ E. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Ans D Solve g(foh) (tan30°)

$= g\left(f\left(\frac{1-\tan 30°}{1+\tan 30°}\right)\right) = g\left(\tan^{-1}\frac{1-\tan 30°}{1+\tan 30°}\right) = g(45° - 30°)$

$= \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

02. f : R → R ফাংশনটি $f(x) = x^2 - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(-8,8)$ এর মান কত হবে? [16-17]

A. {−4, 4} B. {−3, 3} C. {−2, 2}
D. {−1, 1} E. $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

Ans B Solve $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+1}$

x = − 8 এর জন্য, $f^{-1}(-8) = \pm\sqrt{-7} = \pm 7i$, But f: R → R

x = 8 এর জন্য, $f^{-1}(8) = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\therefore f^{-1}(-8,8) = \{-3,3\}$

03. যদি f : R → R দ্বারা $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ if } x > 3 \\ x^2 - 2 \text{ if } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 \text{ if } x < -2 \end{cases}$ সূ...

f(−3) এর মান কত? [15-16]

A. −3 B. −4 C. −5 D. 6 E. 7

Ans A Solve f(−3) -এর জন্য f(x) = 2x + 3

∴ f(−3) = 2(−3) + 3 = − 6 + 3 = −3

04. যদি f:R → R দ্বারা $f(x) = x^2$ সূচীত হয়, তবে $f^{-1}(25)$ ... কত? [14-15]

A. {−3, 3} B. {−4, 4} C. {−7, 7}
D. {2, −2} E. {5, −5}

Ans E Solve $f^{-1}(25) = x$

$\Rightarrow f(x) = 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow f^{-1}(25) = \{5, -5\}$

05. f : R→R কে f(x) = 2x − 3 দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(x)$ ... কত? [13-14]

A. $\frac{1}{2x-3}$ B. $\frac{1}{2x+3}$ C. $\frac{x+3}{2}$ D. $\frac{2x}{3}$ E. ...

Ans C Solve ধরি, y = f(x) = 2x − 3

$\Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

06. যদি $f(x) = x^2 + 3$ হয়, তবে $f(f(-3))$ এর মান হলো- [07-08]

A. 12 B. −12 C. −147 D. 147 E. 168

Ans D Solve $f(f(-3)) = f(9+3) = f(12) = 144 + 3 = ...$

07. $f(x) = \ln(x)$ হলে $f\left(\frac{1}{a}\right)$ = কত? [05-06]

A. f(a) B. −f(a) C. 0 D. 1

Ans B Solve $f(x) = \ln x$

$\therefore f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1) - \ln(a) = -\ln(a) = -f(a)$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি A = R − {3}, B = R − {1}, f:A→B, f(x) = ... f(3/2)/f(2/3) এর মান কত? [11-12]

A. 2/3 B. 4/3 C. 1/3 D. None ...

Ans D Solve $\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{12}$

02. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে $(gof)(1)$ এর মান হ...

A. 10 B. 13 C. 7 D. None ...

Ans C Solve gof(1) = g(1+3 × 1+1) = g(5)= 2×5 − 3 ...

03. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \ge 2 \\ x + 2, & x < 2 \end{cases}$ তবে f(2) + f(−2) এর মান হবে- ...

A. 0 B. −2 C. 2 D. None ...

Ans B Solve $f(2) + f(-2) = 2^2 - 3.2 - 2 + 2 = -2$

04. যদি f(x) = 2x − 5 এবং $g(x) = x^2 + 6$ হয়, তবে g(f(x)) মান হবে- ...

A. $4x^2 + 6$ B. $4x^2 - 20x + 31$ C. $4x^2 + 2x - 19$ D. ...

Ans B Solve $gof(x) = g(2x - 5) = (2x - 5)^2 + 6$

$= 4x^2 - 20x + 25 + 6 = 4x^2 - 20x + 31$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... নিচের বাস্তব ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? [14-15]

$f(x) = \sqrt{9-x^2}$

A. $[-3, 3], [0, 3]$ B. $[0, 3], [3, -3]$ C. $[3, -3], [0, -3]$
D. $[-3, 0], [3, 0]$ E. None

Ans A Solve $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow |x^2| \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$D_f = [-3, 3]$ এবং $0 \leq f(x) \leq 3 \therefore R_f = [0, 3]$

... $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$, (x বাস্তব) এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে- [13-14]

A. $R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}, R\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ B. $R\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}, R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ C. $R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}, R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

D. $R\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}, R\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ E. None

Ans A Solve $D_f = R - \left(\frac{1}{2}\right)$. [অর্থাৎ x এর যে মানের জন্য ... → infiity হবে তা ব্যতীত সব বাস্তব সংখ্যা]

Range $= R - \left(-\frac{1}{2}\right)$

ফাংশনের লেখচিত্র

... গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি:

... ফাংশনকে y = f(x) আকারের সমীকরণের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত করা ..., ফাংশনের ডোমেন হতে প্রাপ্ত x এর কিছু সংখ্যক (সরলরেখার ... হলে কমপক্ষে দুইটি এবং বক্ররেখার সমীকরন হলে কমপক্ষে ...) মানের জন্য y এর অনুরূপ মান নিয়ে তালিকা নির্ণয় করা যায়। এই ... হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করে সংযুক্ত করলে ... y = f(x) এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

... রূপান্তর দ্বারা ফাংশনের লেখচিত্রের রূপান্তর বোঝানো হয়। কোন ... লেখচিত্রের প্রত্যেক বিন্দু যদি একই দিকে একই পরিমান দূরত্বে ... বা কোন অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিফলিত বা প্রসারিত বা সংকুচিত হয় ... ঐ লেখচিত্রের নতুন অবস্থানকে যে ফাংশন দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যায়। ... প্রথমোক্ত ফাংশনের রূপান্তরিত (Transform) ফাংশন বলা হয়।

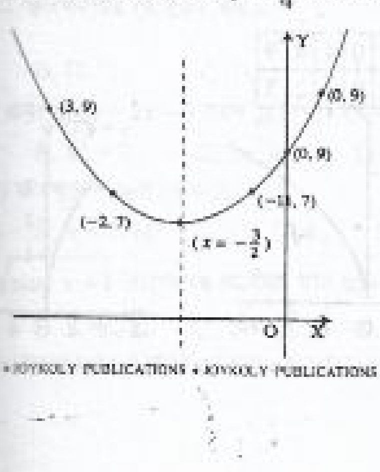
Type-01 ফাংশনের স্কেচ

... দ্বিঘাত ফাংশন: $f(x) = x^2 + 3x + 9$ ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন কর।

... $f(x) = x^2 + 3x + 9$ দ্বিঘাত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কনে দেখা যায় x = 0 ... y = 9, অর্থাৎ ফাংশনটি y-অক্ষকে (0, 9) বিন্দুতে ছেদ করে।

... $x^2 + 3x + 9 = 0$ হতে $x = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{9-36}\right) = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{-27}\right)$ যা ... সুতরাং ফাংশনটি x-অক্ষকে কোন বাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে না।

... $y = x^2 + 3x + 9 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$, সুতরাং y এর মান $\frac{27}{4}$ অপেক্ষা ... পারে না, অর্থাৎ ফাংশনের স্কেচ $y = \frac{27}{4}$ রেখার নিচে থাকবে না।



প্রদত্ত ফাংশন হতে x, y এর মান নিম্নরূপে নির্ণয় করা হল।

x	0	−3	−2	−1	1	−4
y	9	9	7	7	13	13

$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$ বা, $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y - \frac{27}{4}$ যা

$x^2 = 4ay$ আকারের একটি পরাবৃত্ত সূচিত করে যার অক্ষ $x + \frac{3}{2} = 0$

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য:

a. ফাংশনের স্কেচটি $x = -\frac{3}{2}$ সরলরেখা সাপেক্ষে প্রতিসম।

b. স্কেচটি $y = \frac{27}{4}$ সরলরেখা নিচে যাবে না।

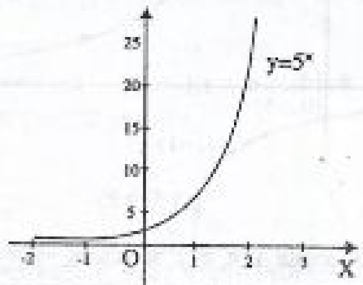
c. স্কেচটি অবিচ্ছিন্ন হবে।

Ans:

Ex-02 সূচক ফাংশন: $y = f(x) = a^x$

Sol^n: মনে করি, a = 5 তাহলে $y = f(x) = 5^x$

ফাংশনটি কোন অক্ষ সাপেক্ষে বা মূলবিন্দু সাপেক্ষে প্রতিসম নয়, আবার x এর এমন কোন মান নেই যার জন্য y = 0, সুতরাং ফাংশনের স্কেচ x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে না। x ঋণাত্মক হলে ফাংশনের স্কেচ x-অক্ষকে স্পর্শ করে না, কিন্তু স্কেচ x-অক্ষের ঋণাত্মক অংশের দিকে ক্রমাগত নিকটবর্তী হয়, কিন্তু কখনই স্পর্শ করবে না।



x	0	1	2	−1	−2
y	1	5	25	0.2	0.04

ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য:

a. স্কেচটি অবিচ্ছিন্ন হবে।

b. স্কেচটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে না বা x-অক্ষের নিচে যায় না। **Ans.**

Ex-03 পরমমান ফাংশন: $f(x) = |5 - x|$

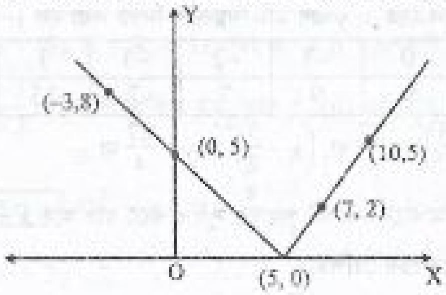
Sol^n: $f(x) = |5 - x|$ দ্বারা বোঝানো হয় যে, x এর মান যাই হোক না কেন f(x) বা 5 − x সর্বদাই ধনাত্মক।

সুতরাং $f(x) = \begin{cases} (5-x) & \text{যখন } x < 5 \\ -(5-x) & \text{যখন } x > 5 \\ 0 & \text{যখন } x = 5 \end{cases}$

সমকোণে পরস্পরছেদী দুইটি সরলরেখা XOX′ ও YOY′ কে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ মনে করে $f(x) = |5 - x|$, সমীকরণ হতে x এর কয়েকটি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মানের জন্য f(x) এর ভিন্ন ভিন্ন মান নির্ণয় করা হল। প্রদত্ত ফাংশন হতে প্রাপ্ত সকল (x, f(x)) বিন্দুকে আনুমানিক স্কেলে অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে স্থাপন করে সংযোজন করলে নির্ণেয় স্কেচ পাওয়া যাবে।

x	−3	0	5	7	10
y	8	5	0	2	5

স্কেচ দুইটি সরলরেখা হবে যারা সর্বদাই x-অক্ষের উপরে থাকবে এবং দুই দিকে x-অক্ষের সঙ্গে সমান কোণে আনত হবে।

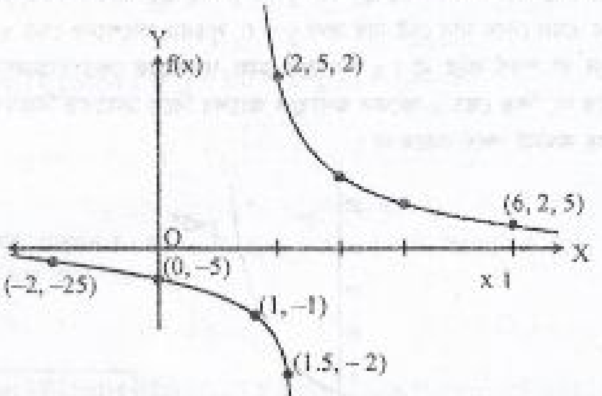


ফাংশনের স্কেচের বৈশিষ্ট্য: স্কেচটি অবিচ্ছিন্ন এবং এর দুইটি অংশ পরস্পর লম্ব এবং x-অক্ষের সাথে সমান পরমমান বিশিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে। **Ans.**

Ex-04 ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $(x \neq 2)$,

Sol^n: প্রদত্ত ফাংশনের সংজ্ঞা হতে x ও f(x) এর মান নিম্নরূপে নির্ণয় করা হল।

x	–2	6	0	1	1.5	2	2.5	3	4
f(x)	–.25	.25	–.5	–1	–2	অসংজ্ঞায়িত	2	1	0.5



OX ও OY কে অক্ষদ্বয় মনে করে আনুমানিক পরিমাপে সকল (x, f(x)) বিন্দু স্থাপন করে তাদের সংযোজন করে প্রদত্ত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন করা হল। x = 2 বিন্দুতে f(x) অসংজ্ঞায়িত; তাই ঐ বিন্দুতে স্কেচের কোন অংশ থাকবে না। আবার x এর এরূপ কোন মান নেই যার জন্য f(x) = 0 হয়। সুতরাং স্কেচটি x অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ করবে না।

ডোমেন: $\{x \in IR, x \neq 2\}$

রেঞ্জ: $\{f(x) \in IR, f(x) \neq 0\}$ **Ans.**

Type-02: রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ

Ex-01 $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচ অঙ্কন কর এবং ফাংশনের এমন রূপান্তর কর যাতে রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ অনুভূমিক দিকে 5 একক ডানে অপসারিত হয়। মূল ফাংশনের স্কেচের পাশে রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন কর।

Sol^n: $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচ অঙ্কনে x এর মান 0 হতে সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হতে পারে এবং y এর মানও ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হবে। x এর বর্গমূল করে কেবলমাত্র ধনাত্মক মানটি নিতে হবে।

$y = \sqrt{x}$ এর স্কেচটিকে অনুভূমিক দিকে 5 একক ডানে অপসারণ করতে x এর স্থলে x – 5 বসাই।

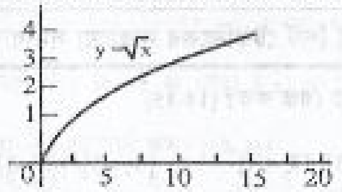
x এর স্থলে x – 5 বসালে $y = \sqrt{x-5}$ হয়।

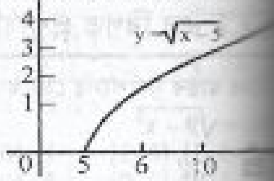
এখানে x এর মান ধনাত্মক, বাস্তব এবং $x \geq 5$ হবে।

$y = \sqrt{x}$ এর ক্ষেত্রে স্কেচের আদিবিন্দু (0, 0), কিন্তু $y = \sqrt{x-5}$ এর ক্ষেত্রে স্কেচের আদিবিন্দু (5, 0)।

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

x	5	6	9	21
y	0	1	2	4





সুতরাং $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচকে মূলবিন্দু হতে ডানদিকে 5 একক অপসারণ করার জন্য $y = \sqrt{x-5}$ এর স্কেচ অঙ্কন করতে হবে। বিপরীতক্রমে $y = \sqrt{x-5}$ এর স্কেচ অঙ্কন করলে তা $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচকে ডানদিকে 5 একক অপসারণের সমতুল্য হবে।

দ্রষ্টব্য: x এর স্থলে x + 3 বসিয়ে $y = \sqrt{x-3}$ এর স্কেচ অঙ্কন করে অনুরূপভাবে দেখানো যাবে যে, $y = \sqrt{x}$ ফাংশনের স্কেচটি মূলবিন্দু হতে 3 একক বামে অনুভূমিক দিকে অপসারিত হয়েছে।

ii. উল্লম্ব (Vertical) সরণবিশিষ্ট রূপান্তর

$y = f(x)$ সূত্রে y এর স্থলে $y \pm c$ বসিয়ে $y \pm c = f(x)$

বা, $y = f(x) \mp c$ হয়।

$y = f(x)$ এর স্থলে $y = f(x) + c$ বসিয়ে $y = f(x)$ এর স্কেচকে c একক উপরে উঠানো যাবে এবং $y = f(x) - c$ বসিয়ে $y = f(x)$ এর স্কেচকে c একক নিচে নামিয়ে দেওয়া যাবে।

Ex-02 $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচ অঙ্কন কর এবং ফাংশনের এমন রূপান্তর কর যাতে রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ উল্লম্ব দিকে 3 একক ডাইনে অপসারিত হয়। মূল ফাংশনের স্কেচের পাশে রূপান্তরিত ফাংশনের স্কেচ অঙ্কন কর।

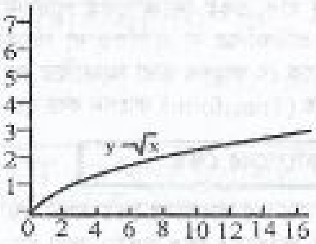
Sol^n: $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচ উল্লম্ব দিকে 3 একক উপরে অপসারণ করতে $y = \sqrt{x} + 3$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

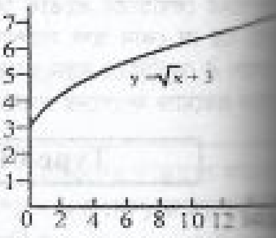
$y = \sqrt{x}$:

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

$y = \sqrt{x} + 3$

x	0	1	4
y	3	4	5





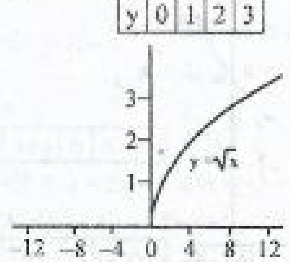
সুতরাং $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচকে মূলবিন্দু হতে 3 একক উপরে উঠিয়ে দেওয়ার জন্য, $y = \sqrt{x} + 3$ এর স্কেচ অঙ্কন করতে হবে।

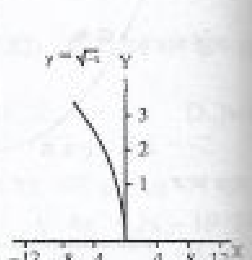
Ex-03 $y = \sqrt{x}$ এর স্কেচ অঙ্কন কর এবং ঐ স্কেচকে y-অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিফলন করিয়ে প্রাপ্ত স্কেচটিও অঙ্কন কর।

Sol^n: $y = \sqrt{x}$ সূত্রে x এর স্থলে – x এর বসিয়ে প্রাপ্ত সূত্র $y = \sqrt{-x}$ এর স্কেচ অঙ্কন করলে y-অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিফলিত $y = \sqrt{x}$ এর প্রতিবিম্ব পাওয়া যাবে।

$y = \sqrt{x}$:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3





SELF TEST (Written)

$-5x+4) = x+3$ হলে $f(-2) = ?$ Ans: 5, 6

$-5x+4) = \frac{x}{x+2}$ হলে, $f(7) = ?$ Ans: $3, \frac{1}{5}$

... R বাস্তব সংখ্যার সেট, $A = R - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$; $B = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ এবং $\to B$ যেখানে $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$। ফাংশনটি এক এক এবং সার্বিক ... কর।

$=\sqrt{2x+3}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

Ans. ডোমেন $x \geq \frac{-3}{2}$ এবং রেঞ্জ $f(x) \geq 0$

$\to R$ কে $f(x) = x^3 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(x)$ এর ... নির্ণয় কর। Ans. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

$= \ln \frac{1+x}{1-x}$ হলে, $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $f^{-1}(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

... এর স্কেচ অংকন কর এবং ঐ স্কেচকে অনুভূমিক ঋণাত্মক x-অক্ষ ... 2 গুণ প্রসারিত করে প্রাপ্ত স্কেচ ও অংকন কর।

$-x$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

Ans: ডোমেন = R এবং রেঞ্জ = $[-\frac{1}{4}, \infty)$

... ফাংশনের লেখচিত্র অংকন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

Ans: ডোমেন = R এবং রেঞ্জ = $[0, \infty)$

SELF TEST [MCQ] -01

$= \frac{3+x}{2x+1}$ এবং $x \neq -\frac{1}{2}$ হলে $f^{-1}(3)$ এর মান কত?
... B. 5 C. 1 D. 0

$= \frac{x-a}{x} + \frac{b-x}{x-b}$ হলে $f(a)$=?
... B. 1 C. –b D. –1

$= \sqrt{1-x^2}$ ফাংশনের ডোমেন কত?
$\leq x \leq 0$ B. $-1 \leq x \leq 1$ C. $-1 \leq x < 1$ D. $0 \leq x \leq 1$

$= \frac{x}{|x|}$ ফাংশনের ডোমেন হল:
$\infty]$ B. $(-\infty,\infty) - \{0\}$ C. $[0,\infty]$ D. $[0,\infty]$

$= \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ফাংশনটির ডোমেন কত?
$-\{0\}$ B. $[0,1]$ C. $(0,1]$ D. $(-\infty,\infty)$

$= x^2 + 4$ এবং $g(x) = 2x - 1$ হলে $g(f(x))$ হয়–
$2x^2 + 7$ B. $x^2 + 7$ C. $2x^2 + 3$ D. $2x^2 - 8$

$5x^2 - 7)$ ফাংশনের ডোমেন হবে-
< 1.14 B. $x < 1.18$ C. $x > 1.18$ D. None

$= 1 + \sqrt{\sin^2 x + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে-
... B. $2 + \sqrt{2}$ C. $1 + \sqrt{2}$ D. None

09. $f(x) = a\frac{x-b}{a-b} + b\frac{x-a}{b-a}$ হলে নিম্নলিখিত কোন সম্পর্কটি ঠিক?
A. $f(a) + f(b) = f(a+b)$ B. $f(a).f(b) = f(a-b)$
C. $f(a) - f(b) = f\left(\frac{a}{b}\right)$ D. None

10. $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x+1$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?
A. fog = gof B. fog ≠ gof
C. fog – gof = x D. None

11. একটি ফাংশন সার্বিক হবে যদি-
A. রেঞ্জ = কো-ডোমেন B. রেঞ্জ ≠ কো-ডোমেন
C. ডোমেন = কো-ডোমেন D. None

12. $f(x) = \frac{3x+5}{2x+7}$ হলে $f^{-1}(x) = ?$
A. $\frac{7x+5}{2x+3}$ B. $\frac{-7x+5}{2x-3}$ C. $\frac{3x-5}{2x-7}$ D. None.

13. $f(x) = \ln x$ হলে $f^{-1}(x)$= ?
A. e^x B. e^{-x} C. e^{2x} D. None

14. $f: A \to A: A = [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সত্য?
A. এক এক ফাংশন B. এক-এক ফাংশন নয়
C. বহু এক ফাংশন D. None

15. $f: A \to A; A = [-1,1]$ $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক।
A. এক এক ফাংশন B. সার্বিক
C. এক এক ফাংশন নয় D. A ও B উভয়ই

16. $y^2 = -4ax$ এর লেখচিত্র কোনটি?



17. নিম্নের কোন লেখচিত্রটি y, x এর ফাংশন নির্দেশ করে।



18. নিম্নের কোনটি যুগ্ম ফাংশন?
A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = \cos x$
C. $f(x) = \tan x$ D. $f(x) = \cot x$

19. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x+2}$ হয় তবে $f(-2)$ = কত?
A. ∞ B. –4 C. 8 D. অসংজ্ঞায়িত

20. যদি $f(x) = \cos 2x$ হয় তাহলে x এর সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য f এর রেঞ্জ হবে-
A. $[-2, +2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 0]$ D. $[0, 1]$

OMR

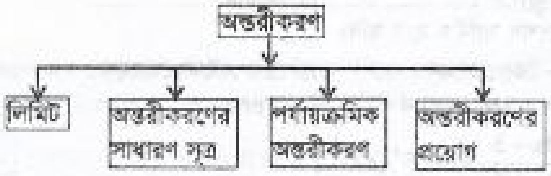
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Correct Answer

20.B	19.D	18.B	17.C	16.A	15.D	14.A	13.A	12.B	11.A
10.B	09.A	08.C	07.C	06.A	05.C	04.B	03.B	02.D	01.D

৯ম অধ্যায়	অন্তরীকরণ (Differentiation)
প্রথম পত্র	

স্বাধীন চলকের স্বল্পাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য অধীন চলকের যে পরিবর্তন হয় তাকে স্বাধীন চলকের সাপেক্ষে অধীন চলকের অন্তরীকরণ বলা হয়। এই বইয়ে এই অধ্যায়কে চার ভাগে ভাগ করা হয়েছে।



[১ম অংশ]

Limit

গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি:

➲ **লিমিটঃ** চলমান রাশি x এর মান উভয় দিক হতে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি ফাংশন $f(x)$, একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর যথেষ্ট নিকটবর্তী হয় তবে l কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয়। একে $\lim_{x\to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

➲ **সীমার মৌলিক ধর্মঃ**

যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} \varphi(x) = m$ হয় তবে–

i. $\lim_{x\to a} \{f(x) \pm \varphi(x)\} = l \pm m$

ii. $\lim_{x\to a} [f(x) \times \varphi(x)] = lm$

iii. $\lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{m}$ [যদি $m \neq 0$ হয়]

iv. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{l}{m}$ [যদি $m \neq 0$ হয়]

v. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

➲ **x = a বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হইবার শর্ত:**

(i) x = a বিন্দুতে f(x) এর মান f(a) বিদ্যমান থাকবে।

(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ এবং $\lim_{x\to a^-} f(x)$ বিদ্যমান থাকবে অর্থাৎ সসীম হবে।

(iii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ হবে।

➲ **অসীম লিমিট [Infinite limit]**

ধরি, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, যখন $x \to 1$ অর্থাৎ যখন x এর মান উভয় দিক হতে 1 এর নিকটবর্তী হয়, তখন f(x) এর মান প্রদত্ত যে কোন সংখ্যার উর্ধ্বে চলে যায়।

$\therefore \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ এবং $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

+ ∞ এবং – ∞ এর অর্থ বা তাৎপর্য

কোন চলকের মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেয়ে পূর্বে জানা বৃহত্তম সংখ্যা অপেক্ষা বড় হলে, একে +∞ চিহ্ন বা ধনাত্মক অসীম এবং জানা ক্ষুদ্রতম সংখ্যা অপেক্ষা ছোট হলে একে – ∞ চিহ্ন বা ঋণাত্মক অসীম বলা হয়। প্রকৃত পক্ষে +∞ এবং – ∞ কোন সংখ্যা নয়, শুধু প্রতীক মাত্র।

➲ **Lagrange's Mean Value Theorem এর বর্ণনা**

যদি f(x) এমন ফাংশন হয় যেন,

(i) f(x) ফাংশনটি [a,b] ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং

(ii) (a,b) ব্যবধিতে, f ′(x) বিদ্যমান, তাহলে (a,b) ব্যবধির মধ্যে একটি বিন্দু c পাওয়া যাবে

যেন, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, যেখানে $a < c < b$

➲ **Mean Value theorem এর প্রয়োগ**

উদাহরনঃ $f(x) = x(x-2)$ ফাংশনের জন্য [1,2] ব্যবধিতে একটি x = c নির্ণয় কর। যা Lagrange's mean value theorm মেনে চলে।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

(i) f(x) একটি বহুপদী। সুতরাং [1,2] ব্যবধিতে f(x) একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

(ii) $f'(x) = 2x - 2$ যা (1,2) ব্যবধিতে বিদ্যমান।

তাহলে, f(x) ফাংশনটি Mean Value theorem এর শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ আমরা পাই, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, যেখানে $a < c < b$

এখানে, a = 1, b = 2

$\therefore f(a) = f(1) = 1 - 2 = -1$,

যেহেতু $f(x) = x^2 - 2x$

এবং $f(b) = f(2) = 4 - 4 = 0$ এবং $f'(c) = 2c - 2$

$\therefore \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{0-(-1)}{2-1} = 2c - 2$

$\Rightarrow 1 = 2c - 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$.

$\therefore 1 < \frac{3}{2} < 2$ অর্থাৎ (1,2) ব্যবধির মধ্যে $c = \frac{3}{2}$ আছে।

➲ **স্যান্ডউইচ উপপাদ্য (The Sandwich Theorem):**

যদি $0 < |x - a| < \delta$ ব্যবধির অন্তর্গত x এর সকল মানের জন্য $f(x) \le g(x) \le h(x)$ এবং $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ হয় তবে, $\lim_{x\to a} g(x) = l$

Ex: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ প্রমাণ কর।

জানি, $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le 0$

$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

➲ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

➲ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

➲ $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ থাকলে।

যেমন– $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$ এখানে $\tan^{-1}x = \theta$ ধরতে হবে।

$\therefore x = \tan\theta$ এবং $x \to 0$ হলে, $\theta \to 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\theta}{\tan\theta} = 1$

➲ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1$

$\lim \frac{\tan^{-1}x}{x} = 1$ ⊃ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ⊃ $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ⊃ $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

La Hospital's Rule: কোন ফাংশন $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ আকারে থাকলে এবং ... বসালে যদি $\frac{0}{0}$ অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ আকার আসে তবে এই নিয়মটি প্রযোজ্য ...

... যদি $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ হয় এবং $x = a$ বসালে $\frac{0}{0}$ অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ Form আসে ... এবং হরকে চলকের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করার পর $x = a$ বসালে ... $\frac{0}{0}$ অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ Form আসে তাহলে আবার অন্তরীকরণ করে ... হবে। এভাবে যতবার পর্যন্ত $\frac{0}{0}$ অথবা $\frac{\infty}{\infty}$ Form আসে ততবার অন্তরীকরণ করা লাগবে।

[... La Hospital's Rule কেবলমাত্র M.C.Q এর জন্য প্রযোজ্য।]

... $\lim \frac{1 - \cos 3x}{4x^2} = ?$

... বসালে $\frac{0}{0}$ আসে।

অন্তরীকরণ করে পাই $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{8x}$

$x = 0$ বসালে আবার $\frac{0}{0}$ আকার আসে। দ্বিতীয়বার অন্তরীকরণ করে

পাই, $\lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{8} = \frac{9}{8}$ **Ans.**

লিমিট Problem গুলো solve করার বিভিন্ন Rule

... $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{f(x)}$ আকারে থাকে তখন $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ এর ... রাশি $\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)$ দিয়ে লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

... $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x})(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x) - (1-3x)}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{6}{\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x}} = \frac{6}{1+1} = 3$ **Ans.**

Rule-2: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ আকারে থাকলে (যেখানে $g(x)$ এবং $f(x)$ বহুপদী ফাংশন) এর সর্বোচ্চ ঘাত দিয়ে লব ও হরকে ভাগ করতে হবে। এরপর $x = \infty$ বসাতে হবে।

যেমন: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{5}{x^2}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

Rule-3: $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ আকারে থাকলে সরাসরি সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

যেমন: $\lim_{x\to a} \frac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x})^5 - (\sqrt{a})^5}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 5.(\sqrt{a})^{5-1} = 5a^2$ **Ans.**

Rule-4: ত্রিকোণমিতিক ফাংশন আকারে থাকলে $\frac{\sin\theta}{\theta}$ বা $\frac{\tan\theta}{\theta}$ আকারে আনতে পারলে ভাল।

যেমন: $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

$= \frac{2}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

Rule-5: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$ আকারে থাকলে সর্বদাই $\frac{\pi}{2} - x = h$ ধরতে হবে।

Solⁿ: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{cosech} - \text{coth}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{\sin h.h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{2.h.\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}$

$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(\frac{\tan\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ **Ans.**

Cosech = Cosec$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = Sec x
আবার, Coth = Cot$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = tan x

লিমিট (Limit)

Calculator Type

■ **প্রাথমিক আলোচনা:**

➤ Required mode Radian(Rad) and Comp

$x \to 0$ মানে X এর মান 0 এর কাছাকাছি কিন্তু 0 নয় যেমন x = 0.000001 অথবা 0.0000000002 এর কাছাকাছি কোন মান। তাই Calculator এর সাহায্যে lim (সীমা) বের করার সময় প্রদত্ত মানের কাছাকাছি কোন মান নিয়ে কাজ করতে হয় যেমন $X \to 0$ এর ক্ষেত্রে x = .0000001 অথবা x = 0.0000000002 এরফলে আমরা রাশিটির একটি আসন্ন মান পাই।

➤ **Calculator কিভাবে Rad(Radian) এ নেওয়া যায়:**

ক্যালকুলেটরকে কখনও কখনও Degree এর পরিবর্তে Radian এ রাখতে হয় যেমন, Limit, Integration করার সময় যখন কোন Trigonometric function যেমন, sinθ, cosθ, cotθ, tanθ ইত্যাদি আসে তখন ক্যালকুলেটরটির Mode Degree থেকে পরিবর্তন করে Radian এ নিতে হবে।

নিচে Degree থেকে Radian পরিবর্তন করার বাটন চিত্র দেয়া হল।

Ms/W Series:

[MODE] [MODE] [MODE] | Deg 1 | Rad ② | Gra 3 | [2]

ES Series:

[MODE] | 1. MthIO 2. LineIO 3. Deg ④Rad | [4]

Example 01: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=?$

A. 4 B. 2 C. 0 D. 6

Calculator এ $\frac{x^2-4}{x-2}$ লিখে calc বাটন চাপলে screen X? আসবে।

যেহেতু $x \to 2$ তাই 2 এর কাছাকাছি মান যেমন 2.00000001 বা 1.999999999 (2 এর যত কাছাকাছি সম্ভব) লিখে = বাটন চাপলে screen এ 4 আসবে। তাই নির্ণেয় লিমিট 4।

MS/ES Series:

[(] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [)] [÷] [(] [ALPHA] [)] [−] [2] [)] [CALC] X? 2.0000000001 =

ফলাফল: 4

Example 02: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=?$ (DU 09-10)

A. 4 B. 2
C. 0 D. Does not exists

• mode radian(rad) এ রাখতে হবে।

Calculator এ $\frac{\sin x^2}{x}$ লিখে calc বাটন চাপলে screen এ X? আসবে।

যেহেতু $x \to 0$ তাই 0 এর কাছাকাছি মান যেমন 0.000 000 001 (0 এর যত কাছাকাছি সম্ভব) লিখে = বাটন চাপলে screen এ 10^{-09} আসবে। তাই নির্ণেয় লিমিট $10^{-09} = 0.000000001 \approx 0$।

MS/W Series:

[sin] [ALPHA] [)] [x²] [÷] [ALPHA] [)] [CALC]

X? 0.000000001 =

ফলাফল: $10^{-09} = 0.000000001 \approx 0$

ES Series:

[sin] [ALPHA] [)] [x²] [)] [÷] [ALPHA] [)] [CALC]

X? 0.000000001 =

ফলাফল: $10^{-09} = 0.000000001 \approx 0$

Example 03: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{x}$ এর মান কত?

A. 1 B. 2 C. 0 D. Does

MS/W Series:

[SHIFT] [tan⁻¹] [2] [ALPHA] [)] [÷] [ALPHA] [)] [CALC]

x ? 0.00000001 =

ফলাফল: 2

ES Series:

[SHIFT] [tan] [2] [ALPHA] [)] [)] [÷] [ALPHA] [)] [CALC]

x ? 0.00000001 =

ফলাফল: 2

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type- 01 : La Hospitals Rule

Limit এর Problem এ যদি $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ আকারে থাকে এবং লব ... x = a বসালে $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারে আসে তাহলে সেখানে La Hosp... প্রয়োগ করা হয়।

বি.দ্র: M.C.Q তে খুব সহজেই লিমিটের বেশির ভাগ Math এই Ru... Solve করা যায়।

Rule: লব ও হরকে আলাদাভাবে Differentiate করতে হবে যতক্ষণ $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আসা বন্ধ না হবে।

Ex-01 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$

Solⁿ: এখানে, $x \to 0$ বসালে আমরা $\frac{0}{0}$ আকারে পাই,

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos ax)}{\frac{d}{dx}(1-\cos bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{b\sin bx}$

আবার, $x \to 0$ বসালে $\frac{0}{0}$ আকারে আসে এজন্য আবার আমরা Differentiate করবো।

$\lim_{x\to 0}\frac{a.a\cos ax}{b.b\cos bx}=\frac{a^2.1}{b^2.1}[x=0 \text{ বসিয়ে}]=\frac{a^2}{b^2}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\sin x}{2}\right)$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = -\frac{1}{2}$ **Ans.**

$\lim \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = ?$

$\lim \left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)$ [$x = 0$ বসালে, $\frac{0}{0}$ form আসে তাই La-Hospital Rule]

$\lim \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1} = 1$ **Ans.**

$\lim \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

$\lim \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

$\lim \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+3x}}.3-\frac{1(-4)}{2\sqrt{1-4x}}}{1}$ [$\frac{0}{0}$ form, La-Hospital Rule]

$\lim \left(\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1+3x}}+2\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right) = \frac{3}{2}+2 = \frac{7}{2}$ **Ans.**

For Practice:

$\lim \frac{1-\cos 7x}{x^2}$ **Ans : 49/2**

$\lim \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ **Ans :** $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

Type-02: $\lim_{x \to a} f(x)$ এর ক্ষেত্রে

আকার $\frac{0}{0}$; কিন্তু লব, হরে সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান–

$\lim \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$ এর মান নির্ণয় কর।

$\lim \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$

$\lim \frac{x-3}{x+4} = \frac{2-3}{2+4} = -\frac{1}{6}$ **Ans.**

For Practice:

$\lim \frac{x^3+2x^2-12x-9}{x^2-x-6}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{27}{5}$

$\lim \frac{x^2+2x-8}{x-2}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans. 6**

এই প্রবলেমগুলো M.C.Q তে La Hospitals Rule প্রয়োগ করে solve করা যায়।

Type-03: হর বা লব বা উভয়টিতে $\sqrt{\ }$ চিহ্নযুক্ত পদ বিদ্যমান

Ex-01 $\lim_{x \to \infty} [\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}]$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\lim_{x \to \infty} [\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}]$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1})}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1-x^2-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

For Practice:

01. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+5x}-\sqrt{4-7x}}{3x}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans. 1**

02. $\lim_{b \to 0} \frac{1}{b}\left[\frac{1}{\sqrt{x+b}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$

03. $\lim_{x \to \infty} [x-\sqrt{x^2+x}]$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $-\frac{1}{2}$

04. $\lim_{x \to \infty} [\sqrt{a^2x^2+ax+1}-\sqrt{a^2x^2+1}]$ $(a > 0)$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{1}{2}$

Type-04: $\lim_{x \to \infty} f(x)$ **এর ক্ষেত্রে**

01. $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+c}{lx^2+mx+n} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{l+\frac{m}{x}+\frac{n}{x^2}}$ [x^2 দ্বারা ভাগ করে]

(i) হরের ঘাত বেশি হলে, **Ans. 0**

(ii) লবের ঘাত বেশি হলে, **Ans. + infinite or – infinite**

(iii) সমান হলে, **Ans.** $\frac{a}{l}$

Ex-01 $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+5}{2x^2+9x-4}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+5}{2x^2+9x-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{9}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

Ex-02 $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\lim_{x \to \infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3^x\left(1-\frac{1}{3^{2x}}\right)}{3^x\left(1+\frac{1}{3^{2x}}\right)} = \frac{1-0}{1+0} = 1$ **Ans.**

For Practice:

01. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2+5}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{1}{2}$

02. $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x+a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** 1

03. $\lim_{x\to\infty}\frac{1-4^x}{1+4^x}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** -1

04. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** 1

05. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x+1}{2x-1}}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{1}{2}$

06. $\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+(-1)^n}{4n-(-1)^n}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $-\frac{3}{4}$

Type-05: $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ সূত্রের ব্যবহার

Ex-01 $\lim_{y\to b}\frac{y^{\frac{7}{2}}-b^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{y}-\sqrt{b}}$ এর মান কত?

Solⁿ: $\lim_{y\to b}\frac{(\sqrt{y})^7-(\sqrt{b})^7}{\sqrt{y}-\sqrt{b}}=7(\sqrt{b})^{7-1}=7(\sqrt{b})^6=7b^3$ **Ans.**

For Practice:

01. $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{9}{2}}-a^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $9a^4$

Type-06: সূচক ও লগারিদিমিক নিয়মের ব্যবহার

Ex-01 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ:

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ ধরি, $\sin x=z$; যখন $x\to 0$ তখন $z\to 0$

$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$

Ex-02 $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\infty\right)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots\ldots\infty\right)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}-\ldots\ldots\infty\right)$

$=1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\ldots\ldots\infty\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ **Ans.**

Ex-03 $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1+x)}{\sin^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$

$=1\times 1\times 1=1$

Ex-04 $\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{h}{3}\right)-(1-h)^{1/3}+1}{h^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{h}{3}\right)-(1-h)^{1/3}+1}{h^2}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[\left\{-\frac{h}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{27}-\ldots\right\}-\left\{1+\frac{1}{3}(-h)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\lfloor 2}(-h)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{\lfloor 3}(-h)^3+\ldots\right\}+1\right]$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{27}-\ldots-\left\{-\frac{1}{9}h^2-\frac{5}{81}h^3-\ldots\right\}\right]$

$=\lim_{h\to 0}\left[\left\{-\frac{1}{18}-\frac{h}{3.27}-\ldots\right\}+\left\{\frac{1}{9}+\frac{5}{81}h+\ldots\right\}\right]$

$=\frac{2-1}{18}+0=\frac{1}{18}$

Ex-05 $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2x+5}{x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2x+5}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{2+\frac{5}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}(1+2x)^2\times\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}(1+2x)^2\times\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{10}$

$=1\times e^{10}=e^{10}$

For Practice:

01. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{a}}$ [যখন $a>0$ ও $b>0$] এর মান নির্ণয় কর।

02. $\lim_{x\to 2}\frac{(1+x)^n-3^n}{x-2}$ এর মান নির্ণয় কর।

03. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-5^x}{x}$

04. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{13x}-e^{7x}}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

05. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

Type-07: ত্রিকোণমিতিক ও বীজগাণিতিক ফাংশনের মিশ্রণ

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos\theta}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$ এর মান নির্ণয় কর।

ধরি, $\theta-\frac{\pi}{3}=h \therefore \theta=h+\frac{\pi}{3}$; যখন $\theta\to\frac{\pi}{3}$ তখন $h\to 0$

$\lim_{h\to0}\frac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right)}{\sinh} = \lim_{h\to0}\frac{1-\cosh+\sqrt{3}\sinh}{\sinh}$

$=\lim_{h\to0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}}+\sqrt{3} = \lim_{h\to0}\tan\frac{h}{2}+\sqrt{3}=0+\sqrt{3}=\sqrt{3}$ **Ans.**

$\lim_{x\to0}\frac{1+\sin x}{\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর।

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=1$

Ans.

$\lim_{x\to y}\frac{\tan x-\tan y}{x-y}$ এর মান নির্ণয় কর।

$\lim_{x\to y}\frac{\tan x-\tan y}{x-y} = \lim_{x\to y}\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{(x-y)\cos x\cos y}$

$=\lim_{x\to y}\frac{\sin(x-y)}{(x-y)}\times\lim_{x\to y}\frac{1}{\cos x\cos y}=1\times\frac{1}{\cos^2 y}=\sec^2 y$ **Ans.**

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর।

ধরি, $\cos x = h^6$ [যখন $x\to0$ তখন $h\to1$]

$\lim_{h\to1}\frac{h^3-h^2}{1-h^{12}} = -\lim_{h\to1}\frac{h^2(h-1)}{(h^{12}-1)} = -\lim_{h\to1}\frac{h-1}{h^{12}-1}$

$=-\lim_{h\to1}\frac{1}{\frac{h^{12}-1}{h-1}}=-\frac{1}{12\times1^{11}}=-\frac{1}{12}$ **Ans.**

$\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x-x}$ এর মান নির্ণয় কর।

$\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x-x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x\{e^{(\tan x-x)}-1\}}{(\tan x-x)}=e^0\times1=1$ **Ans.**

$\lim_{x\to y}\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{x^2-y^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$\lim_{x\to y}\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{x^2-y^2}=\lim_{x\to y}\frac{\sin(x-y)\sin(x+y)}{(x-y)(x+y)}$

$=\lim_{x\to y}\frac{\sin(x-y)}{(x-y)}\times\lim_{x\to y}\frac{\sin(x+y)}{(x+y)}=\frac{\sin 2y}{2y}$ **Ans.**

For Practice:

মান নির্ণয় কর:

01. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x-\tan x}{\frac{\pi}{2}-x}$ **Ans.** $\frac{1}{2}$

02. $\lim_{x\to0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** -1

03. $\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{2}{\pi}$

04. $\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-\sin^{-1}x}{\sin^3 x}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $-\frac{1}{2}$

Type-08: লিমিটের অস্তিত্বশীলতা, Sandwich Theorem, এবং Mean Value Theorem সম্পর্কিত

Ex-01 প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ exist করে না।

Sol^n: L.H. Limit $=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$

$=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)}=-\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right).\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

R.H.Limit $=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$

$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right).\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$\because$ L.H.Limit $\neq$ R.H. Limit

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ exist করে না **(Proved)**

Ex-02 দেখাও যে, $\lim_{x\to0}\frac{e^{|x|}-1}{x}$ অস্তিত্বহীন।

Sol^n: L.H.Limit $=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\dots\infty\right)-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(-1+\frac{x}{2!}-\dots\infty\right)=-1$

R.H.Limit $=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}$

$=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots\infty\right)-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\frac{x^2}{2}+\dots\infty}{x}$

$=\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{x}{2!}+\dots\infty\right)=1$

$\because$ L.H.Limit $\neq$ R.H. Limit

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{|x|}-1}{x}$ অস্তিত্বহীন **(Showed)**

Ex-03 Sandwich Theorem apply করে প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$

Sol^n: জানি, $-1 \le \cos x \le 1$

$\therefore -1 \le \cos\frac{1}{x^2} \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x^2} \le x^2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2) \le \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} \le \lim_{x\to 0} x^2$

কিন্তু $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$ সুতরাং, $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x^2} = 0$ **(Proved)**

For Practice:

01. নিম্নলিখিত ফাংশনটির $x = 5$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা test কর।

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{যখন } x \ne 5 \\ 10 & \text{যখন } x = 5 \end{cases}$$

Ans. $x = 5$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।

02. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$ exist করে কিনা দেখাও। **Ans.** exist করে।

03. Sandwich Theorem apply করে প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

04. $f(x) = \dfrac{1}{5 + e^{\frac{1}{x-2}}}$ ফাংশনটির $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা test কর।

Ans. $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন ফাংশন।

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [17-18]

Sol^n $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right) + \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$= 1 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}\times 1^2 = \frac{3}{2}$ **Ans.**

02. $f(x) = \sin 3x$ হলে $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}$ এর মান নির্ণয় কর। [16-17]

Solve $f(x) = \sin 3x$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin[3(x+3h)]-\sin 3x}{3h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(3x+9h)-\sin 3x}{3h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(3x+\frac{9h}{2}\right)\sin\frac{9h}{2}}{3h}$

$= \lim_{h\to 0} 2\cos\left(3x+\frac{9h}{2}\right)\cdot \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin\frac{9h}{2}}{\frac{9h}{2}}\times\frac{3}{2} = 2(\cos 3x)\,\frac{3}{2}$

$= 3\cos 3x$ **Ans.**

03. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\log_e(1-x)}$ এর মান বের কর। [14-15]

Solve $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\log_e(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{\log_e(1-x)}{-x}} = \frac{2}{1} = 2$ [illegible]

04. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan kx}{x} & x < 0 \\ 3x + 2k^2 & x \ge 0 \end{cases}$

শূন্য ব্যতিত k এর এমন একটি মান নির্ণয় কর যা উপরে [illegible] ফাংশনকে $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন করবে। তোমার উত্তরের [illegible] ব্যাখ্যা কর। [14-15]

Solve দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan kx}{x}, & x < 0 \\ 3x + 2k^2, & x \ge 0 \end{cases}$

এখন, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(3x + 2k^2) = 2k^2$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{x} = k$

আবার, $f(0) = 3.0 + 2.k^2 = 2k^2$

প্রশ্নমতে, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow 2k^2 = k \Rightarrow 2k^2 -$ [illegible]

$\Rightarrow k(2k-1) = 0$

$\Rightarrow 2k - 1 = 0$ $[\because k \ne 0]$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

উত্তরের যৌক্তিকতা, যখন, $k = \frac{1}{2}$ তখন $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan\frac{x}{2}}{x}, & x < 0 \\ 3x + \frac{1}{2}, & x \ge 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$ [illegible]

$f(0) = 3.0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে $y = f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

05. যদি $f(x) = \sin x$ হয়, তবে $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$ এর মান [illegible]

[00-01; RUET 11-12]

Solve $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+nh)-\sin x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{nh}{2}}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}\times\lim_{h\to 0} 2\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)\times\frac{n}{2}$

$= n\cos x$

এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ell n(2x-1)-\ell n(x+5)\}$ [04-05]

Solve $\lim\limits_{x\to\infty}\{\ln(2x-1)-\ln(x+5)\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{2x-1}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}}\right)=\ln 2 \quad \textbf{Ans.}$$

মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}$ [04-05]

Solve $\lim\limits_{x\to y}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\lim\limits_{x\to y}\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{x-y}$

$$=\lim\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\times\lim_{x\to y}\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=1.\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\cos y \ \textbf{Ans.}$$

এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$ [04-05]

Solve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left\{1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots\infty\right\}-1}{x}$

$$=\lim\frac{nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots\infty}{x}=\lim_{x\to 0}\left(n+\frac{n(n-1)}{2!}x+\ldots\infty\right)=n$$

(proved)

মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos^2 x)}{\sin x}$ [03-04]

Solve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\cos x+\cos^2 x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\cos^2 x)$

$=1\times(1+1)=2=2$ **Ans.**

$\lim\frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$ [03-04]

Solve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{\sin^3 x}$

$$=\lim\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3=1\times 1^3=1 \quad \textbf{Ans.}$$

এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan sx-\sin sx}{x^3}$, $s>0$ [15-16]

Solve $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\tan sx-\sin sx}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin sx}{x}\right)\left(\frac{1-\cos sx}{x^2\cos sx}\right)$

$$=\lim s\times\left(\frac{\sin sx}{sx}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{sx}{2}}{x^2}\right)\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos sx}$$

$$=s\times 1\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{sx}{2}}{\frac{sx}{2}}\right)^2\times\left(\frac{s^2}{4}.2\right).1=\frac{s^3}{2} \quad \textbf{Ans.}$$

02. (a) সীমাস্থ মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(b-\sqrt{b^2+x^2})}{x^2}$ [12-13]

Solve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(b-\sqrt{b^2+x^2})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(b-\sqrt{b^2+x^2})(b+\sqrt{b^2+x^2})}{x^2(b+\sqrt{b^2+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(b^2-b^2-x^2)}{x^2(b+\sqrt{b^2+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2(b+\sqrt{b^2+x^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{b+\sqrt{b^2+x^2}}=-\frac{1}{b} \quad \textbf{Ans.}$$

(b) মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ [12-13, 05-06]

Solve

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-h)}{h^2}$$

ধরি, $\frac{\pi}{2}-x=h$

$\therefore x\to\frac{\pi}{2}$ হলে, $h\to 0$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \textbf{Ans.}$$

03. মান নির্ণয় করঃ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{1+x-e^x}$ [10-11]

Solve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{1+x-e^x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\infty\right)}{1+x-\left(1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ldots\ldots\infty\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots\infty}{-\left(\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ldots\infty\right)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\ldots\infty}{\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\ldots\infty}=-1 \quad \textbf{Ans.}$$

04. মান নির্ণয় করঃ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$ [10-11]

Solve $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.\left(1+\frac{1}{x}\right)^3=e.1=e$ **Ans.**

05. মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$ [09-10]

Solve

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$

$=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\tan z}=\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)(\cos z)=1$

ধরি, $\tan^{-1}x=z$

$\therefore x=\tan z$

যখন $x\to 0$, $z\to 0$

Ans.

06. a. প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ [08-09]

Solve $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\right) - 1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots}{1}$

$= 1 \therefore$ L.S = R.S **(Proved)**

b. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3}$ [08-09]

Solve $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^3 x}{x^3} = 4 \times \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 4$ **Ans.**

07. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{-x}}{x}$ [06-07]

Solve $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{-x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \ldots\infty\right) - \left(1 - \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2}{2!}(\ln a)^2 - \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \ldots\infty\right)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x\ln a + \frac{x^3}{3!}(\ln a)^3 + \ldots\ldots\infty\right)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} 2\left(\ln a + \frac{x^2}{3!}(\ln a)^3 + \cdots\infty\right) = 2\ln a$ **Ans.**

08. মান নির্ণয় কর- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right) = ?$ [04-05]

Solve $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$= \lim_{x\to 0} \tan\frac{x}{2} = 0$ **Ans.**

09. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \{\sec x(\sec x - \tan x)\}$ [03-04]

Solve $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \{\sec x(\sec x - \tan x)\}$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x}\right)$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে

01. $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+1}}{5^n - 7^n}$ এর মান হল- [12-13]

A. $\frac{1}{5}$ B. –5 C. $\frac{1}{7}$ D. –7

Ans D Solve $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+1}}{5^n - 7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5.5^n + 7.7^n}{5^n - 7^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{5\left(\frac{5}{7}\right)^n + 7}{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1} = -7$ $\left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^\infty = 0\right.$ যখন $\left.a < b\right]$

02. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ এর মান হল- [11-12]

A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. 2 D. 1

Ans B Solve

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cot x = 0$

[La Hospital Rule]

03. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-2x}}{|1 + x|}$, [0<x<1] [10-11]

A. 0 B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{3}$

Ans A Solve $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-2x}}{|1 + x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + x} = 0$

04. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{y}{2^x}$ [09-10]

A. 2 B. y C. 2^y D. y^2

Ans B Solve $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{y}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{y}{2^x}}{\frac{y}{2^x}}.y = 1$

05. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{4x^3 - 1}$ [09-10]

A. ∞ B. 1 C. 0 D. $\frac{1}{4}$

Ans C Solve $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{4x^3 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{4}$

06. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x$ এর মান হবে : [08-09]

A. 0 B. 1 C. ∞ D. –1

Ans B Solve Let, $\frac{\pi}{2} - x = h \therefore \lim_{h\to 0} h.\tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$

$= \lim_{h\to 0} h.\cot h = \lim_{h\to 0} \frac{h}{\tan h} = 1$

$\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। [07-08, CUET 15-16]

B. $\frac{49}{6}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

Solve $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$

$=\lim\frac{7\sin 7x}{6x}$

$=\lim\frac{49\cos 7x}{6}=\frac{49}{6}$

[La Hospital Rule]

$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ এর মান কত? [05-06, CUET 11-12]

B. 1 C. −2 D. −1

Solve

$\lim\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$

[La Hospital rule]

এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

$\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x}$ এর মান কোনটি? [17-18, 15-16]

B. 3 C. $\frac{1}{5}$ D. 2 E. $\frac{1}{2}$

Solve $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x}$

$=\lim\frac{\sin x-x-\ln\cos x}{x\sin x}$ ..... (i)

$=\lim\frac{-\sin x+x-\ln\cos x}{x\sin x}$ ..... (ii) [x-এর পরিবর্তে −x বসিয়ে]

$\Rightarrow 2I=\lim_{x\to 0}\frac{-2\ln\cos x}{x\sin x}\Rightarrow I=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln\cos x}{x\sin x}$

$\lim\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1-\sin^2x)}{-\sin^2x}\right]\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

নির্ণয় কর- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ [16-17]

B. 3 C. −2 D. 2 E. 1

Solve ধরি, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=y$

$\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\ln\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cot x}\left[\frac{0}{0}\text{ form}\right]$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\csc^2x}$ [La Hospital Rule] $=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin^2x$

$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x\,.\,\sin x)=0$

$\therefore\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=e^0=1$

03. "a" এর যে মানের জন্য $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-3x}{5x}$ এর মান 0 হবে তা হলো– [14-15]

A. $\frac{3}{5}$ B. 5 C. 3 D. 2 E. 8

Ans C Solve $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos x-3}{5}$

[La Hospital Rule] $=\frac{a-3}{5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{a-3}{5}=0\therefore a=3$

04. 'k' এর কোন মানের জন্য $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2e^{-4x}+kx}{x^2}$ এর মান −15 হবে? [13-14]

A. 0 B. −3 C. −20 D. 8 E. −10

Ans E Solve $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2e^{-4x}+kx}{x^2}$ [La Hospital Rule]

$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+8e^{-4x}+k}{2x}$ [La Hospital Rule]

$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-32e^{-4x}}{2}=-15$

সুতরাং এইক্ষেত্রে অবশ্যই $2+8+k=0\therefore k=-10$

05. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}-2x\log_e 3}{x-\sin x}$ -এর মান হলো- [12-13]

A. $2(\log_e 3)^3$ B. $2(\log_e 3)^2$ C. $2(\log_e e)^3$
D. $2(\log_3 e)^2$ E. 0

Ans A Solve $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}-2x\log_e 3}{x-\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3+3^{-x}\ln 3-2\ln 3}{1-\cos x}$ [La Hospital Rule]

$=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x)(\ln 3)(\ln 3)-3^{-x}(\ln 3)(\ln 3)-0}{0+\sin x}$ [La Hospital Rule]

$=\lim_{x\to 0}\frac{3^x(\ln 3)^3+3^{-x}(\ln 3)^3}{\cos x}=2(\ln 3)^3=2(\log_e 3)^3$

06. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ এর মান কত? [11-12]

A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. 3 D. $-\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{2}$

Ans E Solve $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{\log x.(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x\frac{1}{x}+\log x-1}{\log x+(x-1)\frac{1}{x}}$ [La Hospital Rule]

$=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\log x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ [La Hospital Rule] $=\frac{1}{2}$

07. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ এর মান কত? [10-11]

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1 E. 0

Ans C Solve $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

[La Hospital Rule]

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ [La Hospital Rule] $=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2$

08. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}$ এর মান কত? [09-10]

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{7}$ E. $\frac{1}{5}$

Ans A Solve $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta(1-\sin^3\theta)}{\sin\theta\sec\theta}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta+\sin^2\theta)}{\cos^2\theta\sin\theta} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\sin\theta} = \frac{3}{2}$

09. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+bx+41}{x^2+ax+9}$ এর মান কত? [08-09]

A. 1 B. $\frac{41}{9}$ C. $\frac{b}{a}$

D. 0 E. ∞

Ans A Solve $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+bx+41}{x^2+ax+9}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{b}{x}+\frac{41}{x^2}}{1+\frac{a}{x}+\frac{9}{x^2}} = 1$

10. যদি $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2} = 2$ হয়, তবে a এর মান হলো- [07-08]

A. –2, 4 B. 2, –2 C. 2, –4

D. 3, –3 E. 2, –3

Ans B Solve $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{\frac{4}{a^2}\frac{a^2x^2}{4}} = 2$

$\Rightarrow \frac{a^2}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = 2 \therefore a = \pm 2$

11. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ এর সঠিক মান কোনটি? [05-06]

A. 3 B. $\frac{9}{2}$

C. 9 D. $\frac{3}{2}$

Ans B Solve $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{3x^2}{2x-0}$

$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ [La Hospital rule]

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. $\lim\limits_{x\to\pi} \left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)$ এর মান হল- [14-15]

A. 0 B. 1 C. –1 D. None

Ans A Solve $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x} = -\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ [La Ho...

02. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x}$ এর মান কত? [13-14]

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. 1 D. None

Ans D Solve $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{0-\cos x}{0-1} = ...$

[La Hospital Rule]

03. যদি $f:R\to(0,\infty)$ এমন হয় যেন, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ বিদ্যমান থাকে এবং

$\lim\limits_{x\to 5} \frac{\{f(x)\}^2-9}{\sqrt{|x-5|}} = 0$, তবে $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ এর মান কত? [12-13]

A. 3 B. 0 C. ±3 D. None

Ans A Solve $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\{f(x)\}^2-9}{\sqrt{|x-5|}} = 0$ হলে, $\lim\limits_{x\to 5}\{f(x)\}^2 = ...$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5} f(x) = \pm 3$ ∴ এখন, $(0,\infty)$ এ $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3$

04. মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x-1}}$ [09-10]

A. 0 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. None of the...

Ans A Solve $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = ?$ [14-15]

A. ∞ B. 0 C. e D. 0.5 E. None

Ans D Solve $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{1+1} = ...$

02. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$ এর মান কোনটি? [14-15]

A. 1 B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{6}$

Ans E Solve $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} ...$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}\cos 0 = \frac{1}{6}$ [La Hospital rule]

$\frac{x(\cos 2x + \cos 3x)}{2\sin x}$ এর মান কোনটি? [13-14]

B. 1 C. 2 D. 3 E. None

Solve $\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos 2x + \cos 3x)}{2\sin x}$

$= \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x\to 0} \frac{(\cos 2x + \cos 3x)}{2} = 1 \times \frac{1+1}{2} = 1$

$(1+kx)^{\frac{1}{x}}$ -এর মান- [12-13]

B. ln(kx) C. ln(k + x) D. a^k E. e^k

Solve $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left\{(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right\}^k = e^k$

$\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x}$ = ? [11-12]

B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$

E. None

Solve $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x}$

$= \lim \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{2\cos 2x}$ [La hospital Rule] $= \frac{-1}{2\times 2\times 2} = \frac{-1}{8}$

$\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ = ? [10-11]

B. − 1 C. e^{-1}

E. 1

Solve

$\lim \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}$

$\frac{x}{e^x}$ = ? [09-10]

B. 1 C. e^{-1}

E. e^{-x}

Solve $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$ [La hospital rule] = 0

$\frac{10^{-2x}-10^{-3x}}{x}$ = ? [09-10]

log10 B. −log10 C. $\log_e 10$

−log10 E. None

Solve $\lim_{x\to 0}\frac{10^{-2x}-10^{-3x}}{x}$

$= \frac{10^{-2x}\ln(10)(-2) - 10^{-3x}\ln(10)(-3)}{1}$ [La Hospital rule]

$= -2\ln(10) + 3\ln(10) = \ln 10 = \log_e 10$

SELF TEST [Written]

01. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$ Ans : $\frac{1}{\sqrt{3}}$

02. $\lim_{x\to\infty}\ln(4x-1) - \ln(x+7)$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. 2ln2

03. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{4x}}{e^{7x}-e^{9x}}$ এর মান কত? Ans. $\frac{1}{2}$

04. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}$

05. $\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 2x}{4x+4\sin 4x}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{5}$

06. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

07. $\lim_{x\to\infty}\cos^2\left\{\pi\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+2x}-x\right)\right\}$ এর মান নির্ণয় কর। [n∈ Z] Ans. $\frac{1}{4}$

08. $\lim_{x\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{x^2+1}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [n∈ Z] Ans. π

09. $\lim_{x\to\infty}(-1)^x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+1}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। [n∈ Z] Ans. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{x^2}-e^x+x}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. 4

11. a , b -এর মান নির্ণয় কর যদি $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=2$

Ans. a = 1 , b = −3

12. a , b ,c ,d-এর মান নির্ণয় কর যদি

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+ax^3+3x^2+bx+2}-\sqrt{x^4+2x^3-cx^2+3x-d}\right)=4$

Ans. a = 2 , b ∈ R , c = 5 , d ∈ R

13. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{2n^4+1}{5n^5+1}}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{e^{\frac{2}{5}}}$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[x]{1+x}-e}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $-\frac{e}{2}$

15. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\tan x - \sin\{\tan^{-1}(\tan x)\}}{\tan x+\cos^2(\tan x)}}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. 1

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin^2 x}-\sqrt[4]{1-2\tan x}}{\sin x+\tan^2 x}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{2}$

17. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\cos x+\sqrt{1-\cos x+\sqrt{(1-\cos x)+\cdots\infty}}}\right)-1}{x^2}$

এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{2}$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos^2 x)}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. π

19. $\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{n(n+1)}{2}$

SELF TEST: [MCQ]

01. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$ এর মান–

A. $\dfrac{b}{a}$ B. $\dfrac{b^2}{a^2}$ C. $\dfrac{a}{b}$ D. ab

02. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin\pi x-\sin 3\pi x}{x^3}=?$

A. $2\pi^3$ B. $3\pi^3$ C. π^3 D. $4\pi^3$

03. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+4x)}{x^3-5x^2+2x}=?$

A. 0 B. 1 C. –2 D. 2

04. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\log_e(1+5x)}$ এর মান নির্ণয় কর।

A. $\dfrac{5}{3}$ B. $\dfrac{3}{5}$ C. $\dfrac{2}{5}$ D. 3

05. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$ এর মান–

A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{16}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

06. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{\cos x-\cos 5x}$ এর মান–

A. 1 B. 2 C. –1 D. –2

07. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}=?$

A. 1 B. –1 C. 2 D. $\dfrac{1}{2}$

08. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}=?$

A. 1 B. 2 C. –1 D. –2

09. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=?$

A. 2 B. $\dfrac{1}{4}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^{\circ}}{x}=?$

A. $\dfrac{\pi}{90}$ B. 180π C. $\dfrac{180}{\pi}$ D. $\dfrac{\pi}{180}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ এর মান–

A. $\dfrac{2}{5}$ B. $\dfrac{25}{10}$

C. $\dfrac{10}{25}$ D. $\sqrt{52}$

12. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos 4\theta}{\theta^2}=?$

A. 4 B. 8 C. 10 D. 12

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x}$ এর মান–

A. 1 B. –2 C. 0 D. –1

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)^2}{x}=?$

A. 1 B. 2 C. $\dfrac{1}{2}$ D. 0

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^x=?$

A. 3 B. e^3 C. $e^{1/3}$ D. x^3

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 5x}=?$

A. 0 B. 1 C. e D. None

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec 4x-1}{x^2}=?$

A. 1 B. 8 C. 3 D. 4

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}7x}{\sin^{-1}8x}=?$

A. $\dfrac{7}{8}$ B. $\dfrac{8}{7}$ C. 56 D. 2

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3+x-3}=?$

A. 2 B. $\dfrac{1}{2}$ C. 0 D. Not ex...

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=?$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 1 C. $-\dfrac{1}{2}$ D. 0

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-\pi}{\cos x}=?$

A. 1 B. 2 C. –2 D. 0

22. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^3-2x^2}\right)=?$

A. ∞ B. অস্তিত্ববিহীন C. 1 D. 0

23. $\lim\limits_{\theta\to 0}\tan 4\theta\ \text{cosec}\,2\theta=?$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

24. $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{\ln x-1}}=?$

A. 1 B. 0 C. e D. ∞

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^6-1}{(1+x)^2-1}=?$

A. 0 B. ∞ C. 6 D. 3

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-e^{-10x}}{x}=?$

A. 10 B. 15 C. –5 D. 5

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{bx^3+cx+d}=?$

A. $\dfrac{c}{d}$ B. $\dfrac{b}{a}$ C. $\dfrac{b}{c}$ D. $\dfrac{a}{b}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=?$

A. e B. e^5 C. e^2 D. 5e

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ...
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23. Ⓐ...
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24. Ⓐ...
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25. Ⓐ...
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ...
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27. Ⓐ...
07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28. Ⓐ...

Correct Answer

28.B	27.D	26.D	25.D	24.C	23.B	22.C	21.C	[illegible]
18.B	17.B	16.D	15.B	14.D	13.C	12.B	11.B	[illegible]
08.A	07.B	06.A	05.B	04.B	03.D	02.D	01.C	

[২য় অংশ]

অন্তরীকরণের সাধারণ সূত্র

গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি:

... শতকের শেষ ভাগে বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন এবং লীবনীজ (Leibnitz) পরস্পর স্বাধীনভাবে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেন।

... অন্তরজ বা অন্তরক (Differential co-efficient) হল তাৎক্ষনিক পরিবর্তন।

... হলে, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

... বলতে গেলে, স্বাধীন চলরাশি x এর মানের ক্ষুদ্র পরিমান বৃদ্ধির ... অধীন চলরাশি y এর মানে যে বৃদ্ধি ঘটে, তাদের অনুপাতের সীমাস্থ ... x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ। সুতরাং অন্তরক এক ধরনের ...।

... সাপেক্ষে $f(x)$ এর অন্তরক বোঝানোর জন্য $y', \frac{dy}{dx}, f'(x), D_x y$, ... ইত্যাদি সংকেত ব্যবহার করা হয়।

প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহ

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$
3. $\frac{d}{dx}(cx^n) = c.\frac{d}{dx}(x^n) = cnx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
5. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
6. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
8. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$
9. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x.\cot x$
10. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
11. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
13. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}.\log_a e$
14. $\frac{d}{dx}(e^{nx}) = ne^{nx}$
15. $\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$
16. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
17. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
20. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$
21. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
22. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
23. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
25. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx}$
26. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

অন্তরীকরণের নিয়মাবলি:

❑ **মূল নিয়মে অন্তরীকরণ:**

$y = f(x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

যে কোন বিন্দুতে $x = a$ হলে, $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

❑ **অনেকগুলি ফাংশনের গুণ ও ভাগফলের মিশ্রণ:**

সূত্র: $$\frac{dy}{dx} = y\left[\text{Power} \times \frac{\frac{d(\text{Num}_1)}{dx}}{\text{Num}_1} + \text{Power} \times \frac{\frac{d(\text{Num}_2)}{dx}}{\text{Num}_2} + \ldots\right] - y\left[\text{Power} \times \frac{\frac{d(\text{Den}_1)}{dx}}{\text{Den}_1} + \text{Power} \times \frac{\frac{d(\text{Den}_2)}{dx}}{\text{Den}_2} + \ldots\right]$$

Note: লবের পূর্বে ধনাত্মক এবং হরের পূর্বে ঋণাত্মক চিহ্ন হবে।

উদাহরণ: $y = \frac{x^{3/2}(1+x^2)^{3/2}}{(1-x^2)^{3/2}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

Sol^n: সূত্রানুসারে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/2}(1+x^2)^{3/2}}{(1-x^2)^{3/2}}\left[\frac{\frac{3}{2}\frac{d}{dx}(x)}{x} + \frac{\frac{3}{2}\frac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{\frac{3}{2}\frac{d}{dx}(1-x^2)}{1-x^2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{x^{3/2}(1+x^2)^{3/2}}{(1-x^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2}\right)$$ **Ans.**

□ **লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ:**

* কোন চলক অন্য কোন চলকের সূচক হিসেবে থাকলে উভয় পাশে ln নিতে হয়

যেমন, $y = (\sin^{-1}x)^{\ln x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $y = (\sin^{-1}x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x.\ln(\sin^{-1}x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \ln x.\frac{1}{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1}x)\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin^{-1}x)^{\ln x}\left[\frac{\ln x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1}x)\frac{1}{x}\right]$$ **Ans.**

□ **ত্রিকোণমিতিক প্রতিস্থাপন পদ্ধতি:**

এই পদ্ধতি বিপরীত বৃত্তাকার ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়ের কাজকে সহজ করে দেয়:

সহায়ক চার্ট:

term	যা ধরতে হবে
$(1+x^2)^n, n=1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ইত্যাদি	$x = \tan\theta$ বা $x = \cot\theta$
$(1-x^2)^n, n=1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ইত্যাদি	$x = \sin\theta$ বা $x = \cos\theta$
$(x^2-1)^n, n=1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ইত্যাদি	$x = \sec\theta$ বা $x = \text{cosec}\theta$
$\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1-x^2}, \frac{2x}{1+x^2}$	$x = \tan\theta$ বা $x = \cot\theta$
$\sqrt{\frac{1-x}{2}}, \sqrt{\frac{1+x}{2}}$	$x = \cos\theta$
$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$x = \sin^2\theta$ বা $x = \cos^2\theta$
$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$x = \cos\theta$ বা $x = \sin\theta$
$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$x = \sec\theta$ বা $x = \text{cosec}\theta$

Ex-01 x-এর সাপেক্ষে $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$ -এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, $x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}x \therefore y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}$

$$= \tan^{-1}\frac{\sec\theta+1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \tan^{-1}\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\cot\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\tan^{-1}x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2(1+x^2)}$$ **Ans.**

□ **ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়:**

Ex-02 sinx এর সাপেক্ষে lnx এর অন্তরক সহগ বের কর।

Sol^n: ধরি, $y = \sin x$; $z = \ln x$; তাহলে, $\frac{dz}{dy}$ বের করতে হবে।

এখানে, $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{dz/dx}{dy/dx} = \frac{1/x}{\cos x} = \frac{1}{x\cos x}$$ **Ans.**

Calculator Type

অন্তরীকরণ (Differentiation)

Differentiation: [fx – 991ms এর জন্য প্রযোজ্য]

সাধারণত যতগুলো Differentiation আসে exam এ তার ... Calculator দিয়ে করা যায়।

এখানে, নিজের ইচ্ছা স্বাধীন ১টি Limit ধরে Differentiati... মান পাওয়া যায়, option এ x এর জায়গায় ঐ Limit এর মান ... সাথে মান মিলে যায় সেটাই Answer হয়। যেমন:

01. $y = \frac{(\tan x - \cot x)}{(\tan x + \cot x)}$ হলে $\frac{dy}{dx}$?

A. 2sin 2x B. 2cos 2x C. 2sin x C. ...

Sol^n: ক্যালকুলেটর রেডিয়ান mode এ নিয়ে shift চেপে ∫dx ... প্রতীক পাবে।

এইবার সমীকরণটি নিম্নোক্তভাবে উঠাও: $\frac{d}{dx}$(tanx – (1 ÷ ...

(tanx + (1 ÷ tanx)), 1

এখন সমান (=) চাপলে 1.8 পাবে।

Option এ:

A. 2sin2x = 2sin (2 × 1) = 1.8

B. 2cos2x = 2cos 2 = –0.83

C. 2sinx = 2sin 1 = 1.68 ∴ Ans. A

এখানে, 1 ইচ্ছাস্বাধীন Limit

আর Calculator এ cotx লিখা যায় না বলে (1 ÷ tanx) লিখ...

02. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

A. $\sqrt{x^2+4}$ B. $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+4}}$ C. $1+\sqrt{x^2+4}$ D. ...

এখন, Calculator এর shift বাটন চেপে ∫dx বাটন চাপলে ...

এরপর, নিম্নভাবে উঠাও: $\frac{d}{dx}(\ln(x+\sqrt{x^2+4}))$, 1

এখন সমান (=) বাটন চাপলে Answer 0.447 পাবে।

এখন Option এ x এর পরিবর্তে 1 বসাও যা Limit হিসেবে ধ...

A. $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = 2.24$

B. $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = 0.309$

C. $1+\sqrt{x^2+4} = 1+\sqrt{5} = 3.24$

D. $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447$ ∴ Ans. D

➢ **Limit ধরার কিছু নিয়ম:**

i) $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ থাকলে Limit এর মান 1 এর নিচে ... $\sin^{-1}2x, \cos^{-1}2x, \tan^{-1}2x$ থাকলে Limit এর মান 0.5 এর নিচে ...

ii) $\sqrt{1-x^2}$ থাকলে Limit এর মান 1 এর নিচে ধরতে হবে।

iii) হরে 0 হয় এমন Limit ধরা যাবে না।

যেমন: $y = \frac{x^2+3}{x-3}$ এইটাই ক্ষেত্রে Limit 3 ধরা যাবে না।

... Math করা যাবে না Calculator দিয়ে।

... $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ এটা করা যাবে না।

... এ a ও b দেওয়া থাকলে a ও b এর মান ধরে নিতে হবে।

... $y = \tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

A. $\frac{ab}{a^2-b^2x^2}$ B. $\frac{b}{ab+x^2}$

C. $\frac{1}{1+x^2}$ D. $\frac{1}{abx^2+1}$

... = 4, b = 3 ধর (ইচ্ছাস্বাধীন) এখন, Calculator এ shift বাটন চেপে ... বাটন চাপলে $\frac{d}{dx}$ (পাবে 1 এখন নিম্নভাবে উঠাও: $\frac{d}{dx}$((tan^{-1} ((4 + 3x) ÷ (3 − 4x)), 0.5)

... সমান (=) বাটন চাপলে 0.8 Answer পাবে।

$\frac{1}{1+x^2} = 0.8$ ∴ Ans. C

... একটি বক্ররেখার সমীকরণ $y = 4x^2$, বক্ররেখাটির x = 2 বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ ... নির্ণয় কর।

For MS

[shift] [∫dx] ([ফাংশনটি])) [,] [x এর প্রদত্ত মান]) [=]

For ES

[shift] [∫□] [ফাংশনটি] (ডান দিকে) x = এ বক্স এর ভিতরে x এর ... মান [=]

For MS

[shift] [∫dx] (4 [Alpha]) [x²]) [,] 2) [=] 16

For ES

[shift] [∫□] 4 [Alpha]) [x²] (ডান দিকে) 2 [=]

... $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) $\frac{2}{1+x^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$ (c) $\frac{1}{1-x^2}$ (d) $\frac{2}{1-x^2}$

... x = 0.2 ধরে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর।

x = 0.2 এর জন্য $\frac{dy}{dx} = 1.923$

... Option গুলোতে x = 0.2 বসালে যে Option টির মান 1.923 বা ... কাছাকাছি আসবে সেটিই Answer।

Option গুলোর মধ্যে-

A → 1.9615 .... B → 1.923 Ans: B

For MS

[shift] [∫dx] ([shift] [tan⁻¹] 2 [alpha] [x] [÷] (1 [−] [alpha] [x] [x²] ... 0.2) [=] 1.923

For ES

[shift] [□/□] [shift] [tan⁻¹] [□/□] 2 [alpha] [x] (নিচের দিক) 1 [−] [alpha] ... (ডান দিকে)) (ডান দিক) 0.2 [=] 1.923

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: অনেকগুলো ফাংশনের গুণ ও ভাগফলের মিশ্রণ

Ex-01 x এর সাপেক্ষে $\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, $y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\left[\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\right]$$

$$\Rightarrow \ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = \frac{4x-4+x+1}{2(x^2-1)} - \frac{3+x+4}{x+4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{5x^2+20x-3x-12-2x^3+2x-14x^2+14}{(x^2-1)(x+4)}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\cdot\frac{2+19x-9x^2-2x^3}{2(x^2-1)(x+4)}$$

$$= \frac{(x+1)(2+19x-9x^2-2x^3)}{2(x+4)^4\sqrt{x-1}\,e^x}$$ **Ans.**

Ex-02 x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}[\ln(1-x) - \ln(1+x+x^2)]$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1+2x}{1+x+x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-x^2-(1+2x)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}}\times\frac{x^2-2x-2}{2(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{x^2-2x-2}{2\sqrt{1-x}\,(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$ **Ans.**

For practice:

01. $\frac{e^{-x}(3x+5)}{7x-1}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{e^{-x}(21x^2+32x+33)}{(7x-1)^2}$

02. $x^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** $x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{x-2x^2+2}{1-x^2}$

03. $\ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{x^2+2}{x^2-1}$

04. $\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{n}{x\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$

Type-02: ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সম্পর্কিত

Ex-01 $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, $y = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+\frac{x-a}{b-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}} \times \frac{(b-x).1+(x-a).1}{(b-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b-x}{b-a} \times \frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-a}} \times \frac{b-a}{(b-x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$ **Ans.**

Ex-02 $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, $y = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} \quad \Rightarrow y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$ **Ans.**

Ex-03 $\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x - \sin x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: $y = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x - \sin x} = \dfrac{3\sin x - 4\sin^3 x}{2\sin x\cos x - \sin x}$

$$= \frac{3-4\sin^2 x}{2\cos x - 1} = \frac{3-4(1-\cos^2 x)}{2\cos x - 1}$$

$$= \frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x - 1} = 2\cos x + 1 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -2\sin x$$ **Ans.**

Ex-04 x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, $y = \tan^{-1}\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)^2} \times \frac{\sqrt{1-4x^2}.4 - 4x.\frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-4x^2}{1-4x^2+16x^2} \times \frac{(1-4x^2)4+16x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= \frac{1-4x^2}{12x^2+1} \times \frac{4-16x^2+16x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}} = \frac{4}{(1+12x^2)\sqrt{1-4x^2}}$$ **Ans.**

Ex-05 x এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}\dfrac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ক[র]

Solⁿ: ধরি, $y = \cos^{-1}\dfrac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}$

$$\Rightarrow y = \cos^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

মনে করি, $x = \tan\theta$ $\therefore \theta = \tan^{-1}x$

$$\Rightarrow y = \cos^{-1}\frac{-(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)}$$

$$\Rightarrow y = \cos^{-1}(-\cos 2\theta) \Rightarrow y = \cos^{-1}\cos(\pi - 2\theta)$$

$$\Rightarrow y = \pi - 2\theta \Rightarrow y = \pi - 2\tan^{-1}x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$$

Ex-06 x এর সাপেক্ষে $\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ এর অন্তরক সহগ নি[র্ণয় কর]

Solⁿ: ধরি, $y = \cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

মনে করি, $x = \cot\theta$ $\therefore \theta = \cot^{-1}x$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}\left(\sqrt{1+\cot^2\theta}-\cot\theta\right)$$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow y = \cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cot^{-1}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Ex-07 $y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় ক[র]

Solⁿ: $y = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right]$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2}}{1+x-1+x}$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

ধরি, $x = \sin\theta$ $\therefore \theta = \sin^{-1}x$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) \Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin^{-1}x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

[illegible] practice:

[illegible] $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

[illegible] $\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** $\text{cosec}x$

[illegible] $\frac{a\sin x + b\cos x}{a\cos x - b\sin x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Ans. $\frac{a^2+b^2}{(a\cos x - b\sin x)^2}$

[illegible] ফাংশনগুলোর x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর:

[illegible] $\text{cosec}2x - \cot 2x)$ **Ans.** 1

[illegible] $\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\}$ **Ans.** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}$

[illegible] $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ **Ans.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$

[illegible] $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **Ans.** $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

[illegible] $\frac{(4x^3-3x)}{e^x}$ **Ans.** $-3e^{-x}\left(\cos^{-1}x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

[illegible] $(x^2\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\sqrt{1-x^4})$ **Ans.** $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

[illegible] $\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$ **Ans.** $\frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$

[illegible] $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+a^4}}$ **Ans.** $\frac{2a^2x}{a^4+x^4}$

[illegible]-03: $\{f(x)\}^{g(x)}$ এই ধরনের ফাংশনের ক্ষেত্রে অন্তরীকরণ

[illegible] $(\text{base})^{\text{Power}}$ যদি Power Variable হয়।

[illegible] $\frac{dy}{dx}=(\text{base})^{\text{Power}}\left\{\text{Power}\frac{d}{dx}\ln(\text{base})+\ln(\text{base})\frac{d}{dx}(\text{Power})\right\}$

[শুধুমাত্র M.C.Q তে প্রযোজ্য]

[illegible] x এর সাপেক্ষে $(\sin x)^{\tan x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[illegible] ধরি, $y=(\sin x)^{\tan x} \Rightarrow y = e^{\ln(\sin x)^{\tan x}} = e^{\tan x.\ln\sin x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x}\frac{d}{dx}[\tan x.\ln(\sin x)]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x}\left[\tan x \times \frac{\cos x}{\sin x} + \sec^2 x \times \ln\sin x\right]$ **Ans.**

[illegible] x এর সাপেক্ষে $(\sin^{-1}x)^x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

[illegible] ধরি, $y=(\sin^{-1}x)^x$

$\Rightarrow y = e^{\ln(\sin^{-1}x)^x} = e^{x\ln(\sin^{-1}x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin^{-1}x)^x\left[\frac{d}{dx}(x\ln\sin^{-1}x)\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin^{-1}x)^x\left[\frac{x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}+\ln\sin^{-1}x\right]$ **Ans.**

[illegible] practice:

[illegible] ফাংশনটির x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর:

[illegible] **Ans.** $x^{\cos^{-1}x}\left[-\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\cos^{-1}x}{x}\right]$

Type-04: অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ

Ex-01 $x^y y^x = 1$ হলে $\frac{dy}{dx}$ বের কর।

Sol: $x^y y^x = 1 \Rightarrow \ln(x^y y^x) = 0 \Rightarrow y\ln x + x\ln y = 0$

$\Rightarrow y.\frac{1}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}+x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y = 0$

$\Rightarrow \left(\ln x+\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}+\ln y\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(y+x\ln y)}{x}\times\frac{y}{y\ln x + x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y(y+x\ln y)}{x(y\ln x+x)} = \frac{-y(y-y\ln x)}{x(x-x\ln y)} = -\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$ **Ans.**

Ex-02 $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$।

Sol^n: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$

উপরোক্ত সমীকরণে, $x=\sin\theta$; $y=\sin\phi$ বসাই

$\sqrt{1-\sin^2\theta}+\sqrt{1-\sin^2\varphi} = a(\sin\theta-\sin\phi)$

$\Rightarrow \cos\theta+\cos\phi = a(\sin\theta-\sin\phi)$

$\Rightarrow a = \frac{2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}$

$\Rightarrow a = \cot\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

$\Rightarrow \theta-\phi = 2\cot^{-1}a$

$\Rightarrow \sin^{-1}x - \sin^{-1}y = 2\cot^{-1}a$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Proved)**

For practice:

নিচের ফাংশনগুলো হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

01. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ **Ans.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

02. $\ln(xy)=x^2+y^2$ **Ans.** $\frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$

03. $e^{xy}-4xy=2$ **Ans.** $-\frac{y}{x}$

04. $x^y+y^x=1$ **Ans.** $-\frac{y^x\ln y+yx^{y-1}}{x^y\ln x+xy^{x-1}}$

05. $y^x=e^{x-y}$ **Ans:** $\frac{y(1-\ln y)}{x-y}$

06. $y^2=\frac{x+y}{x-y}$ **Ans:** $\frac{-2y^2}{n(x^2-y^2)-2xy}$

Type-05: পরামিতিক সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়

Ex-01 $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ বের কর।

Sol^n: $\frac{dx}{dt} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2}; \frac{dy}{dt} = \frac{6at - 3at^4}{(1+t^3)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ **Ans.**

Ex-02 $x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ বের কর।

Sol^n: $x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2};$

$y = \tan^{-1}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{1 - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\theta}{2}}$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \therefore \frac{dy}{d\theta} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$ **Ans.**

For practice:

01. $x = e^\theta\sin\theta, y = e^\theta\cos\theta$ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

02. $y = \tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; x = \sec^{-1}\frac{1}{2t^2-1}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। **Ans.** $-\frac{1}{2}$

Type-06: বিবিধ সমস্যাবলি

Ex-01 $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$f'(0) = \left(2\ln\frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

Sol^n: দেওয়া আছে, $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$

$\Rightarrow \ln f(x) = (a + b + 2x)[\ln(a + x) - \ln(b + x)]$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}.f'(x) = (a + b + 2x)\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\right) + \ln\frac{a+x}{b+x}$

$\therefore f'(x) = f(x)\left[(a+b+2x)\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x}\right) + \ln\frac{a+x}{b+x}\right]$

$\therefore f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}\left[2\ln\frac{a}{b} + (a+b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]$

$\therefore f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}\left[2\ln\frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{ab}\right]$

Ex-02 যদি $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ হয় তবে দেখাও যে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 - 1$

Sol^n: $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - 4.e^x.e^{-x}\right]$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\{(e^x + e^{-x})^2 - 4.e^x.e^{-x}\}$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left\{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right\}^2 - 1$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 - 1$

For practice:

01. $f(x) = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ হলে $f'(0)$ ... কর?

02. $y = 2\sin^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2 + 4x - x^2}$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}$ = ... যখন $x = 2$

03. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$ হলে প্রমাণ কর ... $2y = x\frac{dy}{dx} + \ln\frac{dy}{dx}$

04. যদি $y = \sqrt{1+x^2}\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ হয় তবে দেখাও যে, $(1+x^2)$ ...

Type-07: ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়

$\sin^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

ধরি, $y = \sin^{-1}x$; $z = \tan^{-1}x$ হলে $\frac{dz}{dy}$ নির্ণয় করতে হবে।

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+x^2} \times \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$

$\frac{dz}{dy} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$ Ans.

For practice:

$\cos x$ এর সাপেক্ষে $\ln x$ এর অন্তরক সহগ বের কর। **Ans.** $\frac{1}{x\cos x}$

$\sin^{-1}x$ এর সাপেক্ষে $x^{\sin^{-1}x}$ এর অন্তরক সহগ বের কর।

Ans. $x^{\sin^{-1}x}\left[\ln x + \frac{\sqrt{1-x^2}\,.\sin^{-1}x}{x}\right]$

Type-08: কোন ফাংশন অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হলে তার অন্তরক সহগ নির্ণয়

$y = e^{x+e^{x+e^{x+\cdots\cdots\infty}}}$

$y = e^{x+e^{x+e^{x+\cdots\cdots\infty}}}$

$\Rightarrow \ln y = x + e^{x+e^{x+e^{x+\cdots\cdots\infty}}}$

$\Rightarrow \ln y = x + y$

$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \left(\frac{1-y}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$ **Ans.**

$y = (\ln x)^{(\ln x)^{(\ln x)}\cdots\cdots\infty}$

$y = (\ln x)^{(\ln x)^{(\ln x)}\cdots\cdots\infty}$

$\ln y = \{(\ln x)^{(\ln x)}\cdots\cdots\infty\}\ln(\ln x)$

$\ln y = y\ln(\ln x)$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y.\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + \ln(\ln x)\frac{dy}{dx}$

$\left[\frac{1-y\ln(\ln x)}{y}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x\ln x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x\ln x\,[1-y\ln(\ln x)]}$ **Ans.**

For Practice:

$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \cdots\cdots\infty}}}$ Ans: $\frac{\cos x}{2y-1}$

$y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots\cdots\infty}}}$ Ans: $\frac{y}{2y-x}$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। [13-14, 03-04]

Solve $(\cos x)^y = (\sin y)^x \Rightarrow y\ln\cos x = x\ln\sin y$

$\Rightarrow -y.\frac{\sin x}{\cos x} + \ln\cos x\frac{dy}{dx} = x\frac{\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx} + \ln\sin y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(\ln\cos x - x\cot y) = \ln\sin y + y\tan x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln\sin y + y\tan x}{\ln\cos x - x\cot y}$ **Ans.**

02. x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর : $\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ [09-10]

Solve $y = \sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

$= \sin^4\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$

$= \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^4 = \frac{(1-x)^2}{4} = \frac{(x-1)^2}{4}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2}$ **Ans.**

03. $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [05-06]

Solve ধরি, $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ $\therefore \ln y = \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right\} = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left(\frac{1+\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$ **Ans.**

04. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ কে x-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [04-05, KUET 11-12]

Solve $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$\Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{1+x}{1+y}$

$\Rightarrow x^2 + x^2y = y^2 + xy^2$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = xy(y-x)$

$\Rightarrow (x+y)(x-y) = xy(y-x)$

$\Rightarrow x + y = -xy$

$\Rightarrow y = -\frac{x}{1+x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$ **Ans.**

05. যদি $x^y \cdot y^x = a^2$, হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান বাহির কর। [02-03]

Solve $x^y.y^x = a^2 \Rightarrow y\ln x + x\ln y = 2\ln a$

$\Rightarrow y\frac{1}{x} + \ln x.\frac{dy}{dx} + x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \ln y = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\ln x + \frac{x}{y}\right) = -\left(\ln y + \frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\ln y + \frac{y}{x}}{\ln x + \frac{x}{y}} = -\frac{y\,(x\ln y + y)}{x\,(y\ln x + x)}$ **Ans.**

06. x এর সাপেক্ষে $(x)^{x^x}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [99-00, RUET 08-09]

Solve $y = (x)^{x^x} \therefore \ln y = x^x \ln x$

এখন, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x.\frac{1}{x} + \ln x\frac{d}{dx}(x^x)$

আবার ধরি, $z = x^x \therefore \ln z = x\ln x$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = z\,(1 + \ln x) \therefore \frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + \ln x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{x^x}{x} + \ln x.x^x(1 + \ln x)\right]$

$= (x)^{x^x} x^x\left[\frac{1}{x} + \ln x(1 + \ln x)\right]$ **Ans.**

07. If $y = \tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + \sin x}\right)$, Find $\frac{dy}{dx}$? [97-98, CUET 12-13]

Solve $y = \tan^{-1}\left(\frac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b}\tan x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}(\tan x) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 1 = -1$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. x কে পরিবর্তনশীল ধরে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [06-07, BUET 09-10, RUET 06-07]

A. $y = \tan^{-1}\frac{a + bx}{b - ax}$

Solve $y = \tan^{-1}\frac{a + bx}{b - ax} = \tan^{-1}\frac{\frac{a}{b} + x}{1 - \frac{a}{b}x} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$ **Ans.**

B. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ [CUET 10-11]

Solve $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{\cos\sqrt{x}}{4(\sqrt{\sin\sqrt{x}})(\sqrt{x})}$

02. অন্তরক সহগ নির্ণয় কর: **A.** $\frac{x\ln x}{\sqrt{1 + x^2}}$ [05-06]

Solve ধরি, $y = \frac{x\ln x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{1 + x^2})\left(x\frac{1}{x} + \ln x\right) - x\ln x\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2}$

$= \frac{(1 + x^2)(1 + \ln x) - x^2\ln x}{(1 + x^2)^{1 + \frac{1}{2}}}$

$= \frac{(1 + x^2)(1 + \ln x) - x^2\ln x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 + x^2 + \ln x}{(\sqrt{1 + x^2})^3}$

B. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$ [05-06; BUET 05-06]

Solve ধরি $z = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1$

03. $\tan y = \frac{2t}{1 - t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। [04-05, CU...

Solve $\tan y = \frac{2t}{1 - t^2}$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}\left(\frac{2t}{1 - t^2}\right)$

$= 2\tan^{-1}t$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{2}{1 + t^2}$

এবং $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$

$\Rightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1 + t^2}\right)$

$= 2\tan^{-1}t$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1 + t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$

04. x কে পরিবর্তনশীল ধরে নিচের ফাংশনগুলোর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

(a) $5e^x \ln x$; (b) $\tan^{-1}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

Solve

(a) $\frac{d}{dx}(5e^x\ln x) = 5e^x\frac{1}{x} + 5\ln x.e^x = 5e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

(b) $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)\right\} = \frac{d}{dx}(3\tan^{-1}x) = \frac{3}{1 + x^2}$

... এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান বের কর। [13-14]

Solve: $y=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

... $\tan\theta$; $\theta=\tan^{-1}x$

$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}=\tan^{-1}\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \tan^{-1}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}x$

... অন্তরীকরণ করে, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(1+x^2)}$ **Ans.**

... $= \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}=$?

[09-10, BUET 95-96, KUET 11-12]

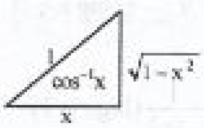
Solve: $y=\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$; Let $x=\cos2\theta \Rightarrow 2\theta=\cos^{-1}x$

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right\}$

$= \sin\{2\tan^{-1}(\tan\theta)\}$

$= \sin(2\theta)=\sin(\cos^{-1}x)$

$= \sin\ \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}$



$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **Ans.**

... $y^x=0$ সমীকরণ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। [07-08]

Solve: $x^y+y^x=0$

$\Rightarrow x^y=-y^x$

... $+e^{x\ln y}=0$

... $\left(y\frac{1}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}\right)+e^{x\ln y}\left(x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y\right)=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{yx^{y-1}+y^x\ln y}{x^y\ln x+xy^{x-1}}=-\frac{\frac{y}{x}x^y+y^x\ln y}{x^y\ln x+\frac{x}{y}y^x}$

$= -\frac{\ldots-x^y\ln y}{\ldots-\frac{x}{y}x^y}=-\frac{\frac{y}{x}-\ln y}{\ln x-\frac{x}{y}}=-\frac{y(y-x\ln y)}{x(y\ln x-x)}$ **Ans.**

04. দেখাও যে, x-এর সাপেক্ষে $\ln\sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ এর অন্তরক সহগ $\frac{2}{3}\text{cosec } x$ [05-06]

Solve: Let, $y=\ln\sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\ln\sqrt[3]{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}$

$= \ln\sqrt[3]{\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{3}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{2}{3}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sin x}=\frac{2}{3}\text{cosec}x$ **(Showed)**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. অন্তরক নির্ণয় কর: $e^{x^2}+x^{x^2}$ [12-13]

Solve: $e^{x^2}+x^{x^2}$ $\therefore \frac{d}{dx}(e^{x^2}+x^{x^2})=2x.e^{x^2}+\frac{d}{dx}(x^{x^2})$

ধরি, $x^{x^2}=y$

$\therefore x^2\ln x=\ln y \Rightarrow x^2\frac{1}{x}+\ln x.2x=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y(x+\ln x.2x)=x^{x^2}.x(1+2\ln x)=x^{x^2+1}(1+2\ln x)$

$\therefore \frac{d}{dx}(e^{x^2}+x^{x^2})=2xe^{x^2}+x^{x^2+1}(1+2\ln x)$ **Ans.**

02. মান নির্ণয় কর : $\frac{dy}{dx}$, যখন $x^ay^b=(x-y)^{a+b}$ [11-12, 10-11, 06-07]

Solve: $x^ay^b=(x-y)^{a+b} \Rightarrow \ln(x^ay^b)=\ln(x-y)^{a+b}$

$\Rightarrow a\ln x+b\ln y=(a+b)\ln(x-y)$

$\Rightarrow \frac{a}{x}+\frac{b}{y}\frac{dy}{dx}=(a+b)\frac{1-\frac{dy}{dx}}{x-y}$ [উভয়পক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\Rightarrow \left(\frac{b}{y}+\frac{a+b}{x-y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{a+b}{x-y}-\frac{a}{x} \Rightarrow \frac{bx-by+ay+by}{y(x-y)}=\frac{ax+bx-ax+ay}{x(x-y)}$

$\Rightarrow \frac{bx+ay}{y(x-y)}\frac{dy}{dx}=\frac{bx+ay}{x(x-y)}\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ **Ans.**

03. মান নির্ণয় কর : $\frac{dy}{dx}$, যখন $y=\cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$ [11-12]

Solve: $y=\cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$

$=\cot^{-1}(\sqrt{1+\cot^2\theta}-\cot\theta)$ ধরি $x=\cot\theta \therefore \theta=\cot^{-1}x$

$=\cot^{-1}(\text{cosec}\theta-\cot\theta)=\cot^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$=\cot^{-1}\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right)=\cot^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$

$=\cot^{-1}\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cot^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(1+x^2)}$ **Ans.**

04. $e^x+e^y=e^{x+y}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। [10-11]

Solve: $e^x+e^y=e^{x+y} \Rightarrow e^x=e^y(e^x-1) \Rightarrow e^y=\frac{e^x}{e^x-1}$

$\Rightarrow y=\ln\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)=\ln e^x-\ln(e^x-1)=x-\ln(e^x-1)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=1-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{-1}{e^x-1}$ **Ans.**

05. যদি $xe^{xy} = y + \sin^2 x$ হয় তবে $x = 0$ এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মান বাহির কর। [10-11; BUET 09-10]

Solve $xe^{xy} = y + \sin^2 x$

$\Rightarrow xe^{xy}\left(1+\frac{dy}{dx}\right) + e^{xy} = \frac{dy}{dx} + 2\sin x \cos x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(xe^{xy} - 1) = \sin 2x - e^{xy} - xe^{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x - e^{xy} - xe^{xy}}{xe^{xy} - 1}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{\sin 2x - e^{xy} - xe^{xy}}{xe^{xy} - 1}\right)_{x=0} = \frac{0 - e^0 - 0}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$ **Ans.**

06. যদি $x^2 = 5y^2 + \sin y$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ কত হবে? [06-07]

Solve $x^2 = 5y^2 + \sin y \Rightarrow 2x = 10y\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(10y + \cos y) = 2x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos y + 10y}$ **Ans.**

07. অন্তরক নির্ণয় কর: $\cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ [05-06]

Solve $\cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)\right\} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ **Ans.**

08. মান নির্ণয় কর: $\frac{dy}{dx}$, যখন $x^y = y^x$ [04-05, BUET 10-11]

Solve $x^y = y^x \Rightarrow y\ln x = x\ln y$

$\Rightarrow y\frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}\ln x = 1.\ln y + x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} = \frac{y}{x}\frac{x\ln y - y}{y\ln x - x}$

$= \frac{y}{x}\frac{y\ln x - y}{x\ln y - x} = \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{\ln x - 1}{\ln y - 1}\right)$ **Ans.**

09. অন্তরক নির্ণয় কর: $\log(\sin^{-1}x)\cos^{-1}x$. [04-05]

Solve ধরি, $y = \log(\sin^{-1}x)\cos^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \log(\sin^{-1}x) \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \cos^{-1}x\frac{1}{\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{\cos^{-1}x}{\sin^{-1}x} - \log(\sin^{-1}x)\right\}$ **Ans.**

10. মান নির্ণয় কর: $\frac{dy}{dx}$, যখন $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ [03-04]

Solve $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^{1/3}}\right\} = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$= \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ **Ans.**

11. অন্তরক নির্ণয় কর: $a^{\sin^{-1}x}$ [03-04]

Solve $\frac{d}{dx}(a^{\sin^{-1}x}) = a^{\sin^{-1}x}\ln a\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. যদি $y = x^{\ln x}$ হয়, তবে $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ হবে- [12-13]

A. $\frac{2\ln x}{x}$ B. $\frac{y}{x}(2\ln x)$ C. $2\ln x$ D. $2y\ln x$

Ans C **Solve** $y = x^{\ln x} \therefore \ln y = \ln x . \ln x = (\ln x)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\ln x$

02. যদি $f(x) = 2^{-4x}$ হয়, তবে $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ এর মান হবে- [...]

A. $-4 \times 2^{-4x}\log_e 2$ B. $4 \times 2^{-4x}\log_e 2$
C. $2^{-4x}\log_e 2$ D. $-4 \times 2^{-4x-1}$

Ans A **Solve** $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dx}(f(x)) = -4.2^{-4x}\ldots$

03. যদি $y = \sin^{-1}\left[\frac{4\sqrt{x}}{1+4x}\right]$ হয়, তাহলে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,2)}$ এর মান হচ্ছে- [...]

A. 4 B. $\frac{1}{17}$ C. $\frac{1}{9}$ D. None

Ans B **Solve** $y = \sin^{-1}\left(\frac{4\sqrt{x}}{1+4x}\right) = 2\tan^{-1}(2\sqrt{x})$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+4x}.2.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,2)} = \frac{2}{\sqrt{4}(1+4.4)} = \frac{1}{1+16} = \frac{1}{17}$

04. যদি $y = x^{-1/x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান হবে। [07-08]

A. $x^{-2+\frac{1}{2}}(\log x - 1)$ B. $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\log x - 1)$

C. $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\log x + 1)$ D. $x^{2-\frac{1}{x}}(1 - \log x)$

Ans B **Solve** $y = x^{-1/x} \therefore \ln y = -\frac{1}{x}\ln x$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln x.\frac{1}{x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{\ln x - 1}{x^2}\right) = x^{-1/x}.\frac{\ln x - 1}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{1}{x}+2}}(\ln x - 1)$

05. যদি $x = a(\theta - \sin\theta)$ এবং $y = a(1 + \cos\theta)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান হবে- ...

A. $-\cot\frac{\theta}{2}$ B. $-\sin\theta$ C. $1 - \cos\theta$ D. $-\tan\ldots$

Ans A **Solve** $x = a(\theta - \sin\theta)$ | $y = a(1 + \cos\theta)$

$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a - a\cos\theta$ | $\therefore \frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$

$\therefore \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin\theta}{a - a\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \ldots$

[illegible] এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

[illegible] $\sin^2 x$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? [17-18]

B. $(\sin x)^{\sin^2 x-1}$ C. $2(\sin x)^{\cos^2 x-1}$
E. $\cot x$

[illegible] D Solve $y = \log_{\sin x} \sin^2 x = 2 \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

[illegible] হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [16-17]

[illegible] $(1+\ln y)$ B. $\frac{y}{x+y}(1-\ln y)$ C. $\frac{y}{x-y}(1+\ln y)$

[illegible] $(1-\ln y)$ E. $\frac{y}{x-y}(\ln y-1)$

[illegible] D Solve $x \ln y = x + y$

[illegible] $+ \ln y = 1 + y_1$

[illegible] $- y_1 = 1 - \ln y$

[illegible] $\left(\frac{x}{y}-1\right) = 1 - \ln y$

[illegible] $\frac{y}{x-y}(1-\ln y)$

[illegible] $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^{[illegible]}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [15-16]

[illegible] B. $\frac{1}{nx}(\log_e x - 1)$ C. $\frac{1}{nx}(\log_e x - 2)$

[illegible] $\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\log_e x-1}{x^2}\right)\right]$ E. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{nx}}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\log_e x-3}{x^2}\right)\right]$

[illegible] D Solve $y = x^{-\frac{1}{nx}}$

[illegible] $x^{-\frac{1}{nx}} \frac{d}{dx}\left(-\frac{\ln x}{nx}\right)$

[illegible] $\left(-\frac{nx.\frac{1}{x} - n\ln x}{n^2x^2}\right) = x^{-\frac{1}{nx}}\left(\frac{\ln x - 1}{n.x^2}\right) = x^{-\frac{1}{nx}}\left(\frac{\log_e x - 1}{n.x^2}\right)$

[illegible] $\left(\frac{\log_e x - 1}{n.x^2}\right)$

[illegible] $= x\sin(a+y)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [14-15]

[illegible] B. $\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ C. $\frac{\sin 2(a+y)}{\cos a}$

[illegible] E. $\frac{\sin^2(a+y)}{\cos y}$

[illegible] B Solve $\sin y = x \sin(a+y)$

$\Rightarrow x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)} = \frac{\sin(a+y-a)}{\sin(a+y)}$

[illegible] $\frac{[illegible] \cos a - \cos(a+y)\sin a}{\sin(a+y)} = \cos a - \cot(a+y)\sin a$

[illegible] $\operatorname{cosec}^2(a+y)\sin a = \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

[illegible] $2x + e^{2\log\cos 2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [13-14]

B. -1 C. 1 D. -2 E. 2

[illegible] A Solve $y = \sin^2 2x + e^{2\log\cos 2x}$

[illegible] $+ e^{\log(\cos^2 2x)} = \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) = 0$

06. যদি $y = \tan^{-1}\frac{p+qx}{q-px}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [11-12]

A. $1+7x$ B. $2+5x$ C. $\frac{1}{1+x^2}$ D. $\frac{2}{1-x^2}$ E. $\frac{7}{1+x^2}$

Ans C Solve দেওয়া আছে, $y = \tan^{-1}\frac{p+qx}{q-px} = \tan^{-1}\frac{\frac{p}{q}+x}{1-\frac{p}{q}x}$

$= \tan^{-1}\left(\frac{p}{q}\right) + \tan^{-1}x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

07. $y + x = x^{-y}$ সমীকরণ হইতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [10-11]

A. $\frac{x^2+2y}{2x+\log x}$ B. $\frac{x+2y+5}{(x+y)+\log x}$ C. $\frac{xy+y^2+1}{x+\log x}$

D. $-\frac{xy+x+y^2}{x[1+(x+y)\log x]}$ E. $-\frac{x+xy-y^2}{x^2[(x+y)\log x]}$

Ans D Solve $x + y = x^{-y} \Rightarrow \ln(x+y) = -y\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = -y\frac{1}{x} - \ln x\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x+y}+\ln x\right) = -\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y+x}\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{y^2+xy+x}{x(x+y)}}{\frac{(x+y)\ln x+1}{x+y}} = -\frac{y^2+xy+x}{x[1+(x+y)\ln x]}$

08. যদি $x^y = e^{x-y}$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান হবে- [08-09]

A. $\frac{1}{(1+\ln x)^2}$ B. $\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ C. $\frac{(1+\ln x)^2}{\ln x}$

D. $\frac{(1+\ln x)^2}{(\ln x)^2}$ E. $\frac{1}{\ln x}$

Ans B Solve $x^y = e^{x-y} \Rightarrow y\ln x = x - y$

$\Rightarrow y.\frac{1}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{\ln x+1} = \frac{x-y}{x(\ln x+1)} = \frac{x-\frac{x}{(\ln x+1)}}{x(\ln x+1)} = \frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}$

09. মান নির্ণয় কর: $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right\}$. [07-08]

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $-\frac{1}{2}$ E. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Ans D Solve $\frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right\}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $xy + x^2y^2 = c$ সমীকরণটির $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে? [15-16]

A. $-\frac{x}{y}$ B. $\frac{x}{y}$

C. $\frac{y}{x}$ D. None of them

Ans D Solve $xy + x^2y^2 = c$

$\Rightarrow y + x\frac{dy}{dx} + 2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow (x + 2x^2y)\frac{dy}{dx} = -(y + 2xy^2)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2xy^2}{x + 2x^2y} = -\frac{y(1+2xy)}{x(1+2xy)} = -\frac{y}{x}$

02. যদি $x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ এবং $y = \tan^{-1}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [14-15]

A. –1 B. 1 C. ± 1 D. 0

Ans A Solve $x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2}$

$$y = \tan^{-1}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} = \tan^{-1}\frac{1 - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \therefore \frac{dy}{d\theta} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -1$

03. যদি $y = \tan^{-1}\frac{5+6x}{6-5x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [13-14]

A. $\frac{1}{1+x^2}$ B. $-\frac{1}{1+x^2}$ C. $\frac{5}{6(1+x^2)}$ D. None

Ans A Solve $y = \tan^{-1}\frac{5+6x}{6-5x} = \tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}+x}{1-\frac{5}{6}x}$

$\therefore y = \tan^{-1}\frac{5}{6} + \tan^{-1}x$ এবার অন্তরীকরণ করে, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

04. যদি $y = 10^{\ln\sin x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [11-12]

A. $10^{\ln\sin x}\ln 10\cos x$ B. $10^{\ln\sin x}\ln 10.\frac{1}{\sin x}$

C. $10^{\ln\sin x}\ln 10$ D. None of these

Ans D Solve $y = 10^{\ln\sin x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 10^{\ln\sin x}\ln 10.\frac{\cos x}{\sin x} = 10^{\ln\sin x}\ln 10\cot x$

05. অন্তরীকরণ নির্ণয় কর: $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{(5x^2-4)}$ [10-11]

A. $\frac{x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)}}$ B. $\frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}$

C. $\frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}$ D. None of these

Ans C Solve $\frac{d}{dx}\left\{\sqrt[3]{5x^2-4}\right\} = \frac{1}{3}(5x^2-4)^{-2/3}\,10x$

$= \frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}$

06. যদি $y = e^{\sin^{-1}x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে? [09-10]

A. $(\sqrt{1-x^2})e^{\sin^{-1}x}$ B. $\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{e^{\sin^{-1}x}}$ D. None of these

Ans B Solve $\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x)] = ?$ [14-15]

A. 0 B. –1 C. 1 D. 2 E. –2

Ans E Solve $\frac{d}{dx}\{\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x)\}$

$= \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} + \frac{d}{dx}\left\{\cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -1 - 1 = -2$

02. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর যেখানে $y = \sqrt{\sec x}$. [13-14]

A. $\frac{y\tan x}{2}$ B. $\frac{\tan x}{2}$ C. $\cot x$ D. $\frac{\cot x}{2}$ E. None

Ans A Solve $y = \sqrt{\sec x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec x.\tan x}{2\sqrt{\sec x}} = \frac{\sqrt{\sec x}}{2}\tan x = \frac{y}{2}\tan x$

SELF TEST : Written

অন্তরক নির্ণয় কর:

01. $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

02. $\frac{e^x + \ln(x)}{\log_a x}$ Ans. $\frac{\left(e^x + \frac{1}{x}\right)\log_a x - (e^x + \log ...}{(\log_a x)^2}$

03. $\frac{x^n + \cot x}{e^x - \tan x}$

Ans. $\frac{(nx^{n-1} - \mathrm{cosec}^2 x)(e^x - \tan x) - (e^x - \sec^2 x)(x^n ...}{(e^x - \tan x)^2}$

04. $(\cot x)^{\tan x}$ Ans. $(\cot x)^{\tan x}.\sec^2 x\{\ln(\cot ...$

05. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

SELF TEST: [MCQ]

[illegible] $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\Big) = ?$

[illegible] $\log_e 10$ B. $\operatorname{cosec}x.\log_{10}e$ C. $\cos x \log_e 10$ D. None

[illegible] $\frac{1-e^{2x}}{1-e^{2x}}\Big) = ?$ [illegible]

[illegible] $\frac{4e^{2x}}{(1-e^{2x})^2}$ B. $\frac{16e^{2x}}{(2+2e^{2x})^2}$

[illegible] $\frac{16e^{2x}}{(2-2e^{2x})^2}$ D. $\frac{4e^{2x}}{(1-e^{x})^2}$

[illegible] $(\sin x)$ হলে-

[illegible] $\sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} = -1$ B. $\sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} = 1$

[illegible] $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\sin^2 x}$ D. $\frac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{cosec} x$

[illegible] $) = ?$

[illegible] $\tan 5x \cos^2 5x$ B. $10 \tan 5x \sec^2 5x$

[illegible] $\tan 5x$ D. $10 \tan 5x \operatorname{cosec}^2 5x$

[illegible] $\sin^{-1}\frac{6x}{1+9x^2}\Big) = ?$

[illegible] $+9x^2)^{-1}$ B. $\frac{6}{1+6x^2}$ C. $\frac{3}{1+9x^2}$ D. $\frac{6}{1+x}$

[illegible] $\sqrt{\frac{x}{y}} = 6$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

[illegible] $\frac{17y+x}{y-17x}$ B. $\frac{17y-x}{y+17x}$ C. $\frac{17y-x}{y-17x}$ D. None

[illegible] $\frac{1}{x^5 \sec x}\Big) = ?$

[illegible] $\frac{\ldots \sin x + 4\cos x}{x^6}$ B. $\frac{x\sin x + \cos x}{x^5}$

[illegible] $\frac{\ldots \sin x + 4\cos x}{x^5}$ D. $\frac{-(x\sin x + 4\cos x)}{x^5}$

[illegible] $(\ln x^2 . 2^x) = ?$

[illegible] $+ \ln^2$ [illegible] B. $2^{x+1}\left(\frac{1}{x} + \ln 2 . \ln x\right)$

[illegible] $\ln 2 + \frac{2}{x}$ D. $\frac{2}{x \ln 2}$

[illegible] $= 0$ হবে কখন? যেখানে, c, f(x)-এর funtion নয়।

[illegible] $a = b$ হলে B. $b > a$ হলে

[illegible] $b < a$ হলে D. সবসময়

[illegible] $\{\ln (ax)^x\} = ?$

[illegible] B. $\ln (ax)$ C. $1/a$ D. $1 + \ln (ax)$

11. $\frac{dx^n}{de^x} = \frac{1024}{e^2}$ হলে, n ও x = ?

A. 2, 8 B. 8, 2 C. 2, 7 D. 7, 2

12. $\sqrt{x}$ এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ এর অন্তরজ সহগ কত?

A. $\frac{1}{1+x}$ B. $-\frac{2}{1+x}$

C. $\frac{1}{1+x^2}$ D. $\frac{-2}{1+x^2}$

13. $\sin (x+y) = \ln (x+y)$, $\frac{dy}{dx} = ?$

A. 2 B. –2 C. 1 D. –1

14. $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{ax}}$; $\frac{dy}{dx} = ?$

A. $\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$ B. $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

C. $-\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$ D. $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

15. $y = \cos 3x^\circ$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

A. $-\frac{\pi}{60}\cos\frac{\pi x}{60}$ B. $-\sin 3x$ C. $-\frac{\pi}{60}\sin\frac{\pi x}{60}$ D. $\frac{\pi}{60}\cos\frac{\pi x}{60}$

16. যদি $y = f(t)$ হয় এবং $t = f(x)$ হয়, তাহলে কোনটি ঠিক?

A. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ B. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dy}}$ C. $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ D. সবগুলো

17. $f(x^5) = x^{15}$ হলে, $f''(16) = ?$

A. 6 B. 9 C. 0 D. 12

18. $\frac{dx^8}{dx^2} = 32$ হলে, x = ?

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 8 D. $2\sqrt{2}$

19. $y = \sin^{-1}(x^2 - 7x + 12) + \sec^{-1}\left\{\frac{1}{(x-3)(x-4)}\right\}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

A. 0 B. 1

C. $\frac{1}{\sqrt{1-(x-3)^2(x-4)^2}}$ D. none

20. যদি $\frac{d\{f(ax)\}}{dx} = af(ax)$ হয়, তবে f(x) = ?

A. e^{ax} B. e^x

C. both D. none

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

20.B	19.A	18.B	17.C	16.D	15.C	14.C	13.D	12.B	11.B
10.D	09.D	08.B	07.D	06.D	05.A	04.B	03.A	02.C	01.B

[৩য় অংশ]

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ

গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি:

- $y = f(x)$ এই ফাংশনকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে যে অন্তরক সহগ পাওয়া যায় তাকে প্রথম অন্তরক সহগ বলা হয়। এই অন্তরক সহগকে y_1 বা $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ দ্বারা সূচিত করা যায়। প্রথম অন্তরক সহগকে আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে দ্বিতীয় অন্তরক সহগ পাওয়া যায়। ইহাকে y_2 বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা $f''(x)$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়। এভাবে বারবার অন্তরক সহগ পাওয়া যায়। একে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ বলা হয়।

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- $y = x^n$ হলে $y_n = n!$ এবং $y_{n+1} = y_{n+2} = ---- = 0$
- $y = (ax+b)^m$ হলে এবং
  (i) $m > n$ হলে $y_n = \frac{m!}{(m-n)!}a^n.(ax+b)^{m-n}$
  (ii) $m = n$ হলে, $y_n = n.\ a^n$
  (iii) $m < n$ হলে, $y_n = 0$
- $y = e^{ax}$ হলে $y_n = a^n e^{ax}$
- $y = \sin ax$ হলে $y_n = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$
  এবং $y = \sin x$ হলে, $y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$
- $y = \cos ax$ হলে $y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$
  এবং $y = \cos x$ হলে, $y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$
- $y = \ln(ax+b)$ হলে $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
- $y = \ln(x+a)$ হলে $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$
- $y = \frac{1}{ax+b}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!.a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
- $y = \frac{1}{x+a}$ হলে, $y_n = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
- $y = e^{ax}\sin(bx+c)$ হলে,
  $y_n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{ax}\sin(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a})$
- $y = e^{ax}\cos(bx+c)$ হলে,
  $y_n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{ax}\cos(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a})$
- $y = x^{n-1}\ln x$ হলে, $y_n = \frac{n!}{x}$

বিভিন্ন ফাংশনের n তম অন্তরক সহগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে উপরোক্ত সূত্রগুলো মুখস্থ রাখলে সহজে ঐ ফাংশনের n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায় নতুবা ভুল হতে পারে।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: বিভিন্ন ফাংশনের n তম অন্তরক সহগ নি...

Ex-01 $y = \sqrt{x}$ হলে এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: $y = \sqrt{x} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{1-\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{\frac{-3}{2}} = (-1)^1\frac{1}{2^2.x^{2-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow y_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{\frac{-5}{2}} = (-1)^2\frac{1.3}{2^3x^{3-\frac{1}{2}}}$$

- - - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - - -

$$\therefore y_n = (-1)^{n-1}\frac{1.35 --- (2n-3)}{2^n x^{n-\frac{1}{2}}}$$

Ex-02 $\ln\frac{a-x}{a+x}$ এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, $y = \ln\frac{a-x}{a+x} \Rightarrow y = \ln(a-x) - \ln(a+x)$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-1}{a-x} - \frac{1}{a+x}$$

$$\therefore y_n = -\frac{(n-1)!}{(a-x)^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(a+x)^n}$$ [সূত্রানুযায়ী]

$$= (n-1)!\left[\frac{(-1)^n}{(a+x)^n} - \frac{1}{(a-x)^n}\right]$$

Ex-03 sin3x cos2x এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, $y = \sin 3x \cos 2x \Rightarrow y = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$

$$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left\{5^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\right\}$$ [সূত্রানু...]

Ex-04 $y = e^{ax}\sin(bx+c)$ এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর...

Sol^n: $y = e^{ax}\sin(bx+c) \Rightarrow y_1 = e^{ax}[a\sin(bx+c) + b\cos(b...$

মনে করি, $a = r\cos\theta$; $b = r\sin\theta$. $\therefore a^2 + b^2 = r^2$ এবং $\theta = ...$

$$\therefore y_1 = e^{ax}[r\sin(bx+c)\cos\theta + r\cos(bx+c)\sin\theta]$$
$$= r\,e^{ax}\sin(bx + c + \theta)$$
$$\Rightarrow y_2 = r^2e^{ax}\sin(bx + c + 2\theta) \Rightarrow y_3 = r^3e^{ax}\sin(bx + c ...$$
$$\therefore y_n = r^n e^{ax}\sin(bx + c + n\theta)$$
$$= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{ax}\sin\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

বিশেষ ক্ষেত্রঃ যদি $c = 0$ অর্থাৎ $y = e^{ax}\sin bx$ হয় তবে

$$y_n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n e^{ax}\sin\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

[illegible] practice:

[illegible] তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

[illegible] এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Ans: $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)-2^{2n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$

[illegible] cos x এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Ans. $\frac{1}{2}\left\{3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right\}$

$\frac{x^2+1}{[illegible](x-2)(x-3)}$ এর n তম অন্তরক সহগ বের কর।

Ans. $(-1)^n n!\left\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{5}{(x-2)^{n+1}}+\frac{5}{(x-3)^{n+1}}\right\}$

[illegible] এর n তম অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

Ans. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

Type-02: ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণ গঠন

[illegible] $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, দেখাও যে, $y_2(1+x^2) = (1-2x)y_1$

[illegible] $\Rightarrow y_1 = e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}$

[illegible] $(1+x^2)y_1 = e^{\tan^{-1}x} = y \Rightarrow (1+x^2)y_2 + y_1(2x) = y_1$

[illegible] $(1+x^2)y_2 = (1-2x)y_1$ **(Showed)**

[illegible] $y = A\cos3x + B\sin3x + \frac{1}{2}x\sin3x$ হলে দেখাও যে,

$y_2 + 9y = 3\cos3x$

[illegible] $y_1 = -3A\sin3x + 3B\cos3x + \frac{1}{2}(3x\cos3x + \sin3x)$

[illegible] $y_2 = -9A\cos3x - 9B\sin3x + \frac{3}{2}(\cos3x - 3x\sin3x) + \frac{3}{2}\cos3x$

[illegible] $y_2 = -9A\cos3x - 9B\sin3x + \frac{3}{2}\cos3x - \frac{9}{2}x\sin3x + \frac{3}{2}\cos3x$

[illegible] $y_2 = 3\cos3x - 9\left(A\cos3x + B\sin3x + \frac{1}{2}\sin3x\right)$

[illegible] $y_2 = 3\cos3x - 9y \therefore y_2 + 9y = 3\cos3x$ **(Showed)**

[illegible] যদি $\cos\sqrt{y} = x$ হয় তবে দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

[illegible] দেওয়া আছে, $\cos\sqrt{y} = x$

[illegible] $y = (\cos^{-1}x)^2$

[illegible] $\frac{dy}{dx} = 2\cos^{-1}x \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

[illegible] $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = -2\cos^{-1}x \Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(\cos^{-1}x)^2$

[illegible] $(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$

[illegible] $2(1-x^2)\frac{dy}{dx}\times\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\frac{dy}{dx}$

[illegible] $(1-x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2 = 0$ **(Showed)**

Ex-04 $y = e^{ax}\sin bx$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0$

Sol^n: $y = e^{ax}\sin bx$

$\Rightarrow e^{-ax}y = \sin bx \Rightarrow e^{-ax}y_1 - ae^{-ax}y = b\cos bx$

$\Rightarrow e^{-ax}y_2 - ae^{-ax}y_1 + a^2e^{-ax}y - ae^{-ax}y_1 = -b^2\sin bx$

$\Rightarrow e^{-ax}(y_2 - 2ay_1 + a^2y) = -b^2(e^{-ax}y)$

$\Rightarrow y_2 - 2ay_1 + a^2y = -b^2y$

$\therefore y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0$ **(Showed)**

Ex-05 $y = \sqrt{4+3\sin x}$ হলে দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$

Sol^n: $y^2 = 4 + 3\sin x$

$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 3\cos x \Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -3\sin x$

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = -3\sin x + 4 + 3\sin x$

$\therefore 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ **(Showed)**

Ex-06 $y = e^{m\cos^{-1}x}$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = m^2y$

Sol^n: $y = e^{m\cos^{-1}x}$

$\Rightarrow y_1 = -me^{m\cos^{-1}x}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1 = -me^{m\cos^{-1}x}$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_2 + y_1\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = m^2e^{m\cos^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = m^2y$ **(Showed)**

Ex-07 $p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ হলে প্রমাণ কর যে, $p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$

Sol^n: দেয়া আছে, $p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ -----------(i)

$\Rightarrow p^2 = (a^2-b^2)\cos^2\theta + b^2 \Rightarrow p^2 - b^2 = (a^2-b^2)\cos^2\theta$

$\therefore 2p\frac{dp}{d\theta} = -(a^2-b^2)\,2\sin\theta\cos\theta = (b^2-a^2)\sin2\theta$ --- (ii)

$\Rightarrow p\frac{d^2p}{d\theta^2} + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = (b^2-a^2)(2\cos^2\theta - 1)$ ------- (iii)

(ii) নং হতে, $\frac{dp}{d\theta} = \frac{b^2-a^2}{2p}\sin2\theta$

$\Rightarrow \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = \frac{(b^2-a^2)^2\sin^2 2\theta}{4p^2} = \frac{(b^2-a^2)^2}{4p^2}(2\sin\theta\cos\theta)^2$

$= \frac{(b^2-a^2)^2}{4p^2}4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) = \frac{(b^2-a^2)^2}{p^2}\times\frac{p^2-b^2}{a^2-b^2}\left(1-\frac{p^2-b^2}{a^2-b^2}\right)$

$= \frac{p^2a^2 - p^4 - a^2b^2 + b^2p^2}{p^2}$

(iii) নং হতে,

$p\frac{d^2p}{d\theta^2} + \frac{p^2a^2 - p^4 - a^2b^2 + b^2p^2}{p^2} = (b^2-a^2)\left[2\times\frac{p^2-b^2}{a^2-b^2} - 1\right]$

$\Rightarrow p\frac{d^2p}{d\theta^2} = a^2 + b^2 - 2p^2 - \frac{p^2a^2 - p^4 - a^2b^2 + b^2p^2}{p^2}$

$\Rightarrow p\frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^2} - p^2 \quad \therefore p^2 + p\frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^2}$

অর্থাৎ $p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$ **(Proved)**

Ex-08 $(a+bx)e^{y/x}=x$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$

Solⁿ: উভয়দিকে লগারিদম ব্যবহার করে পাই, $\ln(a+bx)+\frac{y}{x}=\ln x$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\ln x-\ln(a+bx) \quad \Rightarrow \frac{y}{x}=\ln\frac{x}{a+bx}$$

$$\Rightarrow \frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=\frac{a+bx}{x}\cdot\frac{a+bx-xb}{(a+bx)^2}\Rightarrow x\frac{dy}{dx}-y=\frac{ax}{a+bx} \quad \text{......(i)}$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=\frac{(a+bx)a-ax.b}{(a+bx)^2}\Rightarrow x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2x^2}{(a+bx)^2}$$

$$\Rightarrow x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$$ [(i) নং হতে] **(Proved)**

For practice:

01. $y=(p+qx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=0$

02. $y=\frac{\ln x}{x}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

03. $y=A\sin mx+B\cos mx$ হলে, দেখাও যে, $y_2+m^2y=0$

04. $y=(e^{-x}+e^x)\sin x$ হলে, $\frac{d^4y}{dx^4}+4y=?$

05. $y=px+\frac{q}{x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2y_2+xy_1=y$

06. $y=ax\sin x$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2-2xy_1+(x^2+2)y=0$

07. $y=\sin(\sin x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\tan x+y\cos^2x=0$

08. $y=(\sin^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2$

09. $y=\tan x+\sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2=\frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

10. $y=\tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_1=m(1+y^2)$

11. $y=\tan^{-1}x^2$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^4)y_2+4x^3y_1=2$

12. $y=a\sin(\ln x)$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2+xy_1+y=0$

13. $y=a\sin(\ln x)+b\cos(\ln x)$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2+xy_1+y=0$

14. $x=\sin(\ln y)$ হলে, দেখাও যে, $(1-x_2)y_2-xy_1-y=0$

15. $x=\tan(\ln y)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$

16. $y=A\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+B\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n$ হলে,
প্রমাণ কর যে, $(x^2-1)y_2+xy_1-n^2y=0$

17. $y=\sin x\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cot x$

18. $y=\ln\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right]$ হলে, দেখাও যে, $(a^2+x^2)y_2+xy_1=0$

19. $y=ax^2+\frac{b}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x^2y_2-xy_1-2y=0$

20. $y=x^3\ln x$ হলে, দেখাও যে, $y_4=\frac{6}{x}$

21. $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0$

Type-03: পরামিতিক ফাংশনের দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরক সহগ নির্ণয়

Ex-01 $x=a(\theta+\sin\theta)$ এবং $y=a(1-\cos\theta)$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ ...
মাধ্যমে প্রকাশ কর।

Solⁿ: $x=a(\theta+\sin\theta)$; $y=a(1-\cos\theta)$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta}=a(1+\cos\theta);\ \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dx}=a\sin\theta\times\frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\tan\frac{\theta}{2}\quad \therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2a\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{4a}\sec^4\frac{\theta}{2}$$

Ex-02 $y=\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(2x^2-1)y_1+x(x^2-$ ...

Solⁿ: $y=\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}=\sec^{-1}x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow y_1=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{x^2-1}\,y_1=1$$

$$\Rightarrow x^2(x^2-1)y_1^2=1$$

$$\Rightarrow (x^4-x^2)y_1^2=1$$

$$\Rightarrow (x^4-x^2)2y_1y_2+(4x^3-2x)y_1^2=0$$

$$\Rightarrow 2xy_1[x(x^2-1)y_2+(2x^2-1)y_1]=0$$

$$\therefore (2x^2-1)y_1+x(x^2-1)y_2=0$$

For practice:

01. $x=\cos t$, $y=\ln t$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ হব...

02. $x=\sin t$ এবং $y=\sin pt$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}$ ...

03. $2x=t+\frac{1}{t}$ ও $2y=t-\frac{1}{t}$ হলে দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{8t^3}{(t^2-1)\ldots}$

04. $y=\sin(x+y)$ হলে দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)\ldots}$

05. $y=(\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\cdots\infty}}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\ldots}{1-y\ldots}$

...ET, KUET, CUET & RUET

[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

...এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... $\sqrt{1+x^2})^m$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-m^2y=0$ ।
... $x=0$ বিন্দুতে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান বের কর । [17-18]

... $=(x+\sqrt{1+x^2})^m$

... $=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{m(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{x^2+1}}$

... $\sqrt{1+x^2}\;y_1=m(x+\sqrt{1+x^2})^m$

... $y_2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y_1=\frac{m^2(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})$

... $x^2)y_2+xy_1=m^2(x+\sqrt{1+x^2})^m=m^2y$

... $x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-m^2y=0$ ....(1) (Proved)

... $\left[(x+\sqrt{1+x^2})^m\right]_{x=0}=1$

... $=\left[\frac{m(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}}\right]_{x=0}=m$

... নং সমীকরণে $x=0$

... $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}+0-m^2(y)_0=0$

... $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=m^2(y)_0=m^2$

... কে আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

... $\frac{d^3y}{dx^3}+2x\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-m^2\frac{dy}{dx}=0$

... $x^2)\frac{d^3y}{dx^3}+3x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-m^2)\frac{dy}{dx}=0$ .... (2)

... সমীকরণে $x=0$ বসালে,

... $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}+(1-m^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0$

... $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=(m^2-1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=m(m^2-1)$

... বিন্দুতে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান $=m(m^2-1)$ **Ans.**

... (x) এবং $x=\frac{1}{z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{d^2f}{dx^2}=z^4\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}$

... $x=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{dx}{dz}=-\frac{1}{z^2}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=-z^2$

... $\frac{df}{dx}=-z^2\frac{dy}{dz}$

... $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(-z^2\frac{dy}{dz}\right)(-z^2)$

... $\left(-z^2\frac{d^2y}{dz^2}\right)(-z^2)=z^4\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}$ **(Showed)**

03. $y^m+y^{-m}=2x$ হলে $m^2(x^2-1)y_2+m^2.xy_1-y=?$ [15-16]

Solve $y^m+y^{-m}=2x$

$\Rightarrow y^{2m}+1=2xy^m\Rightarrow y^{2m}-2xy^m+1=0$

$\Rightarrow y^m=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2-1}$

$\Rightarrow y=(x\pm\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{m}}$

$\Rightarrow y_1=\frac{1}{m}(x\pm\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{m}-1}\left(1\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$\Rightarrow my_1=\pm\frac{(x\pm\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{m}-1}(x\pm\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}}$

$\Rightarrow my_1\sqrt{x^2-1}=\pm(x\pm\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{m}}=\pm y$

$\Rightarrow m^2y_1^2(x^2-1)=y^2$

$\Rightarrow 2m^2y_1y_2(x^2-1)+2xm^2y_1^2=2yy_1$

$\therefore m^2y_2(x^2-1)+m^2xy_1-y=0$ **Ans.**

04. যদি $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m+(x+\sqrt{1+x^2})^{-m}$ হয় তবে $(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y$ এর মান নির্ণয় কর । [14-15]

Solve $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m+(x+\sqrt{1+x^2})^{-m}$

$\Rightarrow y_1=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$-m(x+\sqrt{1+x^2})^{-m-1}\left(1+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\Rightarrow y_1=m(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\frac{(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$

$-m(x+\sqrt{1+x^2})^{-m-1}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\;y_1=m(x+\sqrt{1+x^2})^m-m(x+\sqrt{1+x^2})^{-m}$

$\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\;y_2+y_1\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\times2x$

$=m^2(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$+m^2(x+\sqrt{1+x^2})^{-m-1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\;y_2+\frac{xy_1}{\sqrt{1+x^2}}=m^2(x+\sqrt{1+x^2})^{m-1}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$+m^2(x+\sqrt{1+x^2})^{-m-1}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\Rightarrow(1+x^2)y_2+xy_1=m^2(x+\sqrt{1+x^2})^m+m^2(x+\sqrt{1+x^2})^{-m}$

$\Rightarrow(1+x^2)y_2+xy_1=m^2\{(x+\sqrt{1+x^2})^m+(x+\sqrt{1+x^2})^{-m}\}$

$\Rightarrow(1+x^2)y_2+xy_1=m^2y$

$\Rightarrow(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=0$ **Ans.**

05. যদি $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\right)^n$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \quad [10\text{-}11]$$

Solve $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = n\ln\left(\frac{x}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{dy}{dx} = n\cdot\frac{n}{x}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}\sqrt{b^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2}{x^2}(b^2-y^2) \Rightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2(b^2-y^2)$$

পুনরায় ব্যবকলন করে পাই,

$$x^2.2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.2x = 0-2n^2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \quad \left[2\frac{dy}{dx} \text{ দ্বারা ভাগ করে}\right] \quad \textbf{(Proved)}$$

06. $y = x^{n-1}\ln x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2y_2+(3-2n)xy_1+(n-1)^2y = 0$ [09-10]

Solve $y = x^{n-1}\ln x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{n-1}\frac{1}{x}+\ln x\,(n-1)\,x^{n-2}$$

$$\Rightarrow y_1 = x^{n-2}+\ln x\,(n-1)\,x^{n-2}$$

$$\therefore xy_1 = x^{n-1}+\ln x\,(n-1)x^{n-1} = x^{n-1}+(n-1)y$$

আবার, $y_2 = (n-2)x^{n-3}+(n-1).x^{n-2}\frac{1}{x}+(n-1)\ln x\,(n-2)x^{n-3}$

$$\therefore x^2y_2 = (n-2)x^{n-1}+(n-1)\,[x^{n-1}+\ln x\,(n-2)x^{n-1}]$$
$$= (2n-3)x^{n-1}+(n-1)\,(n-2)y$$

$\therefore x^2y_2+(3-2n)xy_1+(n-1)^2y$
$= (2n-3)x^{n-1}+(n-1)(n-2)y+(3-2n)x^{n-1}+(3-2n)\,(n-1)y+(n-1)^2y$
$= (2n-3)x^{n-1}-(2n-3)x^{n-1}+(n-1)[ny-2y+3y-2ny+ny-y]$
$= 0+(n-1)[2ny-2ny+3y-3y] = 0$ **(Proved)**

07. $x^{y^n} = y^{x^n}$ হলে, দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = \frac{y^{n+1}(n\log x-1)}{x^{n+1}(n\log y-1)}$,

যেখানে n একটি ধ্রুবক। [08-09]

Solve $x^{y^n} = y^{x^n}$

$$\Rightarrow \log(x^{y^n}) = \log(y^{x^n})$$

$$\Rightarrow y^n\log x = x^n\log y \text{ ....(i)}$$

$$\Rightarrow ny^{n-1}\log x.\frac{dy}{dx}+y^n.\frac{1}{x} = nx^{n-1}\log y+\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}x^n$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[ny^{n-1}\log x-\frac{x^n}{y}\right] = nx^{n-1}\log y-\frac{y^n}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[\frac{ny^n\log x-x^n}{y}\right] = \frac{nx^n\log y-y^n}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cdot\frac{nx^n\log y-y^n}{ny^n\log x-x^n} = \frac{y}{x}\times\frac{ny^n\log x-y^n}{nx^n\log y-x^n}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^{n+1}(n\log x-1)}{x^{n+1}(n\log y-1)} \quad \textbf{(Showed)}$$

08. $\log(x^ny^n) = x^n+y^n$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান সরলতম আকারে ...

যেখানে n একটি ধ্রুবক। [07-08]

Solve $\log(x^ny^n) = x^n+y^n \Rightarrow n\log(xy) = x^n+y^n$

$$\Rightarrow n(\log x+\log y) = x^n+y^n$$

$$\therefore n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right) = nx^{n-1}+ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^{n-1}+y^{n-1}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y}-y^{n-1}\right) = x^{n-1}\ldots$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^n-1}{x}}{\frac{1-y^n}{y}} = \frac{y}{x}\times\frac{(x^n-1)}{(1-y^n)}$$

09. যদি $y = \cos(2\sin^{-1}x)$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+4y=0 \quad [06\text{-}07]$$

Solve $y = \cos(2\sin^{-1}x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(2\sin^{-1}x)\ldots$

$$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\sin^2(2\sin^{-1}x) \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(1-y^2)$$

পুনরায় x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

$$(1-x^2)2.\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) = 4(-2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+4y = 0$$

[উভয় পক্ষকে $2.\frac{dy}{dx}$ দ্বারা ভাগ করে]

10. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\ldots$

Solve $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ .... (i) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}\cos x - \ldots}{x}$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\cos x-\frac{y}{2} \text{ .... (ii)}$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}\sin x+\cos x\,\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx} = -xy+\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}$$

$$\left[(i) \Rightarrow y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \therefore xy = \sqrt{x}\sin x\right]$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx} = -xy+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y}{2x}\right)-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}$$

$$\left[(ii) \Rightarrow \sqrt{x}\cos x = x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \ldots\right]$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx} = -x^2y+\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{4}-\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y = 0$$

...এর n^{th} **derivative নির্ণয় কর।** [01-02]

Solve $y = e^{3x}\sin^2 x = \frac{1}{2}e^{3x}.2\sin^2 x$

$= \frac{1}{2}e^{3x}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x$

... $\cos 2x$

... $\cos 2x - 2e^{3x}\sin 2x = e^{3x}(3\cos 2x - 2\sin 2x)$

... $= 3 \therefore r\sin\theta = 2 \therefore r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

... $(r\cos\theta\cos 2x - r\sin\theta\sin^2 2x) = re^{3x}\cos(2x+\theta)$

... $\cos(2x+\theta) - 2e^{3x}\sin(2x+\theta)\}$

... $\{r\cos\theta\cos(2x+\theta) - r\sin\theta\sin(2x+\theta)\}$

... $\cos(2x+2\theta)$

... $\cos(2x+n\theta)$

... $\frac{1}{2}[3^n e^{3x} - r^n e^{3x}\cos(2x+n\theta)]$

... $\sqrt{13}, \theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

Ans.

... $(m\sin^{-1}x)$ **হয়, তবে** $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y$ **এর** ... [00-01; CUET 04-05; RUET 07-08]

... $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

... $\frac{...(m\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2(1-y^2)$

... $+ (1-x^2)\,2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx} = -2m^2y\frac{dy}{dx}$

... $-x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$

Ans.

... এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... **হয় তবে প্রমাণ কর যে,** $y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0$ [03-04]

... $\cos bx \Rightarrow ye^{-ax} = \cos bx$

... $y = -b\sin bx$

... $y_1 - ae^{-ax}y_1 + a^2e^{-ax}y = -b^2\cos bx$

... $+ a^2y) = -b^2(ye^{-ax})$

... $y = -b^2y$

... $(a^2+b^2)y = 0$

(Proved)

... বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... $(\log x) + b\sin(\log x)$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** ... $+ y = 0$ [13-14]

... $(\log x) + b\sin(\log x)$

... $\frac{1}{x} + b\cos(\log x).\frac{1}{x}$

... $\left(\frac{1}{x^2}\right) + a\sin(\log x)\left(\frac{1}{x^2}\right)$

... $- b\cos(\log x)\frac{1}{x^2}$

... $+ b\sin(\log x)\}$

... $+ b\cos(\log x)\}$

... $\therefore x^2y_2 + y + xy_1 = 0$ **(Proved)**

02. $y = \sec x$ **হলে, দেখাও যে,** $y_2 = y(2y^2-1)$ [07-08]

Solve $y = \sec x \therefore y_1 = \sec x\tan x$

$\Rightarrow y_2 = \sec x.\sec^2 x + \sec x\tan^2 x$

$= \sec^3 x + \sec x(\sec^2 x - 1) = y^3 + y(y^2-1)$

$= y(y^2+y^2-1) = y(2y^2-1)$

(Showed)

03. **যদি** $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$ [05-06]

Solve $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$

$\therefore y_1 = \frac{2}{2}\sin^{-1}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y_1^2(1-x^2) = (\sin^{-1}x)^2 = 2y$

$\Rightarrow (1-x^2)2y_1y_2 + y_1^2(-2x) = 2y_1 \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$ **(Proved)**

04. **যদি** $y = e^{\tan^{-1}x}$ **হয়, তবে** $\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$ **এর মান কত?** [03-04]

Solve $y = e^{\tan^{-1}x} \Rightarrow y_1 = e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2} = \frac{y}{1+x^2}$

$\Rightarrow y_2 = \frac{(1+x^2)y_1 - 2xy}{(1+x^2)^2} = \frac{y-2xy}{(1+x^2)^2}$

$\therefore \frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{y}{1+x^2}}{\frac{y(1-2x)}{(1+x^2)^2}} = \frac{1+x^2}{1-2x}$

Ans.

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. **যদি** $y = (\cos^{-1}x)^2$ **হয়, তবে প্রমাণ কর যে,** $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$ [08-09]

Solve $y = (\cos^{-1}x)^2$

$\Rightarrow y_1 = 2(\cos^{-1}x)\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4(\cos^{-1}x)^2$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4y \Rightarrow y_1^2(-2x) + (1-x^2)2y_1y_2 = 4y_1$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$

(Proved)

02. **যদি** $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ **হয় তবে দেখাও যে,** $2xy_1 + y = 2\sqrt{x}$. [04-05]

Solve $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}\times y = x + 1 \Rightarrow y_1\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 1$

$\therefore 2xy_1 + y = 2\sqrt{x}$

(Showed)

03. **যদি** $x = f(t)$ **এবং** $y = g(t)$ **হলে প্রমাণ কর যে,**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3}$$

Solve $\frac{dx}{dt} = x_1, \frac{dy}{dt} = y_1, \frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dy_1}{dt} = y_2 \therefore \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1}{x_1}$

আবার, $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^2}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^2}}{x_1} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3}$$ **(Proved)**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $y = (\sin^{-1} x)^2$ হলে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1$ এর মান হবে– [13-14]

A. 0 B. 2 C. 4 D. 1

Ans B Solve $y = (\sin^{-1}x)^2 \Rightarrow y_1 = \frac{2\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = 2\sin^{-1}x \Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4y$

$\Rightarrow (1-x^2)\,2y_1y_2 - 2y_1^2x = 4y_1 \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$

02. যদি $y = px^2 + qx^{-1/2}$ হয়, তাহলে $2x^2y'' - xy'$ হবে- [12-13]

A. 2y B. 0 C. y D. $2y^2$

Ans A Solve $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow y' = 2xp - \frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow xy' = 2x^2p - \frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$

আবার, $y'' = 2p + \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}q\times x^{-\frac{5}{2}} = 2p + \frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$

$\therefore 2x^2y'' = 4px^2 + \frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore 2x^2y'' - xy' = 2px^2 + 2qx^{-\frac{1}{2}} = 2(px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}) = 2y$

03. cos 3x এর n তম অন্তরক সহগ হবে: [05-06]

A. $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$ B. $3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} - 3x\right)$

C. $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} - 3x\right)$ D. $3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

Ans D Solve যদি, $y = \cos 3x \;\therefore y_n = 3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $y = \sin^3x$ হলে, y_n এর মান কোনটি? [17-18,15-16]

A. $\frac{1}{4}\left[3\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)\right]$ B. $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

C. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ D. $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

E. $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right) + \cos nx$

Ans A Solve $y = \sin^3x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$\therefore y_n = \frac{1}{4}\left\{3\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)\right\}$

02. যদি $y = \frac{\ln x}{x}$ হয়, তবে $x^3y_2 - 2xy$ এর মান কোনটি? [16-17]

A. –3 B. –2 C. –1 D. 0 E. 3

Ans A Solve $y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow y_1 = \frac{x\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} \Rightarrow y_1 = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$\Rightarrow y_2 = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$

$\therefore x^3y_2 - 2xy = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x} - 2\ln x = -3$

03. $x = \cos\sqrt{y}$ হলে $(1 - x^2)y_2 - xy_1$ এর মান কত? [13-14]

A. 4 B. 0 C. –2 D. 2

Ans D Solve $x = \cos\sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y} = \cos^{-1}x \;\therefore y = (\cos^{-1}x)^2$

$y_1 = -2\cos^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y_1\sqrt{1-x^2} = -2\cos^{-1}x$

$\Rightarrow y_1^2(1-x^2) = 4(\cos^{-1}x)^2 = 4y$

$\Rightarrow -y_1^2\,2x + (1-x^2)2y_1y_2 - 4y_1 = 0$

$\therefore y_2(1-x^2) - xy_1 - 2 = 0 \;\therefore$ নির্ণেয় মান = 2

04. যদি $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ হয়, তবে ... হলো- [12-13]

A. $\frac{a}{(1+\cos\theta)^2}$ B. $\frac{a}{(1-\cos\theta)^2}$ C. ...

D. $\frac{2}{a(1+\cos\theta)^3}$ E. $\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}$

Ans Blank Solve $\frac{dx}{d\theta} = a + a\cos\theta$; $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+\cos\theta)\cos\theta\frac{d\theta}{dx} + \sin^2\theta\frac{d\theta}{dx}}{(1+\cos\theta)^2}$

$= \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}(1+\cos\theta)} = \frac{1}{a(1+\cos\theta)^2}$

05. $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান ...

A. $\frac{a}{(2a-y)^2}$ B. $-\frac{a}{(a+2y)^2}$ C. $\frac{3a}{a+5y}$ D. ...

Ans A Solve $x = a(t + \sin t)$

$\therefore \frac{dx}{dt} = a(1 + \cos t)$ এবং $\frac{dy}{dt} = a\sin t$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \tan\frac{t}{2}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\,\frac{1}{a(1+\cos t)}$

$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\,\frac{1}{a}\,\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{4a\cos^4\frac{t}{2}}$

$= \frac{1}{a\left(1+1-\frac{y}{a}\right)^2} = \frac{a}{(2a-y)^2}$

যদি $x = \tan(\ln y)$ হয়, তবে $\frac{y_2}{y_1}$ এর মান কত? [10-11]

A. $\frac{1-x^2}{2x-1}$ B. $\frac{2x-1}{1+x^2}$ C. $-\frac{1+x^2}{2x-1}$

D. $-\frac{2x-1}{1+x^2}$ E. $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

Ans D Solve $x = \tan(\ln y) \Rightarrow \ln y = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}y_1 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y_1 = \frac{y}{1+x^2} \Rightarrow y_1(1+x^2) = y$

$\Rightarrow y_2(1+x^2) + y_1 2x = y_1 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{1-2x}{1+x^2} = -\frac{2x-1}{1+x^2}$

যদি $y = \sin 3x \cos 2x$ তবে y_n এর মান নিচের কোনটি? [09-10]

A. $\frac{1}{2}\left[5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right]$ B. $\sin(n\pi+5)$

C. $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right)$ D. $\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$

E. $\frac{1}{2}\left\{5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+5x\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right\}$

Ans E Solve $y = \sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$

$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left\{5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+5x\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right\}$

যদি $y = ax \sin x$ হয়, তবে $x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2+2)y$ এর মান নিচের কোনটি? [08-09]

A. 3 B. 5 C. –2 D. 1 E. 0

Ans E Solve $y = ax \sin x$

$\Rightarrow y_1 = a \sin x + ax \cos x$ —— (i)

$\Rightarrow 2xy_1 = 2ax \sin x + 2ax^2 \cos x$ —— (ii)

(i) $\Rightarrow y_1 = a(\sin x + x \cos x) \Rightarrow y_2 = a(\cos x + \cos x - x \sin x)$

$\Rightarrow x^2y_2 = ax^2(2\cos x - x \sin x)$ —— (iii)

$\therefore$ (iii) – (ii)

$\Rightarrow x^2y_2 - 2xy_1 = 2ax^2\cos x - ax^3 \sin x - 2ax \sin x - 2ax^2 \cos x$

$= -ax \sin x(x^2+2) = -y(x^2+2)$

$\therefore x^2y_2 - 2xy_1 + y(x^2+2) = 0$

যদি $y = x^2 \log x$ হলে, $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান- [05-06, 06-07, 12-13]

A. $-\frac{x}{2}$ B. $\frac{2}{x}$ C. $-\frac{2}{x}$ D. $\frac{x}{2}$

Ans B Solve $y = x^2 \log x \Rightarrow y_1 = x^2\frac{1}{x} + \log x(2x) = x + 2x\log x$

$\Rightarrow y_2 = 1 + 2x\frac{1}{x} + 2\log x = 3 + 2\log x \therefore y_3 = \frac{2}{x}$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $y = \log(ax+b)$ হয়, তবে y_n এর মান কত? [11-12]

A. $\frac{(-1)n!a^{n-1}}{(ax+b)^n}$ B. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)a^n}{(ax+b)^n}$

C. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)a^n}{(ax+b)^n}$ D. None of these

Ans B Solve $y = \log(ax+b)$ (এখানে, $\log x = \ln x$)

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{(ax+b)}a \Rightarrow y_2 = (-1)(ax+b)^{-2}a^2$

$\therefore y_3 = (-1)(-2)(ax+b)^{-3}a^3 = (-1)^{3-1}.(3-1)!(ax+b)^{-3}a^3$

$\therefore y_n = (-1)^{n-1}(n-1)!(ax+b)^{-n}a^n = \frac{a^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n}$

02. যদি $y = \frac{1}{x}$ হয়, তবে y এর 20তম অন্তরীকরণ কত? [10-11]

A. $\frac{20!}{x^{20}}$ B. $\frac{20!}{x^{21}}$

C. $\frac{21!}{x^{21}}$ D. None

Ans B Solve $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y_1 = (-1)x^{-2}$

$\Rightarrow y_2 = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 2! x^{-(2+1)}$

$\therefore y_n = (-1)^n n! x^{-(n+1)} \therefore y_{20} = \frac{(-1)^{20}20!}{x^{20+1}} = \frac{20!}{x^{21}}$

03. $y = a^x$ হলে, $x = 0$ তে y এর n তম অন্তরক সহগ কত? [09-10]

A. 0 B. $(\log a)^n$

C. $n \log a$ D. None of them

Ans B Solve

$y_1 = a^x \ln a \Rightarrow y_2 = a^x(\ln a)^2 \therefore y_n = a^x(\ln a)^n \therefore (y_n)_0 = (\ln a)^n$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $y = \sin^{-1}x$ হয়, তবে $\frac{y_1}{y_2}$ এর মান কোনটি? [14-15]

A. $\frac{1}{1-x^2}$ B. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $\frac{x}{1-x^2}$ D. $\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$ E. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ans Blank Solve $y = \sin^{-1}x \Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y_2 = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\times(-2x)}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x^2)(\sqrt{1-x^2})}$

$\therefore \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{(1-x^2)(\sqrt{1-x^2})}{x} = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x$

02. যদি $x\sin y + y\cos x = \pi$ হয়, তবে $y''(0)$ এর মান কত? [11-12]

A. π B. $-\pi$ C. 1 D. 0 E. 2

Ans A Solve $x \sin y + y \cos x = \pi$ যখন $x = 0, y = \pi$

$\Rightarrow x\cos y.y_1 + \sin y + y_1 \cos x - y \sin x = 0$ —— (i)

$\Rightarrow y_1(x\cos y + \cos x) = y \sin x - \sin y$

$\Rightarrow y_1 = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}$

$\therefore y_1(0, \pi) = \frac{0 - \sin\pi}{0 + \cos 0} = 0$

আবার, (i) নং কে অন্তরীকরণ করে,

$= x\cos y.y_2 + (\cos y - x\sin y.y_1)y_1 + \cos y.y_1 + y_2\cos x - y_1\sin x - y_1\sin x - y\cos x = 0$

$\Rightarrow (x\cos y + \cos x)y_2 + (\cos y - x\sin y.y_1 + \cos y - 2\sin x)y_1 - y\cos x = 0$

$\Rightarrow (0 \times \cos\pi + \cos 0)y_2(0,\pi) + (\cos\pi - 0 + \cos\pi - 0) \times 0 - \pi\cos 0 = 0$

$\Rightarrow y_2(0, \pi) = \pi$

$\Rightarrow y_2(0) = \pi \therefore y''(0) = \pi$

SELF TEST [Written]

01. $\ln y = \tan^{-1}x$ হলে, প্রমাণ কর $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

02. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ হলে, প্রমাণ কর $(a^2 + x^2)y_2 + xy_1 = 0$

03. $y = e^x x^6$ হলে, y_3 এর মান নির্ণয় কর।

Ans. $e^x(x^6 + 18x^5 + 90x^4 + 120x^3)$

SELF TEST [MCQ]

01. $y = a\sin x + b\cos x$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = ?$

A. 1
B. 2
C. –1
D. 0

02. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ হলে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y =$ কত?

A. 2
B. $\pm\sqrt{5}$
C. 0
D. 1

03. $y = e^x \cos x$ হলে $y_4 = ?$

A. –y
B. –4y
C. 3y
D. y

04. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ---\infty}}}}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx} = ?$

A. $\frac{1}{2y-2}$
B. 2y–1
C. $\frac{1}{2y-1}$
D. $\frac{y^2 - x}{2y^3 - 2xy - 1}$

05. $y = a\sin\ln x$ হলে, $x^2y_2 + xy_1 = ?$

A. y
B. – y
C. 2y
D. $-2y_1$

06. $y = x^m \ln x$ হলে $xy_1 = ?$

A. $my + x^m$
B. $my + x^{m-1}$
C. $my + x$
D. $y + x^m$

07. $y = (ax+b)^m$ হলে $y_n = ?$ যখন $m < n$

A. 1
B. $\frac{m!}{m-n!}a^n(ax+b)^{m-n}$
C. 0
D. $\frac{m!a^n}{n-m!}(ax+b)^m$

08. cos4x এর n তম অন্তরক সহগ-

A. $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right)$
B. $\cos\left(\frac{n}{2} + 4x\right)$
C. $4^n\cos\left(\frac{n}{2} + 4x\right)$
D. $4^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right)$

09. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

A. $-\frac{b^3}{a^2y^3}$
B. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$
C. $-\frac{b^4}{ay^3}$
D. None

10. $y = x^2\ln x$ হলে, $xy_3 = ?$

A. –2
B. 4
C. 2
D. –3

11. $y = x^{10}$ ও $y_n = 0$ হলে n এর সর্বনিম্ন মান কত?

A. 10
B. 11
C. 2
D. 13

12. $y = e^{2x}$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = ?$

A. e^{-2x}
B. $-2e^{-2x}$
C. $2e^{-2x}$
D. 1

13. $y = \sin x + e^x$ হলে $\frac{d^2x}{dy^2} = ?$

A. $(-\sin x + e^x)^{-1}$
B. $\frac{\sin x - e^x}{(\cos x + e^x)^2}$
C. $\frac{\sin x - e^x}{(\cos x + e^x)^3}$
D. $\frac{\sin x - e^x}{(\cos x + e^x)}$

14. $y = (x^2 - 1)^m$ হলে, y এর (2m) তম অন্তরক সহগ কত?

A. m
B. (2m)!
C. 2m
D. m!

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

14.B	13.C	12.B	11.B	10.C	09.B	08.D	07.[illegible]
06.A	05.B	04.C	03.B	02.C	01.D		

[৪র্থ অংশ]

অন্তরীকরণের প্রয়োগ

সূত্রাবলি:

$f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ (x, y) বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx}$ যা ঐ বিন্দুতে অন্তরকের মান নির্দেশ করে।

x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করলে $\frac{dy}{dx} = 1$ হবে।

অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে $\frac{dy}{dx} = \pm 1$।

x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে।

y অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dx}{dy} = 0$ হবে।

স্পর্শকের সমীকরণ:

$f(x)$ বক্ররেখার উপরস্থ P (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$(y - y_1) = f'(x)(x - x_1)$

অভিলম্ব ও তার সমীকরণ:

স্পর্শবিন্দুগামী ও স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাটিকে অভিলম্ব বলে।

(x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$f'(x_1)(y - y_1) + (x - x_1) = 0$

স্পর্শক ও অভিলম্বের মধ্যবর্তী কোণ 90^0 হওয়ায় তাদের ঢালের গুণফল (−1) হবে।

স্পর্শক একটি সরলরেখা এবং একটি সরলরেখার ঢাল সকল পদ্ধতিতে (জ্যামিতিক ও ক্যালকুলাসীয়) একই।

কোন ফাংশনের চরমমান বলতে উহার স্থানীয় বৃহত্তম ও স্থানীয় ক্ষুদ্রতম মানকে বুঝায়। স্থানীয় বৃহত্তম ও স্থানীয় ক্ষুদ্রতম মানকে যথাক্রমে গুরুমান ও লঘুমান বলে।

গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয়ের নিয়ম:

মনে করি, $y = f(x)$ একটি ফাংশন।

গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় করার জন্য $\frac{dy}{dx}$ বের করে $\frac{dy}{dx} = 0$ বসাতে হবে এবং সেখান থেকে x এর মানগুলি নির্ণয় করতে হবে। এ সমস্ত মানগুলোকে স্থিরবিন্দু/সন্ধিবিন্দু ঘূর্ণন বিন্দু / চরম বিন্দু (critical point) বলে।

$\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করে তাতে x এর মানগুলো বসাতে হবে।

এক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যাবে।

যদি $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হয় তবে x এর ঐ মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনের লঘুমান পাওয়া যাবে। এবং যদি $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হয় তবে x এর ঐ মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনের গুরুমান পাওয়া যাবে।

x এর মানগুলো $y = f(x)$ এ বসিয়ে গুরুমান এবং লঘুমান নির্ণয় করা যাবে।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: স্পর্শকের সমীকরণ

Ex-01 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (-\frac{2x}{a^2}) \times \frac{b^2}{2y}$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-xb^2}{ya^2}$

(x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{-x_1b^2}{y_1a^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \frac{-x_1b^2}{y_1a^2}(x - x_1)$

$\Rightarrow a^2yy_1 - a^2y_1^2 = -xx_1b^2 + x_1^2b^2$.

$\Rightarrow xx_1b^2 + a^2yy_1 = x_1^2b^2 + a^2y_1^2$

$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

$\therefore \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ **Ans.**

[$\because$ (x_1, y_1) বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর উপর অবস্থিত]

Ex-02 $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: দেওয়া আছে, $x^2 - y^2 = 7 \Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ আবার, $(-4, 3)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 4)$

$\Rightarrow 3y - 9 = -4x - 16 \Rightarrow 4x + 3y + 7 = 0$ **Ans.**

For practice:

01. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans:** $2x + 3y + 1 = 0$

02. $x^3 = y^2$ বক্ররেখার $(4am^2, 8am^3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans:** $3amx - y = 12a^2m^3 + 8am^3$

03. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বের কর। **Ans.** $x(x_1^2 - ay_1) - y(ax_1 - y_1^2) = ax_1y_1$

04. $xy = 4$ রেখার $(3, \frac{4}{3})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans:** $4x + 9y = 24$

05. দেখাও যে, $\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^3 = 2$ বক্ররেখার (a,b) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

06. দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$

Type-02: অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয়

Ex-01 $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(4, -3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বের কর।

Sol^n: $x^2 - y^2 = 7$

$\Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ উভয়পক্ষে অন্তরীকরণ করে। $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$\therefore (4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,-3)} = \frac{4}{-3}$

$\therefore (4, -3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $\left(\frac{-dx}{dy}\right)_{(4,-3)} = \frac{3}{4}$

$\therefore (4, -3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$y + 3 = \frac{3}{4}(x - 4) \therefore 3x - 4y = 24$ **Ans.**

For practice:

01. $y^2 = 4(x-1)$ বক্ররেখার $(5,4)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans: $2x + y = 14$

02. $x^3 - 3a\,xy + y^3 = 0$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans:** $(y - y_1)(x_1^2 - ay_1) = (x - x_1)(y_1^2 - ax_1)$

Type-03: বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়

Ex-01 $(14, 7)$ বিন্দু হতে $y^2 - 16x - 8y = 0$ বক্ররেখার উপর তিনটি অভিলম্ব অংকিত হল। ওদের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, (h,k) বিন্দুতে অংকিত অভিলম্ব $(14, 7)$ বিন্দুগামী।

$y^2 - 16x - 8y = 0$ ....(i)

$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 16 - 8\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{16}{2y-8} = \frac{8}{y-4}$

$\therefore -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(h,k)} = -\frac{k-4}{8}$

সুতরাং বক্ররেখার (h,k) বিন্দুতে অংকিত অভিলম্বের সমীকরণ,

$y - k = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(h,k)}(x - h)$

$\Rightarrow y - k = -\frac{k-4}{8}(x - h)$ [ইহা $(14,7)$ বিন্দুগামী]

$\Rightarrow 7 - k = \frac{k-4}{8}(h - 14)$

$\Rightarrow hk - 4h - 6k = 0$....................(ii)

আবার (h, k) বিন্দু (i) নং বক্ররেখার উপর অবস্থিত।

$\therefore k^2 - 16h - 8k = 0$

$\therefore h = \frac{k^2 - 8k}{16}$ ....(iii)

(ii) ও (iii) নং হতে পাই, $\frac{k^2-8k}{16}.k - 4.\frac{k^2-8k}{16} - 6k = 0$

$\Rightarrow k^3 - 12k^2 - 64k = 0$

$\Rightarrow k(k^2 - 12k - 64) = 0$

$\Rightarrow k(k - 16)(k + 4) = 0 \therefore k = 0, 16, -4$

$k = 0, 16, -4$ হলে $h = 0, 8, 3$

$\therefore$ অভিলম্বত্রয়ের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0,0); (8,16); (3,-4)$ **Ans.**

Ex-02 $y^3 = x^2(2a-x)$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x অ... সমান্তরাল, ঐ বিন্দুসমূহ নির্ণয় কর।

Sol^n: দেওয়া আছে, $y^3 = 2ax^2 - x^3$

$\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = 4ax - 3x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4ax - 3x^2}{3y^2}$

স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{4ax - 3x^2}{3y^2} = 0$

$\Rightarrow x(4a - 3x) = 0$

$\therefore x = 0$ অথবা $x = \frac{4a}{3}$ এখন $x = 0$ হলে $y = 0$

এবং $x = \frac{4a}{3}$ হলে $y^3 = \frac{16a^2}{9}\left(2a - \frac{4a}{3}\right) = \frac{16a^2}{9}.\frac{2a}{3} = \frac{32a^3}{27}$

$\therefore y = \frac{2a\sqrt[3]{4}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুসমূহ: $(0,0); \left(\frac{4a}{3}, \frac{2a\sqrt[3]{4}}{3}\right)$

Ex-03 $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x অ... উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব হলে $\frac{dy}{dx} = \infty$

$\Rightarrow 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0 \therefore x = \pm 1$

$x = 1$ হলে $y = 1$

$x = -1$ হলে $y = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলো: $(1,1), (-1, 1)$

Ex-04 $y = 5x - x^2$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের স... সমান কোণ উৎপন্ন করে, তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: $y = 5x - x^2 \therefore \frac{dy}{dx} = 5 - 2x$

যেহেতু স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোন উৎপন্ন করে সে...

$\frac{dy}{dx} = \pm 1 \Rightarrow 5 - 2x = \pm 1 \Rightarrow x = 2, 3$

$x = 2$ হলে $y = 10 - 4 = 6$ এবং $x = 3$ হলে $y = 15 - 9 = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলো $(2,6)$ ও $(3,6)$

$y = ax^2 + bx + c$ বক্ররেখাটি মূলবিন্দু ও (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। যদি মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল 2 হয় তবে a,b,c এর মান নির্ণয় কর।

$y = ax^2 + bx + c$.............(i)

মূল বিন্দু দিয়ে গেলে $c = 0$

হতে $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$

মূলবিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = 0 + b \therefore b = 2$ [যেহেতু মূলবিন্দুতে ঢাল 2]

(i)নং (1,1) বিন্দুগামী, $1 = a + b + c$

$\Rightarrow 1 = a + 2 + 0$

$\Rightarrow a = -1$

$a = -1, b = 2, c = 0$ **Ans.**

প্রমাণ কর যে, $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ররেখা $(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$ বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে।

বক্ররেখার সমীকরণ, $x^3 + y^3 = 3axy$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

$\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx} = \frac{a.\frac{3a}{2} - \frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3a^2}{3a^2} = -1$

$\Rightarrow \tan\theta = -1 \therefore \theta = 135^0$

$90^0 < \theta < 180^0$

বক্ররেখার উক্ত বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে। **(Proved)**

(x,y) বিন্দুতে একটি বক্ররেখার ঢাল (x^2-2)। বক্ররেখাটি (3,8) বিন্দুগামী হলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y = f(x)$ ফাংশনের (x,y) বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের নতি $\frac{dy}{dx}$

প্রশ্নমতে, $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2 \therefore dy = (x^2-2)dx$

উভয় পক্ষকে সমাকলন করে, $\int dy = \int x^2 dx - 2\int dx$

$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} - 2x + c$ [c = সমাকলন ধ্রুবক]

(3,8) বিন্দুগামী

$\therefore 8 = 9 - 6 + c$

$\Rightarrow c = 5$

নির্ণেয় বক্ররেখার সমীকরণ, $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 5$ **Ans.**

Ex-08 প্রমাণ কর যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোন স্পর্শক কর্তৃক অক্ষ দুটি হতে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক রাশি।

Sol^n: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (h, k) বিন্দুতে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(h,k)} = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}$

প্রদত্ত বক্ররেখার উপর কোন বিন্দু (h,k) হলে, $\sqrt{h} + \sqrt{k} = \sqrt{a}$ ...(i)

(h, k) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - k = \frac{dy}{dx}(x - h)$

$y = 0$ বসিয়ে x অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $= h - \frac{k}{\frac{dy}{dx}}$

$x = 0$ বসিয়ে y অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $= k - h\frac{dy}{dx}$

অক্ষদ্বয় হতে কর্তিত অংশের যোগফল $= h - \frac{k}{\frac{dy}{dx}} + k - h\frac{dy}{dx}$

$= h + \frac{k\sqrt{h}}{\sqrt{k}} + k - h\left(-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right) = h + \sqrt{hk} + k + \sqrt{hk}$

$= h + k + 2\sqrt{hk} = \left(\sqrt{h} + \sqrt{k}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$ [(i) নং হতে] $= a$

যা একটি ধ্রুবক **(Proved)**

For practice:

01. $y^2 = x^2(a-x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans:** (0,0), (a,0)

02. $y = 2x^3 - 15x^2 + 34x - 20$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক $y + 2x = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে সব বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans:** (3,1), (2,4)

03. $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Ans: $(3, \frac{-3}{2}), (-3, \frac{3}{2}); (6, \frac{-3}{4}), (-6, \frac{3}{4})$

04. $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ বক্ররেখাটি (2,1) বিন্দুগামী হলে, উক্ত বিন্দুতে তার স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। **Ans:** 3

05. $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **Ans:** (3,0); $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$

06. $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর।

Ans: $1 \pm \sqrt{2}$, $1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

07. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে। **Ans:** $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

08. $\sqrt{3}\,y = \frac{1}{2}x^2$ বক্ররেখার $(3, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{\pi}{3}$

09. যে বক্ররেখার (x,y) বিন্দুতে নতি '−y' এবং যা (2,1) বিন্দুগামী তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans:** $y = e^{2-x}$

10. মূলবিন্দু হতে y = sinx বক্ররেখার উপর স্পর্শক অংকিত হল। প্রমাণ কর যে, স্পর্শক বিন্দু সমূহ $x^2y^2 = x^2 - y^2$ বক্ররেখায় অবস্থান করে।

11. দেখাও যে, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার যে কোন স্পর্শক কর্তৃক অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের বর্গের যোগফল একটি ধ্রুবক।

12. $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক বের কর। **Ans.** (1, 0), (−1, 4)

Type-04: ব্যবকলনের প্রয়োগ সংক্রান্ত

Ex-01 একটি কণা t সময়ে $s = at^2 + bt + c$ পথ অতিক্রম করে। t সময় শেষে কণাটির শেষ বেগ v হলে দেখাও যে, $v^2 - b^2 = 4a(s - c)$; যেখানে, a, b, c ধ্রুবক।

Solⁿ: $s = at^2 + bt + c$

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = 2t^2 + b \Rightarrow v = 2at + b$

$\Rightarrow v^2 = 4a^2t + b^2 + 4atb$

$\Rightarrow v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt)$

$\therefore v^2 - b^2 = 4a(s - c)$ **(Showed)**

Ex-02 যদি একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে বাড়ে, তবে দেখাও যে, তার পরিসীমা ব্যাসার্ধের ব্যস্ত অনুপাতে বাড়ে।

Solⁿ: t যেকোন সময়ে মনে করি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল A, পরিসীমা P এবং ব্যাসার্ধ r। ∴ $A = \pi r^2$ এবং $P = 2\pi r$

$\Rightarrow P^2 = 4\pi^2r^2 \Rightarrow P^2 = 4\pi A$

t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2P\frac{dP}{dt} = 4\pi\frac{dA}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{4\pi}{2P}\frac{dA}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dA}{dt}$

কিন্তু $\frac{dA}{dt}$ ধ্রুবক

$\therefore \frac{dP}{dt} \propto \frac{1}{r}$ অর্থাৎ পরিসীমা ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতে বাড়ে।

(Showed)

For practice:

01. একটি গতিশীল কণার কোণ সরলরেখার t সময়ের অতিক্রান্ত দূরত্ব $S = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। 2 সে. শেষে তার বেগ এবং কণাটির থামার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। **Ans.** 27 cms^{-1} ; 108 cm

02. একটি কণা সরল পথে এমনভাবে চলে যেন t সময়ে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব $S = \sqrt{2t}$ হয়। দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

03. প্রমাণ কর যে, সাবানের পানিতে বুদবুদের আয়তনের বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হারের $4\pi r^2$ গুণ।

Type-05: চরম মান নির্ণয় সংক্রান্ত অংক

Ex-01 x এর কোন মানের জন্য $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ ফাংশনটির গুরু ও লঘু মান হবে?

Solⁿ: ধরি, $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

লঘু বা গুরু মানের জন্য $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

∴ x = 1, 2, 3 এখানে, $f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$

x = 1 হলে $f''(1) = 12 - 48 + 48 > 0$

∴ x = 1 বিন্দুতে ফাংশনটির লঘু মান আছে।

x = 2 হলে $f''(2) = 48 - 96 + 44 + 44 = -4 < 0$

∴ x = 2 বিন্দুতে ফাংশনটির গুরু মান আছে।

x = 3 হলে, $f''(3) = 108 - 144 + 44 = 8 > 0$

∴ x = 3 বিন্দুতে ফাংশনটির লঘু মান আছে। **Ans.**

Ex-02 x এর কোন মানের জন্য $y = 2\sin x + \cos 2x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ এর চরম এবং অবম মান হয়?

Solⁿ: $y = 2\sin x + \cos 2x$ ---------- (i)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\cos x - 2\sin 2x$ ---------- (ii)

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -2\sin x - 4\cos 2x$ ---------- (iii)

y এর চরম ও অবম মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2\cos x - 2\sin 2x = 0$

$\Rightarrow \cos x - 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0$

∴ যখন cosx = 0 তখন $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $(\because 0 \le x \le 2\pi)$

∴ যখন $\sin x = \frac{1}{2}$ তখন $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ $(\because 0 \le x \le 2\pi)$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = -2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\pi = -2 + 4 = 2 > 0$

∴ $x = \frac{\pi}{2}$ হলে y এর মান লঘিষ্ঠ হবে।

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2\sin\frac{3\pi}{2} - 4\cos 3\pi = -2(-1) - 4(-1) = 2 + 4 = 6$

∴ $x = \frac{3\pi}{2}$ হলে y লঘিষ্ঠ হবে।

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\frac{\pi}{6}} = -2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{3} = -2\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{2} = -3 < 0$

$x = \frac{\pi}{6}$ হলে y গরিষ্ঠ হবে।

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2\sin\frac{5\pi}{6} - 4\cos\frac{5\pi}{3} = -1 - 2 = -3 < 0$

∴ $x = \frac{5\pi}{6}$ হলে y গরিষ্ঠ হবে।

∴ $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ হলে y লঘিষ্ঠ হবে এবং $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ হলে y গরিষ্ঠ

$\ln|x| + bx^2 + x$ ফাংশনটির $x = -1$ ও $x = 2$ হতে দুটি প্রান্তিক ... a ও b এর মান নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, মান দুটি চরম।

$y = a\ln|x| + bx^2 + x$ ----------- (i)

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ --------- (ii)

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{x^2} + 2b$ ---------- (iii)

... হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow -a - 2b = -1$

$a + 2b = 1$ ------- (iv)

... হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \Rightarrow a + 8b = -2$ -------- (v)

... (v) হতে, $a = 2$ এবং $b = -\frac{1}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{x^2} - 1$ এখন $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=-1} = -1 - 2 = -3 < 0$

$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=2} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} < 0$

... ও $x = 2$ বিন্দুতে ফাংশনটির প্রান্তিক মানদ্বয় চরম হবে। **(Proved)**

... দেখাও যে, নির্দিষ্ট পরিধি বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রসমূহের মধ্যে সর্ববৃহৎ ... বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র।

... ধরি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= x$ একক ও প্রস্থ $= y$ একক।

পরিসীমা $p = 2(x + y)$ একক

... পরিসীমা নির্দিষ্ট $\therefore x + y = \frac{p}{2} = c$; c একটি ধ্রুবক।

... ক্ষেত্রফল, $A = xy$

$\Rightarrow A = x(c - x)$

$\Rightarrow \frac{dA}{dx} = c - 2x$

$\Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} = -2$

... সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন ক্ষেত্রফলের জন্য, $\frac{dA}{dx} = 0$

$\Rightarrow c - 2x = 0 \quad \therefore x = \frac{c}{2}$

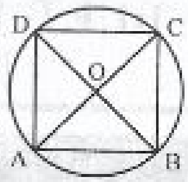
... $\left[\frac{d^2A}{dx^2}\right]_{x=\frac{c}{2}} = -2 < 0$; $x = \frac{c}{2}$ তে A এর মান বৃহত্তম।

... A এর মান সর্ববৃহৎ হয় যখন $x = \frac{c}{2}$ এবং $y = \frac{c}{2}$ হয়

... $x = y$ হয়। $\therefore$ সর্ববৃহৎ আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র হবে।

(Showed)

Ex-05 $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রের বৃহত্তম ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



Solⁿ: এখানে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি ABCD আয়তক্ষেত্রের অন্তর্লিখিত। এখানে,

$DC = h$; $BC = k$

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $p = hk$.

$OB =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= a$

$\therefore \quad BD = 2a \quad \therefore h^2 + k^2 = (2a)^2$; $h^2 + k^2 = 4a^2$

$\therefore \quad p^2 = h^2k^2 = h^2(4a^2 - h^2) = 4a^2h^2 - h^4$

$\therefore \quad \frac{d}{dh}(p^2) = 8a^2h - 4h^3 \Rightarrow \frac{d^2}{dh^2}(p^2) = 8a^2 - 12h^2$

p গরিষ্ঠ হলে p^2 গরিষ্ঠ হবে।

$\therefore \quad \frac{d}{dh}(p^2) = 0 \Rightarrow 8a^2h - 4h^3 = 0$

$\Rightarrow 8a^2 - 4h^2 = 0 \quad [\because h \neq 0] \Rightarrow h = \sqrt{2}\,a$

$\therefore \quad k^2 = 4a^2 - h^2 = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2 \quad \therefore k = \sqrt{2}a$

এখন, $\frac{d^2}{dh^2}(p^2)]_{h=\sqrt{2}a} = 8a^2 - 12.2a^2 = -16a^2 < 0$

$\therefore \quad h = \sqrt{2}\,a$ হলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল গরিষ্ঠ।

$\therefore \quad$ গরিষ্ঠ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{2}a \times \sqrt{2}a = 2a^2$ বর্গ একক **Ans.**

For practice:

01. x এর মান কত হলে $x(12 - 2x)^2$ -এর গুরুমান অথবা লঘুমান হবে? **Ans.** 2, 6

02. দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

03. x এর কোন মানের জন্য $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ ফাংশনের মান গুরু বা লঘু হবে। **Ans.** $x = 4$ হলে গুরুমান; $x = 16$ হলে লঘুমান।

04. x এর কোন মানের জন্য $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ এর গুরুমান ও লঘুমান পাওয়া যাবে? **Ans.** গুরুমান $= \frac{43}{2}$, লঘুমান $= \frac{2}{3}$

05. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর। **Ans.** গুরুমান $\frac{81}{16}$; লঘুমান 0

06. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। **Ans.** লঘিষ্ঠ মান -162, গরিষ্ঠ মান 94

07. দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ এর কোন বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মান নেই।

08. $\sqrt{3}\,\sin x + 3\cos x$ বৃহত্তম হবে যদি $x = \frac{\pi}{6}$ হয়।

09. $x\sin x + 4\cos x$ বৃহত্তম হবে যদি $x = 0$ হয়।

10. $\sin x(1 + \cos x)$ বৃহত্তম হবে যদি $x = \frac{\pi}{3}$ হয়।

11. দেখাও যে, $4e^x + 9e^{-x}$ এর ক্ষুদ্রতম মান 12

12. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ তে $\cos^2x + \cos x + 3$ ফাংশনটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। **Ans.** বৃহত্তম মান = 5 , ক্ষুদ্রতম মান= 3

13. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 100 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফলের মান চরম হলে বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **Ans.** দৈর্ঘ্য 25cm; প্রস্থ 25cm

14. দেখাও যে, নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রগুলোর মধ্যে বর্গক্ষেত্রের পরিসীমাই ক্ষুদ্রতম হবে।

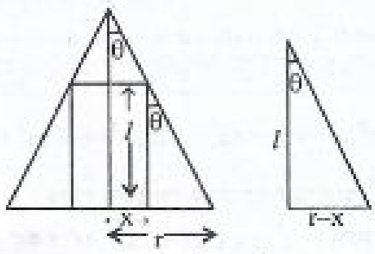
BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হতে হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধের অর্ধেক। [16-17]

Solve



সিলিণ্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল, $A = 2\pi x l$

$\frac{r-x}{l} = \tan\theta \Rightarrow l = \frac{r-x}{\tan\theta}$

$\therefore A = 2\pi x\left(\frac{r-x}{\tan\theta}\right)$

$= \frac{2\pi}{\tan\theta}(rx - x^2)$ [r, θ ধ্রুবক কারণ কোণটি স্থির]

$\frac{dA}{dx} = \frac{2\pi}{\tan\theta}(r-2x)$

এখন গুরু বা লঘু মানের জন্য $\frac{dA}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{\tan\theta}(r-2x) = 0$

$\Rightarrow r - 2x = 0 \therefore x = \frac{r}{2}$

সুতরাং সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধের অর্ধেক (Showed)

02. $y = 3$ সরল রেখার সমান্তরাল কোন রেখা $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্র রেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক সেই বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [15-16, KUET : 06-07]

Solve $y = 3$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ, $y = k$

এখন $y = k$ সরলরেখার ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 0$

আবার $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্ররেখার ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2(x-3)(x-2) + (x-3)^2$

∴ যেসব বিন্দুতে সরলরেখাটি বক্ররেখাকে স্পর্শ করবে সেসব বিন্দুতে উভয়ের ঢাল সমান হবে।

$\therefore 0 = 2(x-3)(x-2) + (x-3)^2 \quad \therefore x = 3, \frac{7}{3}$

$x = \frac{7}{3}$ হলে, $y = \frac{4}{27}$; $x = 3$ হলে, $y = 0$

∴ নির্ণেয় বিন্দুসমূহ $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ এবং $(3, 0)$ **Ans.**

03. একটি নলাকার আবদ্ধ টিনের তৈরি পাত্রের তরল পদার্থ ধর... litre (1000 cm³)। পাত্রটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কত হ... করতে ন্যূনতম টিনের প্রয়োজন হবে? [14-15, 06-07]

Solve ধরি, সিলিন্ডারের উচ্চতা h ডেসিমি এবং ব্যাসার্ধ r ডে...

$\pi r^2 h = 1$(লিটার) $\Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

সিলিন্ডারের ক্ষেত্রফল, $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r\left(r + \frac{1}{\pi r^2}\right) = 2\pi$...

$\therefore \frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$

A সর্বনিম্ন হলে, $4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0$

$\Rightarrow 4\pi r - 2\pi h = 0$

$\Rightarrow 2r - h = 0 \Rightarrow r = \frac{h}{2}$

$\therefore \pi r^2 \times 2r = 1 \Rightarrow 2\pi r^3 = 1$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 0.542\text{dm}^3$ এবং $h = 2r = 10.84$ cm

04. দেখাও যে, $f(x) = x^{1/x}$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $x = e$ হয়...

Solve ধরি, $f(x) = y = x^{\frac{1}{x}}$।

উভয় পক্ষে ln নিয়ে পাই, $\ln y = \frac{1}{x}\ln x$

∴ ব্যবকলন করে পাই, (x এর সাপেক্ষে)

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{1}{x^2}(1-\ln x)\right\}$

$= x^{\frac{1}{x}}\left\{\frac{1}{x^2}(1-\ln x)\right\}$

বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore x^{\frac{1}{x}}\left\{\frac{1}{x^2}(1-\ln x)\right\} = 0$ যেহেতু, $x^{\frac{1}{x}} \neq 0$

$\therefore \frac{1}{x^2}(1-\ln x) = 0$

$\Rightarrow \ln x = 1 \quad \Rightarrow e^{\ln x} = e^1 \quad \therefore x = e$ হবে।

এখন $\frac{d^2y}{dx^2} = y\left\{-\frac{2}{x^3} - \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2\ln x}{x^3}\right)\right\} + \frac{dy}{dx}\left\{(1-\ln x)\right.$...

y এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান বসিয়ে পাই,

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = x^{\frac{1}{x}}\left\{\frac{-2-1+2\ln x}{x^3}\right\} + x^{\frac{1}{x}}\left\{(1-\ln x)\frac{1}{x^2}\right\}\left\{\frac{1}{x^2}\right.$...

এখন, $x = e$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\frac{1}{e}}\cdot\frac{1}{e^3} = -e^{\frac{1}{e}-3}$ $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$\therefore x = e$ হলে, f(x) বৃহত্তম হবে। (Show...

... সমবাহু ত্রিভুজের বাহু প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে.মি এবং ক্ষেত্রফল ... সেকেন্ডে 12 বর্গ সে.মি বৃদ্ধি পায়, তবে সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর ... নির্ণয় কর। [11-12 , 07-08]

Solve ধরি, বাহুর দৈর্ঘ্য = a

ক্ষেত্রফল $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}.2a\frac{da}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}.a.\frac{da}{dt}$

দেওয়া আছে, $\frac{da}{dt} = \sqrt{3}$ সেমি/সে এবং $\frac{dA}{dt} = 12$ বর্গসেমি/সে ।

$\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{da}{dt} = 12$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a.\sqrt{3} = 12 \quad \therefore a = 8$ সে.মি. **Ans.**

... $(x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যে সব বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ ..., ঐ বিন্দুগুলিতে অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের ঢাল নির্ণয় কর। [03-04]

Solve $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করলে

$(x+1)(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1, -1, 3$

বক্ররেখাটি $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 1$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = -4$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-1} = 3 + 6 - 1 = 8$

এবং $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} = 27 - 18 - 1 = 8$ **Ans.**

... নিম্নলিখিত ফাংশনের গুরু বা লঘু মানের পরীক্ষা কর এবং সে মান নির্ণয় কর। $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ [01-02]

Solve $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$f'(x) = \frac{\ln x.1 - x.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$f''(x) = \frac{(\ln x)^2\left(\frac{1}{x} - 0\right) - (\ln x - 1)\left(2\ln x.\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^4}$

গুরু বা লঘু মানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$

$\Rightarrow \ln x - 1 = 0$

$\Rightarrow \ln x = 1 = \ln e$

$\Rightarrow x = e$

$f''(e) = \frac{1^2\left(\frac{1}{e} - 0\right) - (1-1)\left(2.\frac{1}{e}\right)}{1} = \frac{1}{e} > 0$

$x = e$ হলে $f(x)$-এর মান ক্ষুদ্রতম হবে।

$f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$ **Ans.**

08. দেখাও যে, x- অক্ষের সাথে $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ বক্ররেখার ছেদ বিন্দুসমূহে স্পর্শকগুলোর দুটি সমান্তরাল এবং তৃতীয়টি x-অক্ষের সাথে 135° কোণ উৎপন্ন করে। [98-99]

Solve যেহেতু রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করে

$\therefore (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \therefore x = 1, 2, 3$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুসমূহ (1,0), (2,0), (3,0)

আবার, $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

$= (x^2 - 3x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11 \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,0)} = 2$

এবং $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,0)} = -1$ এবং $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,0)} = 2$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,0)} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,0)}$ $\therefore$ স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান্তরাল

আবার $\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,0)} = -1\right]$

$\Rightarrow \tan\theta = -1 \therefore \theta = 135°$

$\therefore$ তৃতীয় স্পর্শকটি x- ধনাত্মক অক্ষের সাথে 135° কোণ উৎপন্ন করে। **(Showed)**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার উপর স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুগুলো নির্ণয় কর, যেখানে স্পর্শকসমূহ x অক্ষের উপর লম্ব। [09-10, RUET :15-16]

Solve $x^2 + 2ax + y^2 = 0$

$\Rightarrow 2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(x+a)}{y}$

প্রশ্নমতে, $\frac{dy}{dx} = \tan 90°$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = 0 \therefore y = 0$

$y = 0$ হলে $x^2 + 2ax = 0 \quad \therefore x = 0, -2a$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় = (0, 0), (– 2a, 0) **Ans.**

02. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$ বক্ররেখাটির উপরস্থ এমন কিছু বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর যেসব বিন্দুগামী স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। [07-08]

Solve $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$ .... (i)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2$

প্রশ্নমতে, $\frac{dy}{dx} = \tan 45° = 1$

$\Rightarrow x^2 = 1 \quad \therefore x = \pm 1$

(i) নং হতে $\quad \therefore x = 1$ হলে $y = \frac{7}{3}$

$x = -1$ হলে $y = \frac{5}{3}$

$\therefore (x, y) = (1, \frac{7}{3}), (-1, \frac{5}{3})$ **Ans.**

03. $y = x^2 - 3x + 2$ বক্র রেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর। [05-06]

Solve $y = x^2 - 3x + 2$ ..... (i)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 3$

প্রশ্নমতে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ হলে $y = -\frac{1}{4}$ [(i) নং হতে]

$\therefore (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ **Ans.**

04. $y = kx(1 + x)$ বক্ররেখাটির (3, 0) বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করলে k-এর মান বের কর। [04-05]

Solve $y = k\,x(1 + x) = k(x + x^2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = k(1 + 2x)$

$\therefore \left\{\frac{dy}{dx}\right\}_{(3,0)} = k(1 + 2.3) = 7k$

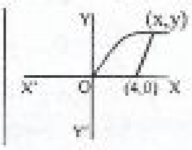
প্রশ্নমতে, $\left\{\frac{dy}{dx}\right\}_{(3,0)} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore k = \frac{1}{7\sqrt{3}}$ **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $y = \sqrt{x}$ গ্রাফে (x,y) বিন্দুটির মান নির্ণয় কর যা (4, 0) বিন্দুর নিকটতম। [15-16]

Solve $y = \sqrt{x}$ গ্রাফ



গ্রাফটির উপর (x, y) বিন্দু হতে (4, 0) বিন্দুর দূরত্ব,

$s = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + x}$

$\therefore \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(x-4)^2 + x}}(2x - 7)$, নিকটতম দূরত্বের জন্য $\frac{ds}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2x - 7 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{7}{2}$

আবার,

$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{2}{2\sqrt{(x-4)^2 + x}} + \frac{(2x-7)}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\{(x-4)^2 + x\}^{-3/2}(2x - 8 + 1)$

$= \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2 + x}} - \frac{(2x-7)^2}{4}\{(x-4)^2 + x\}^{-3/2}$

$x = \frac{7}{2}$ হলে, $\frac{d^2s}{dx^2} > 0$ অর্থাৎ দূরত্ব ন্যূনতম হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুটি $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ **Ans.**

02. $x(12 - 2x)^2$এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। [12-13]

Solve ধরি, $y = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2 - 96x + 144$

$\therefore$ বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \therefore x = 6, 2$

এখন, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x - 96$, x = 6 হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24.6 - 96$ = ...

$\therefore$ ফাংশনটি x = 6 বিন্দুতে ক্ষুদ্রতম এবং এই মান $= 4.6^3 - 48.6^2$ ...

x = 2 হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24.2 - 96 = -48 < 0$

$\therefore$ ফাংশনটি x = 2 বিন্দুতে বৃহত্তম এবং এই মান

$= 4.2^3 - 48.2^2 + 144.2 = 128$

03. $y^3 = x^2(2a - x)$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের ... সেগুলি নির্ণয় কর। [07-08]

Solve $y^3 = x^2(2a - x)$

$\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = 4ax - 3x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4ax - 3x^2}{3y^2}$

$\therefore$ x –অক্ষের সমান্তরাল হলে $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 4ax - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow x(4a - 3x) = 0$

$\therefore x = 0, x = \frac{4a}{3}$ যখন x = 0 তখন y = 0

এবং যখন $x = \frac{4a}{3}$ তখন $y = \frac{2a}{3}\sqrt[3]{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাংক $= (0, 0), \left(\frac{4a}{3}, \frac{2a}{3}\sqrt[3]{4}\right)$

04. x ও y এমন দুইটি সংখ্যা যাদের যোগফল 100। $x^2 + y^2$ ... মান নির্ণয় কর। [05-06]

Solve $x + y = 100$

$\Rightarrow x = 100 - y$

$\therefore x^2 + y^2 = (100 - y)^2 + y^2 = 2(y^2 - 100y + 5000)$

$= 2\{(y - 50)^2 + 2500\}$

y–50 = 0 হলে, x^2+y^2 এর সর্বনিম্ন মান হবে এবং সর্বনিম্ন ...

05. দেখাও যে একটি গোলাকার সাবানের বুদবুদের আয়তনের ... তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হারের $4\pi r^2$ গুণ। [03-04]

Solve ধরি, ব্যাসার্ধ = r

$\therefore$ ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার $= \frac{dr}{dt}$

$\therefore$ আয়তন, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ আয়তন বৃদ্ধির হার $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$= 4\pi r^2 \times$ ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার। (Shown)

MCQ Part

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

...মান কত হলে, $y = k(x-1)(x+2)$ বক্ররেখার $x = 1$ বিন্দুতে ... x - অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করবে? [13-14]

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D. $\sqrt{3}$

... A | Solve $y = k(x-1)(x+2) = k(x^2+x-2)$

$= k(2x+1)$

...বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = k(2+1)$

$= 3k$

..., $\frac{dy}{dx} = \tan 60°$

$= \sqrt{3} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

...গোলকের ব্যাসার্ধের বৃদ্ধিহার এবং পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার ...ভাবে সমান হলে, গোলকটির ব্যাসার্ধের মান কত হবে? [13-14]

B. 8π

D. $\frac{1}{8\pi}$

... D | Solve গোলকের ব্যাসার্ধ $= r$

...ক্ষেত্রফল $4\pi r^2$

...ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার $= \frac{dr}{dt}$

...ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার $= \frac{dA}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$

..., $\frac{dr}{dt} = \frac{dA}{dt}$

$= 8\pi r\frac{dr}{dt}$

$= 8\pi r \therefore r = \frac{1}{8\pi}$

...$y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x– অক্ষের ...তা হল– [13-14]

...$\pm 1)$ B. $(-1, \pm 2)$

...$\pm 2)$ D. $(-1, \pm 1)$

... C | Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x-2)}{2y} = \frac{-(x-1)}{y} = \frac{1-x}{y}$

...সমান্তরাল হলে $\frac{dy}{dx} = 0$

$-x = 0 \therefore x = 1$

$y^2 = 2x + 3 - x^2$

...হলে $y^2 = 2.1 + 3 - 1 = 4$

$= \pm 2 \;\therefore$ বিন্দুদ্বয় $(1, \pm 2)$

04. $\sin\theta$ এর যে মানের জন্য $7\sec\theta - 3\tan\theta$ এর মান ন্যূনতম হয় তা কত হবে? [13-14]

A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{3}{7}$

Ans | D | Solve $y = 7\sec\theta - 3\tan\theta$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7\sec\theta\tan\theta - 3\sec^2\theta$

লঘু বা গুরু মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 7\sec\theta\tan\theta - 3\sec^2\theta = 0$

$\Rightarrow 7\tan\theta = 3\sec\theta$

$\therefore 7\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{\cos\theta}$

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{7}$

05. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটির জন্য যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x– অক্ষের সমান্তরাল তা হল– [13-14]

A. $(1, 2), (-1, -2)$ B. $(-1, 2), (1, 0)$

C. $(2, -1), (0, 1)$ D. $(-1, 2), (1, -2)$

Ans | A | Solve $y = x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\because$ স্পর্শকগুলো x অক্ষের সমান্তরাল

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \;\therefore x = \pm 1$

$x = 1$ হলে $y = 2$; $x = -1$ হলে $y = -2$

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক $(1, 2); (-1, -2)$

06. x এর মান কত হলে, $F(x) = \int_0^x \frac{t-4}{9-t^2}\,dt$ ফাংশনটির মান বৃহত্তম হবে? [13-14]

A. 3 B. 4

C. 5 D. 25

Ans | B | Solve $F(x) = \int_0^x \frac{t-4}{9-t^2}\,dt$

$\therefore F'(x) = \frac{x-4}{9-x^2}$

গুরু বা লঘুমানের জন্য $F'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{x-4}{9-x^2} = 0$

$\therefore x = 4$

07. x এর মান কত হলে, ফাংশন $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে? [12-13]

A. $-\frac{1}{e}$ B. e

C. $\frac{1}{e}$ D. –e

Ans B Solve $f'(x) = \frac{\ln x - x.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

ফাংশনটি বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম হলে, $f'(x) = 0$ হবে।

$\therefore \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \therefore \ln x = 1$

$\Rightarrow e^{\ln x} = e^1 \therefore x = e$

$$f''(x) = \frac{(\ln x)^2.\frac{1}{x} - (\ln x - 1).2\ln x\frac{1}{x}}{(\ln x)^4}$$

$\therefore x = e$ বসালে পাই, $f''(x) = \frac{\frac{1}{e} - 0}{1} = \frac{1}{e} > 0$

$\therefore x = e$ হলে, ফাংশনটি ক্ষুদ্রতম।

08. C এর মান কত হলে, y = Cx (1 + x) বক্ররেখার মূলবিন্দুতে তার স্পর্শক অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে?
[11-12; CUET 13-14, 11-12]

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ans B Solve $y = Cx^2 + Cx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2Cx + C$

মূলবিন্দুতে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = C = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

09. y(x – 2) (x – 3) – x + 7 = 0 বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে বক্র রেখাটির অভিলম্বের সমীকরণ হল- [11-12]

A. x + 20 y – 7 = 0 B. 20x + y – 140 = 0

C. 20x + y + 140 = 0 D. x – 20y – 7 = 0

Ans B Solve $y(x-2)(x-3) - (x-7) = 0$

$\Rightarrow y = \frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$

$\Rightarrow \ln y = \ln(x-7) - \ln(x-2) - \ln(x-3)$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x-7)}{(x-2)^2(x-3)} - \frac{x-7}{(x-2)(x-3)^2}$

x অক্ষকে ছেদ করলে $y = 0 \therefore x = 7$

$\therefore$ x অক্ষের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 0) যাতে স্পর্শকের ঢাল $= \frac{1}{20}$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -20$

$\therefore$ সমীকরণ $y - 0 = -20(x - 7)$

$\therefore 20x + y - 140 = 0$

10. দেয়া আছে, $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}dt$ । x-এর মান কত হলে, F... হবে? [11-12]

A. 3 B. 0 C. $\sqrt{7}$ D. –...

Ans A Solve $F(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7}dt \therefore F'(x) = \frac{x-3}{x^2+7}$

লঘু বা গুরু মানের জন্য $F'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x^2+7} = 0 \therefore x = 3$

11. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটি সর্বোচ্চ ... হবে- [11-12]

A. 1 B. – 1 C. 0 D. 2

Ans D Solve $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\therefore$ বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $f'(x) = 0$

$\therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \therefore x = \pm 1$

এখন $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

x = 1 হলে $f''(x) = 2$, ফাংশনটির লঘুমান থাকবে।

x = – 1 হলে $f''(x) = -2$, ফাংশনটির গুরুমান থাকবে।

এই অপশনে $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটি মান হবে সর্বোচ্চ যখন x = ...

12. x এর যে মানের জন্য $f(x) = \sin^3x \cos x, (0 < x < \pi)$ এর ... হবে তা হচ্ছে- [10-11]

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{12}$

Ans C Solve $f(x) = \sin^3x \cos x$

$f'(x) = -\sin^4x + 3\sin^2x \cos^2x$

লঘু বা গুরুমানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin^2x(-\sin^2x + 3\cos^2x...$

$\Rightarrow \sin^2x = 3\cos^2x \quad [\because \sin x \neq 0]$

$\Rightarrow \tan^2x = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$ (–ve বাদ দিয়ে) $\therefore x = \frac{\pi}{3}$

আবার, $f''(x) = -4\sin^3x \cos x + 6\sin x \cos^3x - 6\cos x \sin...$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$ । সুতরাং $x = \frac{\pi}{3}$ হলে f(x) বৃহত্তম হবে।

13. সাবানের একটি গোলাকার বুদবুদের আয়তন বৃদ্ধির হার ... ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হারের অনুপাত কত? [10-11; RUET 09-10]

A. πr^2 B. $\frac{4}{3}\pi r^2$

C. $\frac{4}{3}\pi$ D. $4\pi r^2$

Ans D Solve $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3 \times r^2.\frac{dr}{dt}$

$\therefore \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = 4\pi r^2$

$= 2x^3$ বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শকটি $4x-3y+1=0$ সরলরেখার ... হবে? [10-11]

$\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$ B. $\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{16}\right)$

$\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{16}\right)$ D. $\left(\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$

Ans | D | Solve $y^2 = 2x^3$

$2y\frac{dy}{dx} = 6x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y}$

$-3y+1=0$ রেখার ঢাল $\frac{4}{3}$

স্পর্শকটির ঢাল $-\frac{3}{4}$ $\therefore \frac{3x^2}{y} = -\frac{3}{4}$

$2x^2 = -3y$

$= -4x^2 \Rightarrow y^2 = (-4x^2)^2$

$(-4x^2)^2 = 2x^3$

$16x^4 - 2x^3 = 0$

$(16x-2) = 0$

$= 0$ অথবা, $x = \frac{1}{8}$ $\therefore y = 0$ অথবা, $\frac{1}{16}$

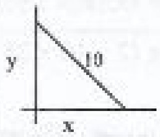
$\therefore$ বিন্দুদ্বয় $= (0, 0), \left(\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$

... দৈর্ঘ্যের একটি মই একটি খাড়া দেয়ালের (y বরাবর) সাথে হেলানো ... যদি মইটির মেঝে সংলগ্ন প্রান্ত v বেগে দেয়াল হতে (x বরাবর) দূরে ... থাকে তবে দেয়াল সংলগ্ন প্রান্তের বেগ কত? [09-10]

B. $\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}y\right)v$

$-\frac{x}{y}v$ D. None of this

Ans | C | Solve $x^2 + y^2 = 10^2$



$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$x + y.\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}.v$

... প্রয়োগের ফলে ধাতুর তৈরি একটি বৃত্তাকার থালার ব্যাসার্ধ প্রতি ... 0.25 সে. মি বাড়ে। যখন থালাটির ব্যাসার্ধ 7 সে. মি তখন ... ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার বের কর। [09-10]

$49\ cm^2$ B. $11\ cm^2$

$\frac{3}{2}cm^2$ D. $9\ cm^2$

Ans | B | Solve $A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 2\pi r.\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = 0.25$ cm ও $r = 7$ cm

$\frac{dA}{dt} = 2\pi \times 7 \times 0.25 = 10.99 \approx 11\ cm^2/sec$

17. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ বক্ররেখার উপরিস্থিত $(-1, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে: [08-09]

A. $y + 2 = 0$ B. $y - 2 = 0$
C. $x - 2 = 0$ D. $x + 2 = 0$

Ans | A | Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+2)}{2y-4} = \frac{-(x+1)}{y-2}$

এখন, $(-1, -2)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{-4} = 0$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y + 2 = 0$

18. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \frac{t^2}{8}$ ফুট দূরত্ব যায়। 5 মিনিট পর ট্রেনটির বেগ কত হবে? [06-07]

A. 78 ft/sec B. $\frac{17}{4}$ ft/sec
C. 75 ft/ sec D. $\frac{145}{8}$ ft/sec

Ans | A | Solve $S = 3t + \frac{t^2}{8}$

$\therefore \frac{dS}{dt} = v = 3 + \frac{2t}{8}$

$\therefore t = 5$ min $= 300$s পরে, $v = 3 + \frac{2 \times 300}{8} = 78$ ft/sec

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $y = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$ এর সর্বোচ্চ মান হলো- [17-18]

A. ∞ B. 0 C. 2
D. -2 E. -4

Ans | A | Solve $y = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

লঘু বা গুরুমানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0 \therefore x = \pm 1$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{x^3}$, এখন, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 4 > 0$ এবং $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-1} = -4 < 0$

$\therefore x = 1$ বিন্দুতে লঘুমান বা স্থানীয় সর্বনিম্ন এবং $x = -1$ বিন্দুতে গুরুমান বা স্থানীয় সর্বোচ্চ মান থাকবে।

আবার $\frac{dy}{dx} = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) > 0$ যখন $x \neq -1, 1$

সুতরাং $y = 2\left(x - \frac{1}{x}\right)$ এর সর্বোচ্চ মান ∞ এবং সর্বনিম্ন মান $-\infty$

02. $\sin x = \frac{1}{4}$ এর জন্য $y = \sin x + \cos 2x$ ফাংশনটির মান কোনটি? [16-17]

A. -2 B. 0 C. 1 D. $\frac{9}{8}$ E. $\frac{11}{8}$

Ans | D | Solve $\sin x = \frac{1}{4}$

$y = \sin x + 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{16} = \frac{9}{8}$

03. দুটি সংখ্যার যোগফল 7 হলে সংখ্যা দুটির গুণফলের সর্বোচ্চ মান হলো- [15-16]

A. 6 B. 10 C. 12
D. ∞ E. কোনটিই নয়

Ans E Solve $x + y = 7$

$\Rightarrow y = 7 - x$

$A = xy = x(7 - x) = 7x - x^2$

সর্বোচ্চ মানের জন্য, $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 7 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{7}{2} \therefore y = \frac{7}{2}$

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= 7 \times \frac{7}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

04. $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ এর $-2 < x < 1$ ব্যবধিতে সর্বোচ্চ হলো- [14-15]

A. 32 B. –5 C. –7
D. 0 E. 16

Ans D Solve $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

$\Rightarrow y_1 = 12x^3 + 12x^2 - 24x$

$\Rightarrow y_2 = 36x^2 + 24x - 24$

সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য $y_1 = 0$

$\Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 1, -2, 0$

$(y_2)_{x=0} = -24 < 0$

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= (y)_{x=0} = 0$

05. একটি কোণকের উচ্চতা সর্বদা তার ভূমির ব্যাসার্ধের সমান থাকে। যদি তার ভূমির ব্যাস বৃদ্ধির হার $7mm\ sec^{-1}$ হয় তবে 16mm ব্যাস থাকা অবস্থায় তার আয়তন বৃদ্ধির আনুমানিক হার হবে- [14-15]

A. $0.7cc\ sec^{-1}$ B. $7cc\ sec^{-1}$ C. $7cm\ sec^{-1}$
D. 70 cubic mm sec^{-1} E. কোনটিই নয়

Ans A Solve $\frac{d}{dt}(2r) = 7\ mm\ sec^{-1}$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{7}{2}\ mm\ sec^{-1}$

Again, $\frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{3}\pi r^2 h)$

$= \frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}(r^3)\ [\because h = r] = \frac{1}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt} = \pi \times 8^2 \times \frac{7}{2}\ [\because 2r = 16 \therefore r = 8]$

$= 703.72\ mm^3/sec = 0.7\ cm^3/sec = 0.7\ cc/sec$

06. একটি গোলাকার বুদবুদের ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার 0.2 mm/sec যখন ব্যাসার্ধ 7 mm তখন ঐ গোলকের আয়তন বৃদ্ধির হার হলো- [13-14]

A. 0.0123 cc/sec B. 12.23 cc/sec C. 1.232 cc/sec
D. 12.3245 cc/sec E. 0.1232 cc/sec

Ans E Solve দেওয়া আছে, $r = 7mm = 0.7cm$

$\frac{dr}{dt} = 0.2mm/sec = 0.02\ cm/sec$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi . 3r^2 . \frac{dr}{dt}$

$= 4\pi \times (.7)^2 \times (.02) = 0.1232\ cc/sec$

07. $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1, (a > 0)$ এর $x = p$ ও $x = q$ বিন্দুতে ... স্থানীয় গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান আছে। $p^2 = q$ হলে a এর মান কত?

A. 2 B. 3 C. –2
D. 4 E. –3

Ans A Solve $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 12a^2$

লঘু বা গুরুমানের জন্য, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 6x^2 - 18ax + 12a^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

$\therefore x = a, 2a$

আবার, $f''(x) = 12x - 18a$

$\therefore f''(a) = -6a$ এবং $f''(2a) = 6a$

$\therefore x = a$ বিন্দুতে গুরুমান এবং $x = 2a$ বিন্দুতে লঘুমান আছে।

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $p = a, q = 2a$ এবং $p^2 = q$

$\therefore a^2 = 2a \therefore a = 2\ [\because a > 0]$

08. তাপে সিলিন্ডারের ব্যাস ও উচ্চতা বৃদ্ধির হার যথাক্রমে 0.025 ... হইলে আয়তন বৃদ্ধির হার কত? যদি ব্যাস ও উচ্চতা যথাক্রমে ... একক বিশিষ্ট হয়। [10-11]

A. 10.8723 B. 11.0515 C. ...
D. 11.3725 E. 17.0515

Ans A Solve $\frac{dh}{dt} = 0.0135$ এবং $\frac{dR}{dt} = 0.025$

$D = 10$ এবং $h = 25$

$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}\pi D^2 h\right) = \frac{1}{4}\pi\left(2Dh\frac{dD}{dt} + D^2\frac{dh}{dt}\right)$

$= \frac{1}{4}\pi\ (2 \times 10 \times 25 \times 0.025 + 100 \times 0.0135) = 10.872$

09. $1 + 3\sin x + 9\cos^2 x$ এর চরম মান কত? যখন $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ [10-...]

A. 4 B. 13 C. 10
D. $\frac{41}{4}$ E. $\frac{-13}{4}$

Ans D Solve $1 + 3\sin x + 9\cos^2 x$

$= 1 + 3\sin x + 9(1 - \sin^2 x)$

$= 10 + 3\sin x - 9\sin^2 x$

$= -\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}3\sin x + (3\sin x)^2\right\} + 10 + \frac{1}{4} = \frac{41}{4} - \left(\frac{1}{2} - ...\right.$

$\therefore 1 + 3\sin x + 9\cos^2 x$ - এর বৃহত্তম মান $= \frac{41}{4}$ হবে।

যখন $3\sin x = \frac{1}{2}$ অর্থাৎ যখন $\sin x = \frac{1}{6}$ হয়।

$\frac{1}{x}$ এর গুরুমান কোনটি? [09-10]

B. 1 C. –2

E. $\frac{3}{2}$

C | Solve $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f'(x) = 1 + (-1)x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

লঘু বা গুরুমানের জন্য, $f'(x) = 0$

$1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$x = \pm 1$

$x = -1$ হলে, $f''(-1) = 2(-1)^{-3} = -2 < 0$

গুরুমান $f(-1) = -2$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

...বিন্দু থেকে সরলরেখায় চলমান বস্তুর সরণ $S = 6 - 2t + 3t^3$ হলে ...1 sec পর বস্তুর ত্বরণ কত হবে? [14-15]

B. 16 C. 18

E. None

C | Solve $\frac{ds}{dt} = v = -2 + 9t^2$

$a = \frac{dv}{dt} = 9 \times 2t = 18t$

1 sec পর ত্বরণ $= 18 \times 1 = 18$ একক।

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... $x(2a - x)$ এর সর্বোচ্চ মান- [13-14]

B. 2a C. $2a^2$

E. None

D | Solve

$f(x) = 2ax - x^2$

$f'(x) = 2a - 2x$

লঘু বা গুরু মানের জন্য $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2a - 2x = 0 \therefore x = a$

$f''(a) = -2 < 0$

$\therefore f(x)$-এর গুরুমান $f(a) = 2a^2 - a^2 = a^2$

...একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $5t + \frac{1}{2}t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। 2 সেকেন্ড পর ট্রেনটির বেগ কত হবে? [13-14]

...ft/sec B. 10 ft/sec C. 8 ft/sec

...ft/sec E. None

D | Solve $s = 5t + \frac{1}{2}t^2$

$v = \frac{ds}{dt} = 5 + t$

2s পর বেগ $= 5 + 2 = 7$ ft/s

03. $y = x^2(1 - x)$-এর সর্বোচ্চ মান- [12-13]

A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{2}{27}$ C. $\frac{4}{27}$

D. $\frac{1}{8}$ E. None

Ans | C | Solve $y = x^2 - x^3 \therefore y_1 = 2x - 3x^2$

ফাংশনটির মান বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম হলে, $y_1 = 0$ হবে।

$\Rightarrow 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - 3x) = 0 \therefore x = 0, \frac{2}{3}$

আবার, $y_2 = 2 - 6x$

$x = 0$ হলে, $y_2 = 2 > 0$ এবং $x = \frac{2}{3}$ হলে, $y_2 = 2 - \frac{12}{3} = -2 < 0$

$\therefore x = \frac{2}{3}$ হলে, y এর মান বৃহত্তম হবে।

$\therefore$ y এর মান সর্বোচ্চ $= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$

04. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের ভুজের মান হলো। [10-11]

A. x = 3 এবং 0 B. x = 1 এবং –1 C. x = 1 এবং – 3

D. x = –1 এবং 3 E. x = –1 এবং –1

Ans | D | Solve $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$

এখন স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \therefore x = 3, -1$

SELF TEST [WRITTEN]

01. যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে।

02. একটি বস্তুর গতির সমীকরণ, $s = t^3 + \frac{1}{t}$ হলে দেখাও যে, এর ত্বরণ সর্বদাই ধনাত্মক এবং t = 10 হলে এর গতিবেগ কত হবে? **Ans.** 299 একক (প্রায়)

03. একটি পাথরের টুকরা 112 ফুট/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। t সময়ে এর গতির সমীকরণ, $s = 112t - 16t^2$ রূপে প্রকাশিত হলে, যে সময়ে (i) এর বেগ 80 ফুট/সেকেন্ড হয়, (ii) পাথরটি তার উচ্চতম বিন্দুতে পৌঁছে তা নির্ণয় কর। **Ans.** (i) 1 সেকেন্ড; (ii) $3\frac{1}{2}$ সেকেন্ড

04. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার t সময়ে প্রারম্ভিক বিন্দু হতে দূরত্ব $x = t - 6t^2 + t^3$; t এর কোন মানের জন্য ত্বরণ শূন্য হবে? **Ans.** t = 2

SELF TEST [MCQ: 01]

01. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক–
A. (0,b) B. (0,–b) C. A ও B উভয়ই D. none

02. $y=x^3-2x^2+2$ বক্ররেখার (2,2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ–
A. $4x+y-6=0$ B. $x-4y-6=0$ C. $x-y-6=0$ D. $4x-y-6=0$

03. $y^2-4x-6y+30=0$ বক্ররেখার (3,2) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ–
A. $x+2y+1=0$ B. $x-2y+1=0$ C. $y-2x+1=0$ D. $x-2y-1=0$

04. a এর মান কত হলে $y=ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে?
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

05. x এর মান কত হলে $y=x+\frac{1}{x}$ বক্ররেখার ঢাল শূন্য হবে?
A. ≠2 B. 0 C. ±1 D. –2

06. $x^2+4x+y^2=0$ বক্ররেখাটির উপর যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক–
A. (0,0) ও (–4,1) B. (0,0) (–4,0) C. (0,0) (4,0) D. (4,0)

07. $y=2\sqrt{ax}$ বক্ররেখার $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের ঢাল কত?
A. t B. 0 C. $\frac{1}{t}$ D. অস্তিত্বহীন

08. $y=(x^2-4)(x+3)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে কোথায় ছেদ করে?
A. (2, 0), (3, 0) B. (–2, 0), (3, 0)
C. (2, 0), (–2, 0), (3, 0) D. (2, 0), (–2, 0), (–3, 0)

09. $y=x^3-2x^2-4x$ এর কয়টি বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক y অক্ষের সাথে লম্ব?
A. একটি B. দুইটি C. তিনটি D. চারটি

10. কোন বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব হবে যদি–
A. $\frac{dy}{dx}=0$ B. $\frac{dy}{dx}=1$ C. $\frac{dx}{dy}=0$ D. $\frac{dx}{dy}=1$

11. $y=4-x^2$ ও $y=x^2$ বক্ররেখাদ্বয় কত কোণে পরস্পরকে ছেদ করে–
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ C. $\tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)$ D. none

12. f(x) এর কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করলে–
A. $\frac{dy}{dx}=0$ B. $\frac{dy}{dx}>0$ C. $\frac{dy}{dx}\le 0$ D. $\frac{dy}{dx}<0$

13. $y=3x^2+2x-1$ বক্ররেখার (1, 0) বিন্দুতে ঢাল কত?
A. – 4 B. 8 C. 2 D. –2

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

13.B	12.D	11.C	10.C	09.B	08.D	07.C
06.B	05.C	04.C	03.B	02.D	01.C	

SELF TEST [MCQ: 02]

01. $x+\frac{1}{x}$ ফাংশনের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সত্য?
A. গুরুমান > লঘুমান B. লঘুমান > গুরুমান
C. গুরুমান = লঘুমান D. None

02. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+5x$ এর লঘুমান কত?
A. –2 B. 2
C. 3 D. অস্তিত্ব নেই

03. কোন বিন্দুর সরণের সমীকরণ $s=\sqrt{t}$ হলে 'a' ত্বরণ = ?
A. a > 0 B. a < 0
C. a = 0 D. ত্বরন অসীম

04. একটি আয়তের পরিসীমা 200 m এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হলে ... সর্বোচ্চ হবে?
A. 80, 20 B. 60, 40
C. 70, 30 D. 50, 50

05. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ প্রতি সেকেন্ডে 2 ইঞ্চি হারে বৃদ্ধি পায়ে ... যখন 10 ইঞ্চি তখন বৃত্তটির ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের হার কত?
A. π inch^2/s B. 40π inch^2/s
C. $\frac{\pi}{2}$ inch^2/s D. $\frac{\pi}{4}$ inch^2/s

06. যদি সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ হয়, তবে f(x) এর ...
A. অবাস্তব B. অসীম
C. 1 D. –1

07. একটি নির্দিষ্ট পরিধির জন্য কোনটির ক্ষেত্রফল সর্ববৃহৎ?
A. আয়তক্ষেত্র B. রম্বস
C. বর্গক্ষেত্র D. সামন্তরিক

08. লোহার পাত দিয়ে $32m^3$ আয়তনের একটি খোলা চৌবাচ্চা তৈরি ... হবে। চৌবাচ্চাটি বর্গাকার হলে এর দৈর্ঘ্য ও উচ্চতা কত ... সবচেয়ে কম লাগবে?
A. 4 ও 4 B. 4 ও 2
C. 6 ও 2 D. 8 ও 4

09. একটি বস্তু $S=at^4+bt^3+ct^2$ সমীকরণ মতে গতিশীল ... আদিবেগ কত?
A. 0 B. a + b + c
C. 2c D. 3b + 2c

10. 20 কে এমন দুই ভাগে ভাগ করা হয় যেন একটির ঘন ও ... গুণফল সর্বোচ্চ হয়। তবে এই দুই ভাগ হল–
A. (10, 10) B. (15, 5)
C. (12, 9) D. (10, 5)

11. $x^3-9x^2+24x-12$ ফাংশনটির স্থানীয় চরম ও অবম মান ...
A. 4; 6 B. 8; 4
C. 2; 1 D. 3; 2

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ ...
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ ...
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

11.B	10.B	09.A	08.B	07.C	[illegible]
05.B	04.D	03.B	02.D	01.B	

...অধ্যায়
...পত্র

যোগজীকরণ (Integrations)

...নির্দিষ্ট যোগজীকরণ [১ম অংশ (1.1-1.4)]

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

...gration: যোগজীকরণ বা সমাকলন হল অন্তরীকরণের বিপরীত বা ...রক (Anti-derivative) প্রক্রিয়া।

...ফাংশনটির অন্তরক $f'(x) = g(x)$

...$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = g(x)$ হলে, $\int g(x)dx = f(x) + c$ হবে। $\frac{d}{dx}$ এবং $\int dx$ প্রতীক ...একে অপরের বিপরীত Operator। $\int dx$ বলতে x এর সাপেক্ষে ...কলন করা বুঝায়। $g(x)$ কে integrand বা যোজ্য রাশি এবং $f(x)$, ...gral বা যোজিতফল এবং c কে সমাকলন ধ্রুবক বা arbitary ...constant বলে।

...$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \therefore \int \cos x dx = \sin x + c$

... প্রতীকটি হল একটি লম্ব S যা Summation শব্দটির প্রথম অক্ষর।

...ndamental Properties:

$...(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx$

$= ...f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$

$...f(x)dx = a\int f(x)dx$

...neral Formula:

$...x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \int \frac{1}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c;$

$...\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$

$...\{f(x)\}^n f'(x)dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1} + c$

$...\frac{1}{\sqrt{f(x)}}f'(x)dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

$...\frac{1}{x}dx = \ln|x| + c + c$

$...e^x dx = e^x + c$

$...a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad [a > 0, a \neq 1]$

$...\cos x dx = \sin x + c$

$...\sin x dx = -\cos x + c$

$...\sec^2 x\, dx = \tan x + c$

$...\operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$

$...\sec x \tan x\ dx = \sec x + c$

12. $\int \operatorname{cosec}x \cot x\ dx = -\operatorname{cosec}x + c$

13. $\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + c$

14. $\int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c$

□ **Standard Formula:**

15. (i) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx = a\sin^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + c$

(ii) $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = a\sin^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + c$

(iii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

(iv) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

(v) $\int \frac{f'(x)\,dx}{1 + \{f(x)\}^2} = \tan^{-1}\{f(x)\} + c$

(vi) $\int \frac{f'(x)\,dx}{a^2 + \{f(x)\}^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left[\frac{f(x)}{a}\right] + c$

(vii) $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2 - 1}} = \sec^{-1}f(x) + c$

(viii) $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left[\frac{f(x)}{a}\right] + c$

(ix) $\int \frac{f'(x)\,dx}{a^2 - \{f(x)\}^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a - f(x)}{a + f(x)}\right| + c$

(x) $\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$

(xi) $\int \cos\{f(x)\}f'(x)dx = \sin\{f(x)\} + c$

(xii) $\int \sin\{f(x)\}f'(x)\,dx = -\cos\{f(x)\} + c$

(xiii) $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{a^2 - \{f(x)\}^2}} = \sin^{-1}\left[\frac{f(x)}{a}\right] + c$

(xiv) $\int \{f(x) + xf'(x)\}dx = xf(x) + c$

(xv) $\int \sec^2\{f(x)\}f'(x)\,dx = \tan\{f(x)\} + c$

(xvi) $\int \sec\{f(x)\}\tan\{f(x)\}f'(x)\,dx = \sec\{f(x)\} + c$

16. $\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c = \ln(\sec x) + c$

17. $\int \sec x dx = \ln\tan\left|\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$

18. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c = -\ln|\operatorname{cosec}x| + c$

19. $\int \operatorname{cosec}x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c = \ln|\operatorname{cosec}x - \cot x| + c$

20. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ [To proof $x = a\tan\theta$]

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ [To proof $x = a\sin\theta$]

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c$ [To proof $x = a\sec\theta$]

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + c$

23. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{a-x}\right| + c$ [To proof partial fraction]

24. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ [To proof partial fraction]

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$ [To proof $x = a\tan\theta$]

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c$ [To proof $x = a\sec\theta$]

27. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

[To proof $x = a\sin\theta$]

28. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + c$

[To proof $x = a\tan\theta$]

29. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c$

[To proof $x = a\sec\theta$]

30. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$

31. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + c$ [To proof $x = a\tan\theta$]

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a} + c = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}+a}\right) + c$

[To proof $x = a\tan\theta$]

33. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left[\tan^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right] + c$

[To proof $x = a\tan\theta$]

□ কোন ফাংশনটিকে u বা v ধরতে হবে তার নিয়মঃ

a. যার Integration সরাসরি জানা আছে তাকে v ও অন্যটিকে u ধরতে হবে

b. LIATE অনুক্রমের প্রথম ফাংশনটিকে u ও অপরটিকে v ধরতে হবে।

এখানে,

L = logarithmic function [যেমন, ln x, ln x^2, ln 2x ইত্যাদি]

I = Inverse function [যেমন, $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ইত্যাদি]

A = Algebric function [যেমন, x, 2x, x^4, 5, $(ax+b)^5$ ইত্যাদি]

T = Trigonometric function [যেমন, sin 2x, cos x, tan x ...]

E = Exponential function [যেমন, e^x, e^{3x}, a^x ইত্যাদি]

c. LIPRO অনুক্রমের প্রথম ফাংশনটিকে u ও অপরটিকে v ধরতে ...

এখানে,

L = logarithmic function [যেমন, ln x, log x, ln x^2, ln 2x ...]

I = Inverse function [যেমন, $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ইত্যাদি]

P = Polynomial function [যেমন, x^3, $2x^2+5x$ ইত্যাদি]

R = Repeated function [Repeated ফাংশন হলো সেগুলো ... differentiation সেই function এরই কোন Linear ... আকারে বা তার সাথে পরিপূরক কোন function আকারে ... করে। যেমন- sinx, e^{mx}, $e^{ax}\sin(bx+c)$ ইত্যাদি।

O = Other function.

Note: secx, tanx, repeated function নয়।

কারণ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$। secx ও secx tanx ... repeatation পাওয়া যাচ্ছে না। উপরন্তু function একটি ... সুতরাং এগুলো other's শ্রেণীভুক্ত।

□ Some important formula:

01. $\int e^{ax}\{af(x)+f'(x)\}dx = e^{ax}f(x) + c$

$\int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$

02. $\int e^{ax}\sin(bx+c)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} ...$

$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(bx + c + \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + K$

03. $\int e^{ax}\cos(bx+c)dx$

$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)\} + K$

$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(bx + c - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) + K$

04. $\int a^x\sin(bx+c)dx$

$= \frac{a^x}{(\ln a)^2+b^2}\{\ln a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} + K$

05. $\int a^x\cos(bx+c)dx$

$= \frac{a^x}{(\ln a)^2+b^2}\{\ln a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)\} + K$

06. $\int x^n\ln ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\{(n+1)\ln ax - 1\} + c$

□ যোগজীকরণের নিয়মাবলি:

নিম্নলিখিত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোকে ডান দিকের ... Integration করতে হবে।

(i) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

(ii) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$... x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$... x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

$... \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$

$... \sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

$... \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

$... \sin B = \frac{1}{2}[2\sin A \sin B] = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

Calculator Type
...গজীকরণ (Integration)

...মিক আলোচনা:

...ired mode Radian(Rad):

...ator এ integration করার জন্য বিভিন্ন numerical method ... করে যেমন Gauss- kronod method. Simpsons. Rule ...rical method ব্যবহার করতে upper limit, lower limit. ...nce Nurrber of paritions লাগে। তাই Calculator দিয়ে ...te integral (যে integral এর upper limit and Lower limit ... থাকে) এর প্রায় সকল সমাধান করা যায়।

...gration এর General form হলো:

...a, b, n অথবা 0)

...নে,

... = Function of x(x ছাড়া অন্য কিছু constant বিবেচিত হয়)

...ower Limit.

...pper Limit.

...umber of Partition (W series calculator).

...olerance (Es series calculator)

... 0 এর মান না দিয়েও Intergrations করা যায়।

...gration Without Limit:

...991MS এর জন্য)

...ntegration ই Calculator এর মাধ্যমে করা যায়। এক্ষেত্রে দুইটি ... ইচ্ছাধীন ধরা হয়। তারপর Integration করে যে মান পাওয়া যায়, ... এ Limit এর মান বসালে যার সাথে মান মিলে যাবে সেটাই ...wer. যেমন:

$\int \frac{3x^2}{...-x^6} dx$ এর মান কোনটি?

...$x^3 + c$ B. $\cos^{-1}x^3 + c$

...$x^3 + c$ D. $\cos^2(xe^x) + c$

...C **Solve** Calculator radion mode-এ নিয়ে $\int dx$ বাটন চেপে ... এখন নিম্নভাবে উঠাও,

...$^2 \div (1 + x^6)), 0, 1$

... সমান বাটন চাপলে 0.7854 আসে।

... Option এ

...$(1^3) - \tan^{-1}(0^3) = 0.7853$

...lator অবশ্যই Radian mode এ রাখতে হবে]

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01

➲ যদি ইন্টিগ্রাল এর কোন এক অংশকে ডিফারেনসিয়েট করলে অন্য এমন একটি অংশ পাওয়া যায় যা সরাসরি dx এর সাথে গুণরূপে থাকে, তবে প্রথম অংশকে z ধরতে হয়।

Ex-01 $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx$

Sol^n : $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx$

$= \frac{-1}{4}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{4}\ln|z| + C$

$= -\frac{1}{4}\ln|3+4\cos x| + C$ **Ans.**

ধরি,
$z = 3 + 4\cos x$
$\Rightarrow dz = -4\sin x dx$
$\Rightarrow \frac{-dz}{4} = \sin x dx$

Ex-02 $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$

Sol^n: $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx = \int \frac{z dz}{3}$

$= \frac{1}{3}\int z dz = \frac{1}{6}z^2 + C$

$= \frac{1}{6}(\tan^{-1}x^3)^2 + C$ **Ans.**

ধরি, $\tan^{-1}x^3 = z$
$\Rightarrow \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \frac{dz}{3}$

For practice:

01. $\int \text{cosec} 2x dx$ Ans. $\frac{1}{2}\ln(\tan x) + C$

02. $\int \frac{x}{1-x^2} dx$ Ans. $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

Type-02

➲ প্রয়োজনীয় সূত্রাবলীঃ

i. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

ii. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

iii. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

iv. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

v. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

vi. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + c$

vii. $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

viii. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + c$

ix. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

➲ যদি কোন ইন্টিগ্রাল $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}, \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ এবং $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ এর যে কোন একটি আকারে থাকে তবে তাকে দুইটি বর্গের সমষ্টি বা অন্তররূপে প্রকাশ করতে হয়। তাহলে উহা উপরের যে কোন একটি প্রামাণ্য আকারে পড়বে।

Ex-01 $\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2}}$

Sol^n : $\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{3}x-x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}$

$=\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{3x-2}{2}+C$ **Ans.**

Ex-02 $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$

Sol^n

$\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\int\frac{dx}{x^2+6x+9+4^2}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+4^2}$

$=\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x+3}{4}+C$ **Ans.**

For practice:

01. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ **Ans.** $\sin^{-1}\frac{x-2}{2}+C$

02. $\int\frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$ **Ans.** $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x+1}{4}+C$

03. $\int\frac{dx}{x^2-x+1}$ **Ans.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

Type-03

➲ যদি কোন ইন্টিগ্রালে $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx, \int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ অথবা $\int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারে থাকে অর্থাৎ একটি একঘাত রাশি উপরে এবং একটি দ্বিঘাত রাশি বা উহার বর্গমূল নীচে বা উপরে থাকে তবে একঘাত রাশির স্থলে দ্বিঘাত রাশির অন্তরক সহগ লিখে যত x ছিল তত দিয়ে গুণ এবং যত x লিখিত হয়েছে তত দিয়ে ভাগ করতে হয়। তারপর ধ্রুবসংখ্যা balance করে আলাদা করতে হয়।

অর্থাৎ $px+q=m\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+n$ আকারে লিখতে হবে যেখানে m, n ধ্রুবক।

Ex-01 $\int\frac{(3x+2)dx}{5x^2+2x+3}$

Sol^n : $\int\frac{(3x+2)dx}{5x^2+2x+3}=\int\frac{\frac{3}{10}(10x+2)+\frac{7}{5}}{5x^2+2x+3}dx$

$=\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+2x+3\right)+\int\frac{\frac{7}{5}}{5x^2+2x+3}dx$

$=\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+2x+3\right)+\frac{7}{25}\int\frac{dx}{x^2+\frac{2x}{5}+\frac{3}{5}}$

$=\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+2x+3\right)+\frac{7}{25}\int\frac{dx}{x^2+2.x.\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{25}}$

$=\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+2x+3\right)+\frac{7}{25}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{5}\right)^2}$

$=\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+2x+3\right)+\frac{7}{25}\times\frac{5}{\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{5x+1}{\sqrt{14}}\right)+C$

$=\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+2x+3\right)+\frac{7}{5\sqrt{14}}\tan^{-1}\left(\frac{5x+1}{\sqrt{14}}\right)+C$

Ex-02 $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx$

Sol^n : $\int\frac{\frac{1}{2}(2x-3)+1+\frac{3}{2}}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+5}}dx+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2.\frac{3}{2}.x+\frac{9}{4}+5-\frac{9}{4}}}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{x^2-3x+5}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}}+C$

$=\sqrt{x^2-3x+5}+\frac{5}{2}\ln\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}\right|$

For practice:

01. $\int\frac{5x-2}{3x^2+2x+1}dx$

Ans. $\frac{5}{6}\ln\left(3x^2+2x+1\right)-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x\ldots}{\ldots}\right)$

02. $\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x-7}}$

Ans. $2\sqrt{x^2+4x-7}-3\ln\left|\left\{(x+2)+\sqrt{(x+2)^2\ldots}\right.\right.$

Type-04

➲ যদি কোন ইন্টিগ্রালে $\int\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}dx$ বা $\int\frac{dx^2+ex+f}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ldots$ $\int(dx^2+ex+f)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ এর যে কোন একটি আকা... তবে $dx^2+ex+f=A\left(ax^2+bx+c\right)+B\frac{d}{dx}\left(ax^2+b\ldots\right)+$ K আকারে লিখতে হবে যেখানে A, B, K ধ্রুবক। অতঃপর উভয় পক্ষ থেকে x^2, x ও ধ্রুবক সমীকৃত করে A, B, K বের করতে হবে।

[illegible] $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$

[illegible] $x^2+x+1 = A(x^2-x+1)+B(2x-1)+C$

[illegible] থেকে x^2, x ও x^0 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

[illegible] $-A+2B=1$; $A-B+C=1$

[illegible] $\Rightarrow 1-1+C=1 \quad \therefore C=1$

$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{(x^2-x+1)+(2x-1)+1}{x^2-x+1}dx$

$= \int \left([illegible] + \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}\right)dx$

$= [illegible] (x^2-x+1) + \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= [illegible] (x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$ **Ans.**

[illegible] $\int \frac{x^2+3x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

$\int \frac{x^2+3x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}(2x+2)-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

$= \int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$= \int \sqrt{(x+1)^2+2^2}\,dx + \frac{1}{2}2\sqrt{x^2+2x+5} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}$

$= \frac{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+2^2}}{2} + \frac{2^2}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2^2}\right|$

$+ \sqrt{x^2+2x+5} - 3\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2^2}\right| + C$

$= \frac{x+3}{2}\sqrt{x^2+2x+5} - \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$ **Ans**

For practice:

[illegible] $\int \frac{[illegible] - 11x + 26}{[illegible] + 2x + 5}dx$ **Ans:** $5x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + C$

[illegible] $\int \frac{[illegible] + 5x - 9}{\sqrt{[illegible] - x + 1}}dx$ **Ans.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + 7\sqrt{x^2-x+1}$

$-\frac{15}{2}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right] + C$

Type-05

[illegible] $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$ বা $\int (ax+b)\sqrt{cx+d}\,dx$ বা $\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}dx$

বা $\int \frac{cx+d}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}dx$ বা $\int \frac{ex^2+fx+g}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}dx$ আকারের

[illegible] ইন্টিগ্রালে $cx+d = z^2$ ধরতে হবে।

Ex-01 $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$

Solⁿ : $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+1}}$ | মনে করি, $x+1 = z^2$ $\therefore dx = 2zdz$

$= \int \frac{2zdz}{(z^2-4)z} = 2\int \frac{dz}{z^2-2^2} = 2.\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}\right| + C$ **Ans.**

Ex-02 $\int \frac{(x^2+x)dx}{(x+2)\sqrt{x-1}}$

Solⁿ : $\int \frac{(x^2+x)dx}{(x+2)\sqrt{x-1}} = \int \frac{(z^2+1)^2+z^2+1}{z(z^2+3)}2z\,dz$ | ধরি, $x-1 = z^2$, $x = z^2+1$, $\therefore 2zdz = dx$

$= 2\int \frac{z^4+3z^2+2}{z^2+3}dz = 2\int z^2 + 4\int \frac{1}{z^2+3}dz$

$= \frac{2}{3}z^3 + 4.\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}} + C$

$= \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{3}} + C$ **Ans.**

For practice:

01. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x}}$ **Ans.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + C$

02. $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x+3}}$ **Ans.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{7}}\right| + C$

03. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}$ **Ans.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}\right| + C$

Type-06

⇒ $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে $px+q = \frac{1}{z}$ ধরতে হবে।

Ex-01 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$

Solⁿ :

$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$ | ধরি, $1+x = \frac{1}{z}$ $\Rightarrow x = \frac{1}{z} - 1$ $\Rightarrow dx = -\frac{1}{z^2}dz$

$= \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{1+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}}$

$= -\int \frac{dz}{z\sqrt{2-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{2z^2-2z+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-z+\frac{1}{2}}}$

$= \frac{-1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}+C$$

$$= C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\{z-\frac{1}{2}+\sqrt{z^2-z+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\{\frac{1-x}{2(x+1)}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}\,(x+1)}\right\}$$ **Ans.**

For practice:

01. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$

Ans. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left[\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}}\right]+C$

02. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$

Ans. $\frac{2}{7}\left(\sqrt{x-1}\right)^7+\frac{6}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+2\left(\sqrt{x-1}\right)^3+2\sqrt{x-1}+C$

03. $\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+1}}$ **Ans:** $-\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}(5z+2)+C$ যেখানে $z=\frac{1}{x-2}$

Type-07

➲ $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)\sqrt{px+q}}$ আকারের ইন্টিগ্রালে $px+q=z^2$ ধরে সরল করতে হবে।

Ex-01 $\int\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x+1}}$

Sol^n: $\int\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x+1}}$ | ধরি, $x+1=z^2$ $\therefore dx=2zdz$

$$=\int\frac{2zdz}{\left\{(z^2-1)^2-4\right\}z}=2\int\frac{dz}{(z^2+1)(z^2-3)}=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{z^2-3}-\frac{1}{z^2+1}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-3}-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}z+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x+1}+C$$ **Ans.**

For practice:

01. $\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x-1}}$ **Ans:** $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{2}}+C$

Type-08

➲ $\int\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}$ আকারের ইন্টিগ্রালে লবকে এবং $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}}$ আকারের ইন্টিগ্রালে হরকে $\sqrt{\ }$ মুক্ত করতে হবে।

Ex-01 $\int\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}dx$

Sol^n: $\int\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}dx=\int\frac{5-x}{\sqrt{25-x^2}}dx=\int\frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}}-\int\frac{x\ldots}{\sqrt{25-\ldots}}$

$$=5\sin^{-1}\frac{x}{5}+\frac{1}{2}\int\frac{(-2x)dx}{\sqrt{25-x^2}}=5\sin^{-1}\frac{x}{5}+\sqrt{25-x^2}+C$$

Ex-02 $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+5}}$

Sol^n: $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+5}}$

$$=\int\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}}{(2x+3)-(2x+5)}dx=-\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}\right)\ldots$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{(2x+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}\times2}-\frac{(2x+5)^{3/2}}{\frac{3}{2}\times2}\right\}+C$$

$$=-\frac{1}{6}\left\{(2x+3)^{3/2}-(2x+5)^{3/2}\right\}+C$$

For practice:

01. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ **Ans.** $\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(x\ldots$

02. $\int\sqrt{\frac{a+x}{x}}dx$ **Ans:** $\sqrt{x(x+a)}+a\ln\left|\sqrt{x+a}\ldots\right.$

Type-09

➲ (i) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে $x-\alpha=z^2$ বা $x-\beta=z^2$ বা $\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}=z$ ধরতে হবে।

Ex-01 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)(x-4)}}$

Sol^n: $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)(x-4)}}=\int\frac{2dz}{z}$

$$=2\ln z=2\ln\left|\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}\right|+C$$

For practice:

01. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-5)(x-6)}}$ **Ans.** $2\ln\left|\sqrt{x-5}+\ldots\right.$

(ii) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ আকারের ইন্টিগ্রেশন $(\alpha<x<\beta)$ থাকলে $x-\alpha=z^2$ বা $\beta-x=z^2$ ধরতে হবে।

Ex-01 $\int\frac{dx}{(x-2)(3-x)}$ ধরি, $x-2=z^2 \Rightarrow x=z^2+2$, $dx=2zdz$

Sol^n: $\int\frac{dx}{(x-2)(3-x)}=\int\frac{2zdz}{\sqrt{z^2(3-z^2-2)}}$

$$=\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=2\sin^{-1}z+c=2\sin^{-1}\left(\sqrt{x-2}\right)+C$$

practice:

$\frac{dx}{\ldots(x-2)}$ Ans. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{2}\right)+C$

Type-10

$\frac{dx}{\ldots}$ এবং $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}$ আকারের ইন্টিগ্রালের ১ম ক্ষেত্রে $x^n=\frac{1}{u}$ ... ক্ষেত্রে $x^n=\frac{1}{u^2}$ ধরতে হবে।

$\int\frac{dx}{x(4+10x^{20})}$ এর মান নির্ণয় কর।

ধরি, $x^{20}=\frac{1}{u}\Rightarrow 20x^{19}dx=-\frac{1}{u^2}du \quad \therefore x^{19}dx=-\frac{1}{20u^2}du$

$\int\frac{dx}{x(4+10x^{20})}=\int\frac{x^{19}dx}{x^{20}(4+10x^{20})}=\int\frac{-\frac{1}{20u^2}du}{\frac{1}{u}\left(4+10\frac{1}{u}\right)}$

$=-\frac{1}{20}\int\frac{du}{4u+10}=-\frac{1}{40}\int\frac{du}{2u+5}=-\frac{1}{80}\ln|2u+5|+C$

$=-\frac{1}{80}\ln|2x^{-20}+5|+C$ Ans.

practice:

$\frac{dx}{\ldots\sqrt{x}}$ Ans. $-3\sqrt{2}\ln\left|x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}}\right|+C$

Type-11

$\frac{x^m dx}{(a+bx)^n}$ বা $\int\frac{(a'+b'x)^m}{(a+bx)^n}dx$ আকারের ইন্টিগ্রালের ক্ষেত্রে ... ধনাত্মক সংখ্যা) a + bx = u ধরে প্রতিস্থাপন করতে হবে।

ইন্টিগ্রেট কর: $\int\frac{x}{a+5x}dx$

ধরি, $a+5x=u\Rightarrow x=\frac{u-a}{5}\Rightarrow du=5\,dx$

$\int\frac{x}{a+5x}dx=\int\frac{\frac{u-a}{5}}{u}\cdot\frac{1}{5}du=\frac{1}{25}\int(1-au^{-1})du$

$=\frac{1}{25}[u-a\ln|u|]+C=\frac{1}{25}[(a+5x)-a\ln|a+5x|]+C$ Ans.

practice:

$\frac{x^2dx}{(2+3x)^2}$

Ans: $\frac{1}{81}\left\{\frac{z^2}{2}-6z+12\ln|z|+\frac{8}{z}\right\}+C$ যেখানে, $z=2+3x$

Type-12

$\frac{dx}{(x-a)^p(x-b)^q}$ p ও q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $a\neq b$, আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে $z=\frac{x-a}{x-b}$ ধরতে হবে।

Ex-07 $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$

Solⁿ: $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$

ধরি, $z=\frac{x-1}{x-2}$

$\Rightarrow x=\frac{1-2z}{1-z}$

$\therefore dx=\frac{-dz}{(1-z)^2}$

$=\int\frac{\frac{dz}{-(1-z)^2}}{\left(\frac{1-2z}{1-z}-1\right)^2\left(\frac{1-2z}{1-z}-2\right)^3}$

$=\int\frac{-(1-z)^3dz}{(-z)^2(-1)^3}=\int\frac{1-3z+3z^2-z^3}{z^2}dz=\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{3}{z}+3-z\right)dz$

$=-\frac{1}{z}-3\ln|z|+3z-\frac{z^2}{2}+c$

$=-\frac{x-2}{x-1}-3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+3\left(\frac{x-1}{x-2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2+C$ Ans.

For practice:

01. $\int\frac{dx}{(x-1)^3(x-2)^2}$

Ans. $3\left(\frac{x-2}{x-1}\right)-3\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{x-1}{x-2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2+C$

Type-13

➲ $\int\frac{dx}{x^m(ax+b)^n}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে, $m+n\in N$ এবং $m+n\geq 2$ হয় তবে $ax+b=zx$ ধরতে হবে।
(যেখানে $m\in N$)

Ex-01 $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}$

Solⁿ: $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}$ [ধরি $x+1=zx\Rightarrow 1+\frac{1}{x}=z\Rightarrow\frac{dx}{x^2}=-dz$]

$=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(zx)^{\frac{5}{3}}}=\int\frac{dx}{x^2z^{\frac{5}{3}}}=-\int\frac{dz}{z^{\frac{5}{3}}}=\frac{3}{2}\frac{1}{z^{\frac{2}{3}}}+C=\frac{3}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}+C$ Ans.

For practice:

01. $\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{2-x}}$ Ans. $-\sqrt{\frac{2-x}{x}}+C$

Type-14

➲ $\int\frac{dx}{ae^{mx}+b}$, $\int\frac{ce^{mx}+d}{ae^{mx}+b}dx$ আকারের ইন্টিগ্রালের প্রথমটির ক্ষেত্রে, লব ও হরকে e^{-mx} গুন করে তারপর হর = z ধরতে হবে এবং দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে, $ce^{mx}+d=M(ae^{mx}+b)+Ne^{mx}$ আকারে প্রকাশ করতে হবে যেখানে M, N ধ্রুবক।

Ex-01 $\int\frac{dx}{1+e^x}$

Solⁿ: $=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=\int\frac{-dz}{z}$

ধরি, $1+e^{-x}=z$
$\Rightarrow -dz=e^{-x}dx$

$=-\ln|z|+C=-\ln(1+e^{-x})+C$ Ans.

Ex-02 $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$

Solⁿ : $= \int \frac{e^{4x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{e^{x}+e^{-x}}dx = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}+C$ **Ans.**

Ex-03 $\int \frac{4e^{x}+6e^{-x}}{9e^{x}-4e^{-x}}dx$

Solⁿ : $\int \frac{4e^{x}+6e^{-x}}{9e^{x}-4e^{-x}}dx = \int \frac{4e^{2x}+6}{9e^{2x}-4}dx = \int \frac{\frac{4}{9}\left(9e^{2x}-4\right)+\frac{70}{9}}{9e^{2x}-4}dx$

$= \frac{4}{9}\int dx + \frac{70}{9}\int \frac{1}{9e^{2x}-4}dx = \frac{4}{9}x + \frac{70}{9}\int \frac{e^{-2x}}{9-4e^{-2x}}dx$

$= \frac{4}{9}x - \frac{70}{9}\int \frac{e^{-2x}dx}{4e^{-2x}-9}dx$

[ধরি, $4e^{-2x}-9 = z \Rightarrow -8e^{-2x}dx = dz \Rightarrow e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{8}dz$]

$= \frac{4}{9}x + \frac{70}{72}\int \frac{dz}{z} = \frac{4}{9}x + \frac{35}{36}\ln|z| + C = \frac{4}{9}x + \frac{35}{36}\ln|4e^{-2x}-9| + C$

Ans.

For practice:

01. $\int \frac{2e^{x}+5}{5e^{x}+2}dx$ **Ans.** $\frac{2x}{5} - \frac{21}{10}\ln\left(5+2e^{-x}\right)+C$

Type-15

➲ $\int \frac{d\,x^{\frac{p}{q}}+e\,x^{\frac{r}{s}}+f+\cdots}{a\,x^{\frac{h}{l}}+b\,x^{\frac{m}{n}}+c+\cdots}dx$ আকারের ইন্টিগ্রালের ক্ষেত্রে q, s, l ও n এর ল.সা.গু k হলে $x = z^{k}$ ধরতে হবে যেখানে q, s, l, n ∈ N।

Ex-01 $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$

Solⁿ: $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4z^{3}dz}{z^{2}-z}$ | ধরি, $x = z^{4}$, $dx = 4z^{3}dz$

$= \int \frac{4z^{2}dz}{z-1} = 4\int \frac{z^{2}-1+1}{z-1}dz = 4\int (z+1)dz + 4\int \frac{dz}{z-1}$

$= 4\left(\frac{z^{2}}{2}+z\right) + 4\ln|z-1| + C = 2z^{2} + 4z + 4\ln|z-1| + C$

$= 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x}-1| + C$ **Ans.**

Ex-02 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

Solⁿ : $\int \frac{z^{3}.6z^{5}dz}{1+z^{2}} = 6\int \frac{z^{8}dz}{1+z^{2}}$ | ধরি, $x = z^{6}$ ∴ $dx = 6z^{5}dz$

$= 6\int \frac{z^{6}\left(z^{2}+1\right) - z^{4}\left(z^{2}+1\right) + z^{2}\left(z^{2}+1\right) - 1\left(z^{2}+1\right) + 1}{1+z^{2}}dz$

$= 6\int (z^{6} - z^{4} + z^{2} - 1)\,dz + 6\int \frac{1}{1+z^{2}}dz$

$= \frac{6}{7}z^{7} - \frac{6}{5}z^{5} + \frac{6}{3}z^{3} - 6z + 6\tan^{-1}z + C$

$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\tan^{-1}(x^{\frac{1}{6}}) + C$

For practice:

01. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}}}$ **Ans.** $2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{6}} + 3\ln|x^{\frac{1}{6}}-1| - 3\ln x^{\frac{1}{6}} + \ldots$

02. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{2}{4}}}$ **Ans.** $\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln(\ldots\right.$

Type-16

➲ $\int \frac{dx}{(a\,x^{2}+b)\sqrt{c\,x^{2}+d}}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে $c\,x^{2}+d = \ldots$ $\frac{c\,x^{2}+d}{a\,x^{2}+b} = z^{2}$ বা $x = \frac{1}{y}$ বসিয়ে তারপর $c + d\,y^{2} = z^{2}$ ধরতে হবে

Ex-01 $\int \frac{dx}{(x^{2}+1)\sqrt{x^{2}+4}}$

Solⁿ: $\int \frac{dx}{(x^{2}+1)\sqrt{x^{2}+4}} = \int \frac{dx}{(x^{2}+1)\sqrt{z^{2}x^{2}}} = \int \frac{\frac{dx}{x^{3}}}{\left(1+\frac{1}{x^{2}}\right)z}$

[ধরি $x^{2}+4 = z^{2}x^{2} \Rightarrow 1+\frac{4}{x^{2}} = z^{2} \Rightarrow \frac{1}{x^{2}} = \frac{z^{2}-1}{4} \Rightarrow \frac{dx}{x^{3}} = \ldots$

$= -\frac{1}{4}\int \frac{zdz}{\left(1+\frac{z^{2}-1}{4}\right)z} = -\int \frac{dz}{z^{2}+3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + C$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^{2}+4}}{\sqrt{3}\,x}\right) + C$

For practice:

01. $\int \frac{dx}{(x^{2}+4)\sqrt{x^{2}+2}}$ **Ans.** $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2x^{2}+4}-\ldots}{\sqrt{2x^{2}+4}-\ldots}\right.$

Type-17

➲ $\int \frac{dx}{(a\,x^{2}+b)^{\frac{n}{2}}}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে $a\,x^{2} + b = z^{2}x^{2}$ ...
(যেখানে n ধনাত্মক বিজোড় সংখ্যা)

Ex-01 $\int \frac{dx}{(x^{2}+a^{2})^{\frac{3}{2}}}$

Solⁿ: $\int \frac{dx}{(x^{2}+a^{2})^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{(z^{2}x^{2})^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{z^{3}x^{3}}$

[ধরি $x^{2}+a^{2} = z^{2}x^{2} \Rightarrow 1+\frac{a^{2}}{x^{2}} = z^{2} \Rightarrow \frac{1}{x^{2}} = \frac{z^{2}-1}{a^{2}} \Rightarrow \frac{dx}{x^{3}} = \ldots$

$= -\frac{1}{a^{2}}\int \frac{z\,dz}{z^{3}} = -\frac{1}{a^{2}}\int \frac{dz}{z^{2}} = \frac{1}{a^{2}}\frac{1}{z} + C = \frac{1}{a^{2}}\frac{x}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}} + C$

For practice:

$\int \frac{dx}{(x^2+5)^{\frac{7}{2}}}$ Ans. $\frac{1}{125}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} - \frac{2}{3}\frac{1}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5}\frac{1}{(x^2+25)^{\frac{5}{2}}}\right] + C$

Type-18

$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax^2+b}}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে $ax^2+b=z^2x^2$ ধরতে হবে। (যেখানে $n \in N$)

Ex: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

Sol: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{dx}{x^4\sqrt{z^2x^2}} = \int\frac{dx}{zx^5}$

[ধরি $x^2-1=z^2x^2 \Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}=z^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=1-z^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}z\,dz$]

$= \int\frac{1}{z}\frac{1}{x^2}\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{z}(1-z^2)z\,dz = \frac{1}{2}\int(1-z^2)\,dz = z-\frac{z^3}{3}+C$

$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C$ Ans.

For practice:

$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$ Ans. $C-\frac{\sqrt{x^2+1}}{15x}\left(8-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)$

Type-19

$\int\frac{x^{2m+1}dx}{\sqrt{ax^2+b}}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে $ax^2+b=z^2$ ধরতে হবে। (যেখানে $m \in N$)

Ex: $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Sol: $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\frac{x^2(xdx)}{\sqrt{1-x^2}}$ [ধরি $1-x^2=z^2 \Rightarrow x^2=1-z^2 \Rightarrow xdx=-z\,dz$]

$= -\int\frac{(1-z^2)z\,dz}{z} = \int(z^2-1)\,dz = \frac{z^3}{3}-z+C$

$= \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{1-x^2}+C$ Ans.

For practice:

$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Ans. $C-\sqrt{1-x^2}+\frac{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}$

Type-20

$\int\frac{(ax^2+c)dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}, \int\frac{(ax^2-c)dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}, \int\frac{dx}{a^2x^4+bx^2+c^2};$

$\int\frac{x^2dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে ১ম ও ২য় ইন্টিগ্রালের ক্ষেত্রে লব ও হরকে x^2 দ্বারা ভাগ করে বীজগণিতীয় সূত্র ভেঙে প্রতিস্থাপন করতে হবে এবং ৩য় ও ৪র্থ ইন্টিগ্রালের ক্ষেত্রে যথাক্রমে

$$\int\frac{dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}=\frac{1}{2c}\left[\int\frac{(ax^2+c)dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}-\int\frac{(ax^2-c)dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}\right]$$

ও $\int\frac{x^2dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{(ax^2+c)dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}+\int\frac{(ax^2-c)dx}{a^2x^4+bx^2+c^2}\right]$

আকারে প্রকাশ করে যথাক্রমে ১ম ও ২য় ইন্টিগ্রালের নিয়ম অনুসরণ করতে হবে।

Ex-01 $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$

Sol^n: $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1} - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{2}\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

$= \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3} - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-1}$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + C$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}\right) - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + C$ Ans.

For practice:

01. $\int\frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$ Ans. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}\right) + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + C$

Type-21

$\int\frac{(x^2\mp 1)dx}{a^2x^4+bx^3+cx^2\pm bx+a}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে হর ও লবকে x^2 দ্বারা ভাগ করে তারপর $x\pm\frac{1}{x}=z$ ধরতে হবে।

Ex-01 $\int\frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+6x^3+7x^2+6x+1}$

Sol^n: $\int\frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+6x^3+7x^2+6x+1} = \int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+7}$

$= \int\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+5} = \int\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)}$

$= \frac{1}{4}\int\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x+\frac{1}{x}+1} - \frac{1}{4}\int\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x+\frac{1}{x}+5}$

$= \frac{1}{4}\ln\left|x+\frac{1}{x}+1\right| - \frac{1}{4}\ln\left|x+\frac{1}{x}+5\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2+5x+1}\right| + C$ Ans.

For practice:

01. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+6x^3+7x^2-6x+1}$ Ans: $C - \frac{x}{x^2+3x+1}$

Type-22

➲ $\int \frac{x^{2m}\,dx}{(ax^2+b)^{\frac{n}{2}}}$ এবং $\int \frac{dx}{x^{2m}(ax^2+b)^{\frac{n}{2}}}$ আকারের ইন্টিগ্রাল থাকলে প্রত্যেকটি ইন্টিগ্রালের জন্য $ax^2+b=zx^2$ ধরতে হবে অথবা $x=\frac{1}{y}$ ধরে পরবর্তীতে $a+by^2=z$ ধরতে হবে । (যেখানে $m,n\in N$)

Ex-01 $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

Sol^n : $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \int \frac{x^2\,dx}{(zx^2)^{\frac{5}{2}}}$

[ধরি $x^2+1=zx^2 \Rightarrow 1+\frac{1}{x^2}=z$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2}=z-1 \Rightarrow \frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}dz$]

$= \int \frac{dx}{x^3 z^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}+C = \frac{1}{3}\frac{x^3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}+C$ Ans.

For practice:

01. $\int \frac{dx}{x^4(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ Ans: $\frac{\sqrt{x^2-1}\,(12x^2-1)}{3x^3}+C$

Type-23

➲ যদি $\int x^m(a+bx^n)^p$ আকারের ইন্টিগ্রাল এবং m, n, p আনুপাতিক সংখ্যা হয় তবে

(i) $p\in N$ -এর জন্য $(a+bx^n)^p$ কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তার করে x^m দ্বারা গুন করার পর ইন্টিগ্রেশন করতে হবে ।

(ii) $p=$ ভগ্নাংশ -এর জন্য ধরি $p=\frac{r}{s}$ যখন $r\in Z$ এবং $s\in Z^+$

১ম ক্ষেত্র : $\frac{m+1}{n}\in Z$ হলে $a+bx^n=z^s$ ধরে সরলীকরন করার পর ইন্টিগ্রেশন করতে হবে ।

২য় ক্ষেত্র : $\frac{m+1}{n}\notin Z$ হলে উপরের নিয়ম প্রযোজ্য নয় ।

এই ক্ষেত্রে : $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}\in Z$ হলে $a+bx^n=z^s x^n$ ধরে সরলীকরন করার পর ইন্টিগ্রেশন করতে হবে ।

Ex-01 $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}\,dx}{x^5}$

Sol^n : $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}\,dx}{x^5} = \int \frac{\sqrt[3]{z^3x^3}}{x^5}dx = \int \frac{z}{x^4}dx = -\int z.z^2dz$

[এখানে, $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=\frac{-5+1}{3}+\frac{1}{3}=-1\in Z$ সুতরাং ধরি $1+x^3=z^3x^3$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{x^3}=z^3 \Rightarrow \frac{1}{x^3}=z^3-1 \Rightarrow \frac{dx}{x^4}=-z^2dz$]

$= -\frac{z^4}{4}+C = -\frac{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}{4x^4}+C$ Ans.

For practice:

01. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^2)^{\frac{5}{4}}}$ Ans: ...

Type-24 : ত্রিকোণমিতিক প্রতিস্থাপন

01. যদি কোন ইন্টিগ্রালে a^2-x^2 যুক্ত term থাকলে যেমন- ... $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ ইত্যাদি আকারে থাকে তবে $x=a\sin\theta$ বা ... সরল করার পর ইন্টিগ্রেট করতে হবে ।

02. কোন ইন্টিগ্রালে a^2+x^2 যুক্ত term থাকে । যেমন- $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ইত্যাদি আকার থাকে তবে $x=a\tan\theta$ বা $a\cot\theta$ ...

03. কোন ইন্টিগ্রালে x^2-a^2 যুক্ত term থাকে ।
যেমন $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$ ইত্যাদি আকারে থাকে তবে $x=$ ... $a\text{cosec}\theta$ ধরা হয় ।

04. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$ বা $\int\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx$ আকারের ক্ষেত্রে $x=$ ... হবে ।

05. $\int\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\,dx$ বা $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$ আকারের ক্ষেত্রে $x=$ ... হবে ।

Ex-01 $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Sol^n : $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$= \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$

মনে করি,
$x=a\tan\theta$
$\therefore dx = a\sec^2\theta d\theta$

$= \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^3\sec^3\theta} = \int \frac{d\theta}{a^2\sec\theta} = \frac{1}{a^2}\int\cos\theta d\theta$



$= \frac{1}{a^2}\sin\theta + C = \frac{1}{a^2}\sin\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)+C$

$= \frac{1}{a^2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)+C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$

For practice:

01. $\int\sqrt{16-9x^2}\,dx$ Ans. $\frac{8}{3}\left[\sin^{-1}\frac{3x}{4}+\frac{3x}{16}\sqrt{16-9x^2} ...\right.$

02. $\int\sqrt{1-a^2x^2}\,dx$ Ans. $\frac{1}{2a}\sin^{-1}ax+\frac{x}{2}\sqrt{1-a^2x^2} ...$

Type-25

... ইন্টিগ্রালে sine এবং cosine গুণ আকারে থাকে তবে ইন্টিগ্রেট ... পূর্বে উহাদেরকে যোগ বা বিয়োগ ফল রূপে প্রকাশ করতে হয়।

$\int 3\sin 3x \cos 4x dx$

$\int 3\sin 3x \cos 4x dx = \frac{3}{2}\int 2\sin 3x \cos 4x dx$

$= \frac{3}{2}\int(\sin 7x - \sin x)dx = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x\right) + C$

$= \frac{3}{14}(7\cos x - \cos 7x) + C$ **Ans.**

For practice:

... cosqx dx Ans: $-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(p+q)x}{p+q} + \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\right\} + C$

Type-26

$\int\frac{p\cos x + q\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx, \int\frac{p\cos x + q\sin x + r}{a\cos x + b\sin x + c}dx$ আকারের ইন্টিগ্রাল-

... ক্ষেত্রে: প্রথম ইন্টিগ্রালের জন্য: লব = L × হর + M × হরের অন্তরক ... করতে হবে। sinx ও cosx এর সহগ সমীকৃত করে L ও M নির্ণয় ... হবে।

... ক্ষেত্রে: দ্বিতীয় ইন্টিগ্রালের জন্য: L × হর + M × হরের অন্তরক সহগ ... করতে হবে। sinx ও cosx এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে L, ... নির্ণয় করতে হবে।

$\int\frac{1+2\cos x}{1+2\sin x}dx$

$= \int\frac{1+2\cos x}{1+2\sin x}dx$

$= \int\frac{dx}{1+2\sin x} + \int\frac{2\cos x}{1+2\sin x}dx$

$= \int\frac{1}{1+2\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx + \ln|1+2\sin x|$

$= \int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{1+\tan^2\frac{x}{2}+4\tan\frac{x}{2}} + \ln|1+2\sin x|$

$z = \tan\frac{x}{2} \therefore dz = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$

$= \int\frac{2dz}{1+z^2+4z} + \ln|1+2\sin x| + C$

$= 2\int\frac{dz}{(z+2)^2-3} + \ln(1+2\sin x) + C$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{z+2-\sqrt{3}}{z+2+\sqrt{3}}\right| + \ln|1+2\sin x| + C$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}\right| + \ln|1+2\sin x| + C$ **Ans.**

Ex-02 $\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$

Sol^n: ধরি, $I = \int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$

$\therefore 1-\sin x+\cos x = L(1+\sin x-\cos x) + M(\cos x+\sin x) + N$

উভয় পক্ষ হতে sinx, cosx ও ধ্রুবকপদ সমীকৃত করে পাই, $L+N=1$, $L+M=-1$, $M-L=1$

$\therefore$ সমাধান করে পাই, $L=-1, M=0; N=2.$

$\therefore \int\frac{-(1+\sin x-\cos x)+0(\cos x+\sin x)+2}{(1+\sin x-\cos x)}dx$

$= -\int dx + 2\int\frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx$

$= -x + 2\int\frac{dx}{1+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$

$= -x + 2\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{2\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}$

ধরি, $z = \tan\frac{x}{2}$, $dz = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$

$= -x + 2\int\frac{dz}{z^2+z}$

$= -x + 2\int\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz = -x + 2\ln|z| - 2\ln|z+1| + C$

$= -x + 2\ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + C = -x + 2\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|$ **Ans.**

For practice:

01. $\int\frac{2\sin x+3\cos x}{7\sin x-2\cos x}dx$

Ans. $\frac{8x}{53} + \frac{25}{53}\ln|7\sin x - 2\cos x| + C$

Type-27

➲ $\int\sin^n x dx, \int\cos^n x dx$ আকারের ইন্টিগ্রাল

1. n বিজোড় হলে

i. $\int\cos^n x dx$ আকারের ইন্টিগ্রালে cosxdx ছাড়া বাকি $\cos^{n-1}x$ কে sinx এ পরিবর্তন করতে হয় এবং $\sin x = z$ বসাতে হয়।

ii. $\int\sin^n x dx$ আকারের ইন্টিগ্রালে sinxdx ছাড়া বাকি $\sin^{n-1}x$ কে cosx এ পরিবর্তন করতে হয় এবং $\cos x = z$ বসাতে হয়।

2. n জোড় হলে

প্রদত্ত ফাংশনকে গুণিতক কোণে প্রকাশ করতে হয়। এ পরিবর্তনের জন্য নিচের সূত্রগুলি প্রয়োজন।

i. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

ii. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

iii. $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

iv. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

Ex-01 $\int \cos^5 x dx$

Sol^n : $\int \cos^5 x dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx$ | ধরি, $\sin x = z$ ∴ $\cos x\, dx = dz$

$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (1-z^2)^2 dz$

$= \int (1-2z^2+z^4) dz = z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + C$

$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$ **Ans.**

Ex-02 $\int \sin^4 x\, dx$

Sol^n : $\frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + C$ **Ans.**

For practice:

01. $\int \cos^4 x dx$ Ans. $\frac{1}{32}(12x + 8\sin 2x + \sin 4x) + C$

02. $\int \sin^5 x dx$ Ans. $\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$

Type-28

➲ $\int \sin^m x \cos^n x dx$ আকারের ইন্টিগ্র্যাল

1. m ও n উভয়ে বিজোড় হলে- $\sin x = z$ অথবা $\cos x = z$ বসাতে হয়।
   (i) $m > n$ হলে, $\sin x = z$ ও (ii) $m < n$ হলে, $\cos x = z$ বসানো সুবিধাজনক।
2. m জোড় ও n বিজোড় হলে, $\sin x = z$ বসাতে হয়।
3. m বিজোড় ও n জোড় হলে, $\cos x = z$ বসাতে হয়।
   অর্থাৎ সর্বদা জোড় সূচক বিশিষ্ট ফাংশনকে z ধরতে হয়।
4. m ও n উভয়ে জোড় হলে, $\sin^m x$ ও $\cos^n x$ কে গুণিতক কোণের ফাংশনে প্রকাশ করতে হয়।
5. $m + n =$ ঋণাত্মক জোড় সংখ্যা হলে, $\tan x = z$ বসাতে হয়। ফলে প্রদত্ত ইন্টিগ্র্যাল $\int z^m (1+z^2)^{-\frac{1}{2}(m+n+2)} dz$ আকার ধারণ করে।

[লক্ষণীয় : sine ফাংশনে $\cos x = z$ প্রতিস্থাপন করা হলে অনুরূপ cosine ফাংশনে $\sin x = z$ প্রতিস্থাপন করতে হবে।
যেমনঃ $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ এ $\cos x = z$ প্রতিস্থাপন প্রয়োজন এবং $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$ এ $\sin x = z$ প্রতিস্থাপন প্রয়োজন।]

Ex-01 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

Sol^n: ধরি, $I = \int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx$

$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x) \cos x dx$ [ধরি, $\sin x = z$ ∴ $\cos x dx = dz$]

∴ $I = \int z^4 (1-z^2) dz = \int (z^4 - z^6) dz$

$= \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + c = \left(\frac{1}{5}\right)\sin^5 x - \left(\frac{1}{7}\right)\sin^7 x + C$ **Ans.**

Ex-02 $\int \frac{dx}{\cos^{\left(\frac{1}{3}\right)} x \sin^{\left(\frac{5}{3}\right)} x}$

Sol^n: [ধরি, $\tan x = z$ ∴ $\sec^2 x dx = dz$]

$\int \frac{dx}{\cos^{\left(\frac{1}{3}\right)} x \sin^{\left(\frac{5}{3}\right)} x} = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^{\left(\frac{5}{3}\right)} x} dx$

$= \int \frac{dz}{z^{\frac{5}{3}}} = \int z^{-\frac{5}{3}} dz = \frac{z^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = -\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{z^{\frac{2}{3}}} + C$

$= -\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\tan^{\frac{2}{3}} x} + C = -\left(\frac{3}{2}\right)\cot^{\frac{2}{3}} x + C$

এখানে $m = -\frac{1}{3}$ ও $n = -\frac{5}{3}$ কাজেই $m + n = -\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{5}{3}\right)$ = ... একটি ঋণাত্মক জোড় সংখ্যা। সুতরাং যোগজ নির্ণয়ের জন্য ... বসাতে হয়েছে।

For practice:

01. $\int \frac{dx}{\sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{\frac{7}{2}} x}$ Ans. $2\sqrt{\tan x} + \frac{2}{5}\tan ...$

02. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ Ans. $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 ...$

Type-29

➲ $\int \frac{dx}{a + b\cos x}, \int \frac{dx}{a + b\sin x}, \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$

$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$ আকারের ইন্টিগ্র্যাল

নিয়ম : $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ ব্যবহার করে...

এরপর লব ও হরকে $1+\tan^2\frac{x}{2}$ দ্বারা গুণ করলে লবে $\sec^2\frac{x}{2}$ ... যায় এবং হরে $\tan\frac{x}{2} = z$ বসাতে হয়।

Ex-01 $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

Sol^n : $\int \frac{dx}{5 + 4 \times \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$

$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2} dx}{5 + 5\tan^2\frac{x}{2} + 4 - 4\tan^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2} dx}{9 + \tan^2\frac{x}{2}}$ | ধরি, $z = \tan\frac{x}{2}$, $2dz = \sec^2\frac{x}{2} dx$

$= \int \frac{2dz}{3^2 + z^2} = 2.\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{z}{3} + C = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{3}\right) + C$

For practice:

$\frac{dx}{\ldots 2\sin x + \cos x}$ Ans. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)+C$

$\frac{dx}{\ldots \sin x}$ Ans. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

Type-30

$\int\frac{dx}{a+b\cos^2x}, \int\frac{dx}{a+b\sin^2x}, \int\frac{dx}{a+b\cos^2x+c\sin^2x}$

$\int\frac{dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}$ আকারের ইন্টিগ্রালের ক্ষেত্রে লব ও হরকে $\cos^2x$ বা $\sin^2x$ দ্বারা ভাগ করতে হবে ।

Ex $\int\frac{dx}{3+5\cos^2x+9\sin^2x}$

$\int\frac{dx}{3+5\cos^2x+9\sin^2x}=\int\frac{\sec^2x\,dx}{3\sec^2x+5+9\tan^2x}$

[লব ও হরকে $\cos^2x$ দ্বারা ভাগ করে]

$=\int\frac{d(\tan x)}{12\tan^2x+8}=\frac{1}{12}\int\frac{d(\tan x)}{\tan^2x+\frac{2}{3}}=\frac{1}{4\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$

Ans.

For practice:

$\int\frac{dx}{\ldots\cos^2x+9\sin^2x}$ Ans. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{2}\right)+C$

Type-31

$\int\frac{\sin 2x\,dx}{a+b\cos^2x}, \int\frac{\sin 2x\,dx}{a+b\sin^2x}, \int\frac{\sin 2x\,dx}{a+b\cos^2x+c\sin^2x}$

$\int\frac{\sin 2x\,dx}{a\cos^2x+b\sin^2x}$ আকারের ইন্টিগ্রালের ক্ষেত্রে হর = z ধরতে হবে ।

Ex $\int\frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2x+2\sin^2x}$

Sol^n: $\int\frac{\sin 2x dx}{1+\cos^2x+2\sin^2x}$

$=\int\frac{dz}{z}=\ln(1+\cos^2x+2\sin^2x)+C$

[$1+\cos^2x+2\sin^2x=z\Rightarrow \sin 2x\,dx=dz$]

Ans.

For practice:

$\int\frac{\sin 2x dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$ Ans: $\frac{1}{b^2-a^2}\ln(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)+C$

Type-32

➲ $\int\sec^n x, \int\operatorname{cosec}^n x$ আকারের ইন্টিগ্রাল

নিয়ম ঃ 1. যখন n = +ve জোড় সংখ্যা তখন $\sec^n x$ কে tanx এ ও $\operatorname{cosec}^n x$ কে cotx এ ফাংশন হিসেবে প্রকাশ করতে হয় ।

2. যখন n = +ve বিজোড় সংখ্যা তখন $\int\sec^n x dx$ বা $\int\operatorname{cosec}^n x dx$ কে u-v method এ ইন্টিগ্রেট করতে হয় (আংশিক সমাকলন) ।

Ex-01 $\int\sec^6 x dx=\int\sec^4 x\sec^2 x dx$

$=\int(1+\tan^2 x)^2\sec^2 x dx$

Sol^n: [ধরি, tanx = z, $\sec^2x dx = dz$]

$I=\int(z^2+1)^2dz=\int(z^4+2z^2+1)dz=\frac{1}{5}z^5+\frac{2}{3}z^3+z+C'$

$=\frac{1}{5}\tan^5x+\frac{2}{3}\tan^3x+\tan x+C$ Ans.

Ex-02 $\int\operatorname{cosec}^3 x dx$

Sol^n: $\int\operatorname{cosec}^3 x dx=\int\operatorname{cosec}x\operatorname{cosec}^2 x dx$

$=-\operatorname{cosec}x\cot x-\int\operatorname{cosec}x\cot x\cot x dx$

$=-\operatorname{cosec}x\cot x-\int\operatorname{cosec}x(\operatorname{cosec}^2x-1)dx$

$=-\operatorname{cosec}x\cot x-\int\operatorname{cosec}^3 x dx+\int\operatorname{cosec}x dx$

$\Rightarrow 2\int\operatorname{cosec}^3 x dx=-\operatorname{cosec}x\cot x+\int\operatorname{cosec}x dx$

$\Rightarrow 2\int\operatorname{cosec}^3 x dx=-\operatorname{cosec}x\cot x+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

$\therefore \int\operatorname{cosec}^3 x dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\operatorname{cosec}x\cot x\right]+C$ Ans.

Ex-03 ইন্টিগ্রেট কর: $\int\sec^4 x dx$

Sol^n: $\int\sec^4 x dx=\int(1+\tan^2x)\sec^2 x dx$

$=\int\sec^2 x dx+\int\sec^2x\tan^2 x dx=\tan x+\int z^2dz$

[ধরি, tan x = z, dz = $\sec^2x$ dx]

$=\tan x+\frac{1}{3}z^3+C$

$=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3x+C$ Ans.

For practice:

01. $\int\sec^3 x dx$ Ans. $\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$

02. $\int\sec^6 x dx$ Ans. $\frac{1}{5}\tan^5x+\frac{2}{5}\tan^3x+\tan x+C$

Type-33

➲ $\int \tan^n x\,dx, \int \cot^n x\,dx$ আকারের ক্ষেত্রে

নিয়ম : $\int \tan^n x\,dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx$

প্রথম অংশে $\tan x = z$ ধরে $\sec^2 x\,dx = dz$ বসিয়ে শেষ হয়। দ্বিতীয় অংশে $\int \tan^{n-2} x\,dx$ কে পুনরায় একই নিয়মে করতে হয়।

Ex-01 $\int \tan^5 x\,dx$

Sol^n : $\int \tan^5 x\,dx = \int \tan^3 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^3 x\,dx$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x \sec^2 x\,dx + \int \tan x\,dx$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$ **Ans.**

Ex-02 $\int \cot^7 x\,dx$

Sol^n : $\int \cot^7 x\,dx = \int \cot^5 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx - \int \cot^5 x\,dx$

$= -\frac{1}{6}\cot^6 x - \int \cot^3 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx + \int \cot^3 x\,dx$

$= -\frac{1}{6}\cot^6 x + \frac{1}{4}\cot^4 x + \int \cot x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx - \int \cot x\,dx$

$= -\frac{1}{6}\cot^6 x + \frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C$ **Ans.**

For practice:

01. $\int \cot^4 x\,dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর। **Ans.** $-\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$

Type-34

➲ $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ আকারের ইন্টিগ্র্যাল

নিয়ম: 1. sec এর ঘাত জোড় পূর্ণ সংখ্যা হলে $\tan x = z$ ধরতে হবে।
2. sec এবং tan উভয়ের ঘাতই বিজোড় হলে, $\sec x = z$ ধরতে হবে।
3. sec এর ঘাত বিজোড়, tan এর ঘাত জোড় হলে Integration by Parts. ব্যবহার করতে হবে।

Ex-01 $\int \tan^{1/2} x \sec^4 x\,dx$

Sol^n: $\int \tan^{1/2} x \sec^4 x\,dx = \int \tan^{1/2} x \sec^2 x \sec^2 x\,dx$

$= \int \tan^{1/2} x\,(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx$ $[\tan x = z \Rightarrow \sec^2 x\,dx = dz]$

$= \int z^{1/2}(1+z^2)\,dz - \int\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{5}{2}}\right)dz = \frac{2}{3}\,z^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}\,z^{\frac{7}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}\tan^{3/2} x + \frac{2}{7}\tan^{7/2} x + C$ **Ans.**

Ex-02 $\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx$

Sol^n: $\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx = \int \tan^4 x \sec^2 x\,(\sec x.\tan x)\,dx$

$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x.\tan x\,dx = \int (z^2-1)^2\,z^2\,dz$

$= \int (z^4 - 2z^2 + 1)z^2\,dz$ | ধরি, $\sec x = z$ ∴ $\sec x.\tan x$ ...

$= \int (z^6 - 2z^4 + z^2)\,dz = \frac{z^7}{7} - 2\frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} + C$

$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

Ex-03 $\int \tan^2 x \sec x\,dx$

Sol^n: ধরি, $I = \int \tan^2 x.\sec x\,dx = \int \tan x.(\tan x \sec x)\,dx$

$= \tan x.\sec x - \int \sec^2 x.\sec x\,dx = \tan x.\sec x - \int (1 + \tan^2 x) ...$

$\Rightarrow I = \tan x.\sec x - \int \sec x\,dx - \int \tan^2 x \sec x\,dx + C'$

$\Rightarrow I = \tan x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| - I + C'$

$\Rightarrow 2I = \tan x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C'$

$\therefore I = \frac{1}{2}(\tan x.\sec x - \ln|\sec x + \tan x|) + C$

For practice:

01. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\,dx$ **Ans:** $\frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x$ ...

02. $\int \tan^5 x.\sec^4 x\,dx$ **Ans:** $\frac{1}{6}\tan^6 x + \frac{1}{8}\tan^8 x$ ...

Type-35

➲ $\int \frac{dx}{P(\sin x, \cos x)}, \int \frac{P(\sin x, \cos x)}{a(\sin x, \cos x)}\,dx$ আকারের ইন্টিগ্র্যাল

নিয়ম : প্রদত্ত ফাংশন sinx ও cosx এর সাপেক্ষে প্রতিসম হলে ... tanx এর ফাংশনে রূপান্তর করতে হবে।

Ex-01 $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$

Sol^n : $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{a\tan^2 x + b}$ | Let, $\sqrt{a}\tan x = z$ $\Rightarrow \sqrt{a}\sec^2 x\,dx = dz$ ∴ $\sec^2 x\,dx = \frac{dz}{\sqrt{a}}$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dz}{z^2 + (\sqrt{b})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{a}}.\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{b}} + C = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right) + C$

Ex-02 $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$

Sol^n : $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x} = \int \frac{dx}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}$

$= \int \frac{\sec^2 x\,dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{\sec^4 x\,dx}{\sec^2 x + \tan^2 x}$

$= \int \frac{\sec^2 x(1 + \tan^2 x)dx}{1 + 2\tan^2 x}$ | ধরি, $z = \tan x$, $dz = \sec^2 x\,dx$

$= \int \frac{(1+z^2)dz}{1+2z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2+2z^2)dz}{1+2z^2} = \frac{1}{2}\int dz + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+2z^2}$

$= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}z) + C = \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}$ ...

$\int \frac{1}{1+\tan x}dx$

$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$

$=\frac{1}{2}\int dx+\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$ **Ans.**

$\int \frac{\sin 8x}{9+\sin^4 4x}dx$

$\int \frac{\sin 8x}{9+\sin^4 4x}dx$

ধরি, $z=\sin^2 4x$

$\Rightarrow dz = 2\times 4\sin 4x\cos 4x\,dx \Rightarrow dz = 4\sin 8x\,dx$

$\int\frac{\sin 8x\,dx}{9+\sin^4 4x} = \frac{1}{4}\int\frac{dz}{9+z^2} = \frac{1}{12}\tan^{-1}\left(\frac{z}{3}\right)+C$

$=\frac{1}{12}\tan^{-1}\left(\frac{\sin^2 4x}{3}\right)+C$ **Ans.**

For practice:

$\int\frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 2x+8}$ Ans. $\frac{\sqrt{2}}{8}\tan^{-1}\left(\frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}}\right)+C$

$\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ Ans. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan^2 x)+C$

$\int(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)d\theta$ Ans. $\frac{1}{2}(a+b)\theta+\frac{1}{4}(b-a)\sin 2\theta+C$

$\int\frac{dx}{\sin^4 x-\cos^4 x}$ এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right|+C$

Type-36

$\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$, $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$,

$\int\frac{dx}{\cos(x+a)\sin(x+b)}$, $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ আকারের

ইন্টিগ্রালের ১ম ও ২য় ক্ষেত্রে হর এবং লবকে $\sin(a-b)$

$=\sin\{(x+a)-(x+b)\}$

$=\sin(x+a)\cos(x+b)-\sin(x+b)\cos(x+a)$ দ্বারা গুণ এবং

৩য় ও ৪র্থ ক্ষেত্রে হর এবং লবকে $\cos(a-b)$

$=\cos\{(x+a)-(x+b)\}$

$=\cos(x+a)\cos(x+b)+\sin(x+a)\sin(x+b)$ দ্বারা গুণ করতে হবে

$\int\frac{dx}{\cos(x+2)\cos(x+3)}$

$\int\frac{dx}{\cos(x+2)\cos(x+3)}$

$=\frac{1}{\sin 1}\int\frac{\sin(x+3)\cos(x+2)-\sin(x+2)\cos(x+3)}{\cos(x+2)\cos(x+3)}dx$

$=\frac{1}{\sin 1}\int[\tan(x+3)-\tan(x+2)]dx$

$=\frac{1}{\sin 1}[\ln|\sec(x+3)|-\ln|\sec(x+2)|]+C$

$=\frac{1}{\sin 1}\ln\left|\frac{\sec(x+3)}{\sec(x+2)}\right|+C$ **Ans.**

For practice:

01. $\int\frac{dx}{\cos(x+2)\sin(x+3)}$ Ans. $\frac{1}{\cos 1}\ln\left|\frac{\sin(x+3)}{\cos(x+2)}\right|+C$

Type-37

☺ আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে ইন্টিগ্রেশন:

নিয়ম-০১: যদি f(x) এবং g(x) বহুপদী হয় তবে $\frac{f(x)}{g(x)}$ আকারের ফাংশনকে মূলদীয় ফাংশন বলে। এইরূপ ফাংশনের ইন্টিগ্রেশনের জন্য ফাংশনটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে নিতে হবে। f(x) যদি g(x) এর সমান বা অধিক মাত্রার হয়, তবে সাধারণ ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে f(x) কে g(x) দ্বারা এমন ভাবে ভাগ করতে হবে যেন অবশিষ্টের লবের মাত্রা g(x) এর মাত্রা হতে ছোট হয়।

যখন f(x) এর মাত্রা g(x) এর মাত্রা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তখন মূলদীয় ফাংশনকে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করার সাধারণ সমাধানের নিয়ম ঃ

i. প্রত্যেক ax+b উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ $\frac{A}{ax+b}$.

ii. প্রত্যেক $(ax+b)^n$ পুনরাবৃত্ত উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ

$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\dots\dots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$

iii. প্রত্যেক ax^2+bx+c দ্বিঘাত উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

iv. প্রত্যেক $(ax^2+bx+c)^n$ পুনরাবৃত্ত দ্বিঘাত উৎপাদকের জন্য প্রতিষঙ্গী আংশিক ভগ্নাংশ

$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

একইভাবে এই নিয়মটি সম্প্রসারণ করা যায়।

নিয়ম-০২ : $\int\frac{(Ax+B)dx}{(ax+b)^2(cx+d)}$

এক্ষেত্রে আংশিক ভগ্নাংশ করতে হলে,

$\frac{(Ax+B)}{(ax+b)^2(cx+d)}$

$=\frac{A\left(-\frac{d}{c}\right)+B}{\left\{a\left(-\frac{d}{c}\right)+b\right\}^2(cx+d)}+\frac{A\left(-\frac{b}{a}\right)+B}{(ax+b)^2\left\{c\left(-\frac{b}{a}\right)+d\right\}}+\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{Ax+B}{cx+d}\right)_{x=-\frac{b}{a}}}{ax+b}$

নিয়ম-০৩: অভিজ্ঞতালব্ধ পদ্ধতি:

যেমন: $\frac{1}{(x-2)(2x-3)(3x-1)}=\frac{1}{(x-2)5}-\frac{4}{7(2x-3)}+\frac{9}{(3x-1).35}$

1. প্রথমে উৎপাদকগুলোর টার্মগুলো আলাদা করে লিখতে হবে।
2. প্রতিটি উৎপাদকের রাশি = 0 ধরে, x এর মান অন্য উৎপাদকে বসাতে হবে। $\frac{1}{(x-2)(2x-3)(3x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{3x-1}$

প্রথম উৎপাদকে $x-2=0$ হলে $x=2$

$[2x-3]_{x=2}=1$, $[3x-1]_{x=2}=5$; $5\times1=5$

দ্বিতীয় উৎপাদকে $2x-3=0$ হলে $x=\frac{3}{2}$

$[x-2]_{x=\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$, $[3x-1]_{x=\frac{3}{2}}=\frac{7}{2}$; $-\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}$

তৃতীয় উৎপাদককে $3x-1=0$ হলে $x=\frac{1}{3}$

$$[x-2]_{x=\frac{1}{3}}=-\frac{5}{3},[2x-3]_{x=\frac{1}{3}}=-\frac{7}{3};\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{35}{9}$$

∴ আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করলে হবে: $\frac{1}{5(x-2)}-\frac{4}{7(2x-3)}+\frac{9}{35(3x-1)}$ **Ans.**

Ex-01 $\int\frac{x^4dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

Solⁿ: ধরি, $I=\int\frac{x^4dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$$=\int\left[1+\frac{(-a^2)^2}{(x^2+a^2)(-a^2+b^2)}+\frac{(-b^2)^2}{(-b^2+a^2)(x^2+b^2)}\right]dx$$

$$=\int\left[1-\frac{a^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}+\frac{b^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{x^2+b^2}\right]dx$$

$$=x-\frac{a^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{b^4}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+C$$

$$=x-\frac{a^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{b^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+C$$ **Ans.**

Ex-02 $\int\frac{\sin x\,dx}{\sin 4x}$

Solⁿ: $\int\frac{\sin x dx}{\sin 4x}=\int\frac{\sin x dx}{2\sin 2x\cos 2x}$

$$=\int\frac{\sin x dx}{4\sin x\cos x\cos 2x}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos x\cos 2x}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x\cos 2x}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos x dx}{(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}\ [\text{যখন } t=\sin x]=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(t^2-1)}-\frac{2}{(2t^2-1)}\right]dt$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}\right|+C$$ **Ans.**

Ex-03 $\int\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$

Solⁿ: $\int\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(z+a^2)(z+b^2)}$ | ধরি, $x^2=z$, $2xdx=dz$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int\left[\frac{1}{z+b^2}-\frac{1}{z+a^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left[\ln(z+b^2)-\ln(z+a^2)\right]+C$$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left(\frac{z+b^2}{z+a^2}\right)+C=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$$ **Ans.**

Ex-04 $\int\frac{x^2-1}{x^2-4}dx$

Solⁿ: $\int\frac{x^2-4+3}{x^2-4}dx=\int dx+3\int\frac{dx}{x^2-4}=x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$ **Ans.**

Ex-05 $\int\frac{x^5}{1+x^4}dx$

Solⁿ: $\int\left(x-\frac{x}{1+x^4}\right)dx$ ধরি, $x^2=z$; $2x\,dx=dz$

$$=\int xdx-\int\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\tan^{-1}z+C=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+C$$

Ex-06 $\int\frac{2x+3}{x^3-x}dx$

Solⁿ: $\int\frac{2x+3}{x(x+1)(x-1)}dx=\int\left[\frac{-3}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{5}{2(x-1)}\right]dx$

$$=-3\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{2}\ln|x-1|+C$$

Ex-07 $\int\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Solⁿ: $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int\left[\frac{2}{9(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{2}{9(x+2)}\right.$

$$=\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x+2|+C$$

Ex-08 $\int\frac{x^2}{x^4-1}dx$

Solⁿ: $\int\frac{x^2-1+1}{x^4-1}dx=\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$$=\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\ldots}$$

$$=\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|\ldots$$

For practice:

01. $\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$ **Ans.** $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\ldots$

02. $\int\frac{(x-3)dx}{(1-2x)(1+x)}$ **Ans.** $\frac{5}{6}\ln|1-2x|-\frac{4}{3}\ldots$

03. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$ **Ans.** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ldots$

04. $\int\frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)}dx$ **Ans.** $\frac{3}{2}\ln|x-2|-\ln|x-1|-\ldots$

05. $\int\frac{x^3-2x+3}{x^2+x-2}dx$ **Ans:** $\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ldots$

Type-38

...ইন্টিগ্রেশনঃ

... মান নির্ণয় করার জন্য ইহা একটি বিশেষ পদ্ধতি। ইহার সাহায্যে ... ফাংশনের গুণফল (সমাকলন যোগ্য)-এর সমাকলিত মান নির্ণয় করা যায়। ... যোগজীকরণ পদ্ধতিতে সমাকলিত মান নির্ণয়- অন্তরীকরণ করে ... পাই, $\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$ যেখানে u এবং w উভয়ই x এর ...। x এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষকে সমাকলিত করে uw $= \int\left(u\frac{dw}{dx}\right)dx + \int\left(w\frac{du}{dx}\right)dx.$

..., $\int\left(u\frac{dw}{dx}\right)dx = uw - \int\left(w\frac{du}{dx}\right)dx$ ----------------(i)

... ধরি, $\frac{dw}{dx} = v$ তাহলে $w = \int vdx$ সুতরাং (i) হতে আমরা পাই,

$$\int uvdx = u\int vdx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int vdx\right\}dx$$

... দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোজিত ফল (সমাকলিত মান) = প্রথম ... × দ্বিতীয় ফাংশনের যোজিত ফল– (প্রথম ফাংশনের অন্তরক সহগ × দ্বিতীয় ফাংশনের যোজিত ফল) -এর সমাকলিত মান।

... প্রথম ফাংশন নির্ণয় ঃ সমাকলনটি বা যোজ্য ফাংশনটি কোন ধরনের ... ফাংশনের গুণফল তা অবলোকন করে প্রথম ফাংশন নির্ধারনের ...কটি নিয়ম নিম্নে প্রদান করা হলো ঃ

... বীজগাণিতিক ও ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের গুণফল হলে ...গাণিতিক ফাংশনটিকে প্রথম ফাংশন হিসাবে নিতে হবে।

... বীজগাণিতিক ও সূচক ফাংশনের গুণফল হলে, বীজগাণিতিক ...টিকে প্রথম ফাংশন হিসাবে গ্রহণ করতে হবে।

... বীজগাণিতিক ও লগারিদমিক ফাংশনের গুণফল হলে, লগারিদমিক ...টিকে প্রথম ফাংশন হিসাবে গ্রহণ করতে হবে।

... বীজগাণিতিক ও বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের গুণফল হলে, বিপরীত ... ফাংশনটিকে প্রথম ফাংশন ধরতে হবে।

... ত্রিকোণমিতিক ও সূচক ফাংশনের গুণফল হলে, যে কোনটিকে প্রথম ... হিসাবে গণ্য করা যাবে।

...: এক্ষেত্রে মূল ইন্টিগ্র্যাল I ফিরে আসবে এবং বামপক্ষে I সম্বলিত ... নিয়ে I নির্ণয় করতে হবে।

... অনেক সময় $\int f(x)dx$ আকারের যোগজের যোগজীকরণের জন্য ... ধরা হয় এবং এই ক্ষেত্রে f (x) কে প্রথম ফাংশন হিসাবে নিতে হবে। ... ফাংশন নির্বাচনের নিয়মটি **LIATE** শব্দটি দ্বারা সহজে মনে রাখা ...। শব্দটিতে অন্তর্ভুক্ত **L = Logarithmic, I = Inverse circular, A = Algebraic, T = Trigonometric, E = Exponential** বুঝায়।

[...] $\int x^n \ln x dx$

... প্রদত্ত ইন্টিগ্র্যাল $= \ln x\int x^n dx - \int\left\{\left(\frac{1}{x}\right)\int x^n dx\right\}dx$

$= \ln x\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int\frac{1}{x}\frac{x^{n+1}}{n+1}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$ **Ans.**

[...] $\int \tan^{-1} xdx$

...: $I = \int \tan^{-1}x.1dx = \tan^{-1}x\int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int dx\right\}dx$

$= (\tan^{-1}x)x - \int\frac{1}{1+x^2}.xdx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx$

$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ **Ans.**

Ex-03 $\int x^3e^x dx$

Sol^n : $I = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx = x^3.e^x - 3(x^2e^x - 2\int xe^x dx)$

$= x^3e^x - 3\{x^2e^x - 2(xe^x - e^x)\} + C$

$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$ **Ans.**

[লক্ষ কর ঃ এক্ষত্রে সূত্রটি হবে

$$\int x^n e^{ax}dx = e^{ax}\left[\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} - \ldots\ldots\right] + C$$

Ex-04 $\int x\cos^2 xdx$

Sol^n: $\int x\cos^2 xdx = \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{2}\int x\cos 2xdx$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left[x\int\cos 2xdx - \int\left(\frac{d}{dx}(x)\int\cos 2xdx\right)dx\right]$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2xdx\right]$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int\sin 2xdx$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$ **Ans.**

Ex-05 $\int x\sin^{-1}xdx$

Sol^n: $\int x\sin^{-1}xdx = \sin^{-1}x\int xdx - \int\left[\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\int xdx\right]dx$

$= \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\sin^{-1}x + C$

$= \frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$ **Ans.**

For practice:

01. $\int x^2\tan^{-1}xdx$ **Ans:** $\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$
02. $\int\sin\sqrt{x}\,dx$ **Ans:** $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C$
03. $\int x\sin x.\cos x\,dx$ **Ans:** $\left(\frac{\sin 2x}{4} - \frac{x\cos 2x}{2}\right) + C$
04. $\int\ln xdx$ **Ans.** $x(\ln|x| - 1) + C$
05. $\int x\sin^3 xdx$ **Ans.** $\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}x\cos 3x - \frac{3}{4}x\cos x - \frac{1}{36}\sin 3x + C$
06. $\int x\tan^{-1}xdx$ **Ans.** $\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \tan^{-1}x + C$

Type-39

➲ যদি কোন ইন্টিগ্রাল $\int e^{ax}[af(x)+f'(x)]dx$ এই আকারে থাকে, তবে সরাসরি ফল $e^{ax}f(x)+C$ লেখা যায়।

Ex-01 $\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx$

Sol^n: $\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx = \int e^x \frac{x^2-1+2}{(x+1)^2}dx = \int e^x\left\{\frac{x-1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right\}dx$

$= \int e^x\left\{\frac{x-1}{x+1}+\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right\}dx = \frac{(x-1)e^x}{x+1}+C$ **Ans.**

Ex-02 $\int e^x \frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$

Sol^n: $\int e^x \frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}dx = \int e^x \frac{2+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}dx = \int e^x(\sec^2 x+\tan x)dx$

$= e^x \tan x + C$ **Ans.**

Ex-03 $\int e^x\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x(\ln x)^2}\right]dx$

Sol^n: $\int e^x\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x(\ln x)^2}\right]dx = \int e^x\left[\frac{1}{\ln x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right]dx$

$= \frac{e^x}{\ln x}+C$ **Ans.**

For practice:

01. $\int e^x\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\right]dx$ **Ans.** $\frac{e^x}{1-x}+C$
02. $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ **Ans:** $e^x \tan\frac{x}{2}+C$
03. $\int e^x\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx$ **Ans:** $e^x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)+C$
04. $\int e^{-x/2}\frac{\sqrt{1-\sin x}}{1+\cos x}dx$ **Ans:** $e^{-\frac{x}{2}}\sec\frac{x}{2}+C$
05. $\int e^x\frac{x-1}{(x+1)^3}dx$ **Ans:** $e^x\frac{1}{(x+1)^2}+C$

Type-40

➲ $\int\{xf'(x)+f(x)\}dx = xf(x)+C$

➲ (i) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$

(ii) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

Ex-01 $\int(x\cos x+\sin x)\,dx = \int\left(x\frac{d}{dx}\cos x+\sin x\right)dx = x\sin x + C$

Ex-02 $\int\frac{\cos^3 x}{e^{3x}}dx$

Sol^n: $I = \int e^{-3x}\cos^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int e^{-3x}(\cos 3x+3\cos x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[\int e^{-3x}\cos 3x\,dx + 3\int e^{-3x}\cos x\,dx\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-3x}}{18}(-3\cos 3x+3\sin 3x)+3\frac{e^{-3x}}{10}(-3\cos x+\sin x)\right]+C$

$= \frac{e^{-3x}}{8}\left\{\frac{1}{3}(\sin 3x-\cos 3x)+\frac{3}{5}(\sin x-3\cos x)\right\}+C$ **Ans.**

Ex-03 $\int e^{2x}\sin x\,dx$

Sol^n: ধরি, $I = \int e^{2x}\sin x\,dx = \sin x\int e^{2x}dx - \int\left(\frac{d}{dx}\sin x\int e^{2x}dx\right)dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx$

$\therefore I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx$

$= \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin x-\cos x) - \frac{I}{4} \Rightarrow \frac{5I}{4} = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+C$

$\therefore I = \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+C$

For practice:

01. $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ **Ans:** $\frac{e^{3x}(3\cos 4x+4\sin 4x)}{25}$
02. $\int e^x\sin 2x\,dx$ **Ans.** $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)$

বিবিধ সমস্যাবলি

Ex-01 $\int\frac{x^3}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(z-1)dz}{z} = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{z}\right)dz$ | ধরি, $x^2+1=z$, $\Rightarrow 2x\,dx=dz$ এবং $x^2=z-1$

Sol^n: $\int\frac{x^3}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(z-1)dz}{z} = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{z}\right)dz$

$= \frac{1}{2}\int dz - \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\ln z + C$

$= \frac{1}{2}\left\{(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right\}+C$

Ex-02 $\int\frac{dx}{x+x^a}$

| ধরি, $z = x^{1-a}+1$, $dz = (1-a)x^{-a}dx$, $\frac{dz}{1-a} = x^{-a}dx$

Sol^n: $\int\frac{dx}{x+x^a} = \int\frac{x^{-a}}{x^{1-a}+1}dx$

$= \frac{1}{1-a}\int\frac{dz}{z} = \frac{1}{1-a}\ln|z|+C = \frac{1}{1-a}\ln|1+x^{1-a}|+C$

Ex-03 $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

| ধরি, $x = \cos\theta$ $\therefore dx = -\sin\theta\,d\theta$

Sol^n: $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

$= \int\frac{-\sin\theta\,d\theta}{(1+\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2\theta}}$

$= -\int\frac{d\theta}{1+\cos\theta} = -\int\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta = -\int\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

$= -\int(\text{cosec}^2\theta - \text{cosec}\theta\cot\theta)d\theta$

$= -(-\cot\theta+\text{cosec}\theta)+C = \cot\theta - \text{cosec}\,\theta + C$

$= -\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+C = -\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}+C$

$= -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}+C = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$

$\int\sqrt{1+\sec x}\,dx$

$\int\sqrt{1+\sec x}\,dx = \int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\cos x}}dx = \int\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{x}{2}}}$

[ধরি, $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} = z \Rightarrow \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx = 2dz$]

$= \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\sin^{-1}z + C = 2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) + C$ **Ans.**

$\int\tan^3 x\sqrt{\sec x}\,dx$

$\int\tan^3 x\sqrt{\sec x}\,dx = \int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x\sqrt{\cos x}}dx = \int\frac{\sin^2 x\sin x dx}{(\cos x)^{7/2}}$

$= \int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{(\cos x)^{\frac{7}{2}}}$ [ধরি, $\cos x = z \Rightarrow dz = -\sin x\, dx$]

$= -\int\frac{(1-z^2)dz}{z^{\frac{7}{2}}} = \int\left(z^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{-7}{2}}\right)dz = -2z^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}z^{-\frac{5}{2}} + C$

$= \frac{-2}{\sqrt{\cos x}} + \frac{2}{5}(\cos x)^{\frac{-5}{2}} + C = \frac{2}{5}(\sec x)^{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{\sec x} + C$ **Ans.**

$\int\frac{x dx}{\sqrt{4+x}}$

$\int\frac{x dx}{\sqrt{4+x}} = \int\frac{x+4-4}{\sqrt{4+x}}dx = \int\sqrt{x+4}\,dx - \int\frac{4}{\sqrt{4+x}}dx$

$= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{x+4} + C$ **Ans.**

$\int\frac{dx}{(e^x-1)^2}$

$\int\frac{dx}{(e^x-1)^2} = \int\frac{e^{-2x}dx}{(1-e^{-x})^2}$ [ধরি, $1-e^{-x} = z \Rightarrow dz = e^{-x}dx$]

$= \int\frac{(1-z)dz}{z^2} = \int z^{-2}dz - \int z^{-1}dz = \frac{-1}{z} - \ln|z| + C$

$= -\frac{1}{1-e^{-x}} - \ln|1-e^{-x}| + C$ **Ans.**

$\int\cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}dx$

$\int\cos\left\{2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}dx$ [ধরি, $x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta d\theta$]

$= -\int\cos\left[2\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right]\sin\theta d\theta$

$= -\int\cos\left(2\cot^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta d\theta = -\int\cos\left[2\cot^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]\sin\theta d\theta$

$= -\int\cos(\pi-\theta)\sin\theta d\theta = \int\cos\theta\sin\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\int\sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{4}\cos 2\theta + C = \frac{1}{4}(1-2\cos^2\theta) + C$

$= \frac{1}{4}(1-2x^2) + C = -\frac{x^2}{2} + C_1$ **Ans.**

Ex-09 $\int\frac{ax+b}{cx+d}dx$

Solⁿ: $\int\frac{ax+b}{cx+d}dx$

ধরি, $cx + d = z$

$x = \frac{z-d}{c} \therefore dx = \frac{1}{c}dz$

$= \int\frac{a.\frac{z-d}{c}+b}{z}.\frac{1}{c}dz = \frac{1}{c^2}\int\frac{az-ad+bc}{z}dz$

$= \frac{1}{c^2}\int\left[a-(ad-bc)\frac{1}{z}\right]dz = \frac{1}{c^2}[az-(ad-bc)\ln|z|] + C$

$= \frac{1}{c^2}[a(cx+d)-(ad-bc)\ln|cx+d|] + C$ **Ans.**

Ex-10 $\int\frac{\sin x}{\sin(x+a)}dx$

Solⁿ: $\int\frac{\sin x}{\sin(x+a)}dx = \int\frac{\sin(x+a-a)}{\sin(x+a)}dx$

$= \int\frac{\sin(x+a)\cos a - \cos(x+a)\sin a}{\sin(x+a)}dx$

$= \cos a\int dx - \sin a\int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}dx$

$= x\cos a - \sin a\ln|\sin(x+a)| + C$ **Ans.**

Ex-11 $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$

Solⁿ: $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$

ধরি,
$z = \sin x - \cos x$
$dz = (\cos x + \sin x)\,dx$

$= \int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx$

$= \sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx = \sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(1-2\sin x\cos x)}}dx$

$= \sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}dx = \sqrt{2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \sqrt{2}\sin^{-1}z + C$

$= \sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x-\cos x) + C$ **Ans.**

Ex-12 $\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}$

Solⁿ: $\int\frac{dx}{\sin x+\tan x} = \int\frac{\cos x dx}{\sin x(\cos x+1)}$

$= \int\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-1}{2\sin x.\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int\frac{dx}{\sin x} - \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.2\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \int\operatorname{cosec}x dx - \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}dx$

$= \int\operatorname{cosec}x dx - \frac{1}{2}\int\frac{(1+z^2)dz}{z}$ [ধরি, $z = \tan\frac{x}{2} \therefore dz = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$]

$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\left(\ln|z| + \frac{z^2}{2}\right) + C$

$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C$ **Ans.**

Ex-13 $\int \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$

Sol^n: $\int \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$

$= \int \frac{\frac{a^2-x^2}{x^2}}{\frac{(a^2+x^2)^2}{x^2}}dx$

ধরি, $\frac{a^2}{x}+x=z$

$\Rightarrow \left(-\frac{a^2}{x^2}+1\right)dx = dz$

$\therefore \left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)dx = -dz$

$= \int \frac{\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)dx}{\left(\frac{a^2}{x}+x\right)^2} = -\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z}+c$

$= \frac{1}{\frac{a^2}{x}+x}+c = \frac{x}{a^2+x^2}+C$ **Ans.**

Ex-14 সমাধান কর: $\sqrt{1-x^2}\,dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$

Sol^n: $\sqrt{1-x^2}\,dy = -\sqrt{1-y^2}\,dx$

$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \sin^{-1}y = -\sin^{-1}x + C$

$\therefore \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = C$ **Ans.**

Ex-15 $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(1+\sin x)(2+\sin x)}}$

Sol^n: $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(1+\sin x)(2+\sin x)}}$

ধরি, $z = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{2+\sin x}$

$dz = \left(\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} + \frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}\right)dx$

$dz = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\sin x}}{(\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{2+\sin x})}\right]\cos x\,dx$

$\frac{2dz}{z} = \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(1+\sin x)(2+\sin x)}}$

$= \int \frac{2dz}{z} = 2\ln|z| + C$

$= 2\ln\left|\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}\right| + C$

Ans.

For practice:

01. $\int \frac{\sin 2x}{\sin 5x \sin 3x}dx$ **Ans:** $\frac{1}{3}\ln|\sin 3x| - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + C$

02. $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}dx$ **Ans:** $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + C$

03. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$ **Ans:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right) + C$

04. $\int \frac{\cos 5x + \cos 4x}{1-2\cos 3x}dx$ **Ans:** $C - \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$

05. $\int \frac{x^2+\sin^2 x}{1+x^2}\sec^2 x\,dx$ **Ans:** $\tan x - \tan^{-1}x + C$

06. $\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x - \cos x)}dx$ **Ans:** $\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x} + C$

07. $\int \frac{dx}{4\sin x + 5\cos x}$ **Ans:** $\frac{1}{\sqrt{41}}\ln\left|\tan\left(\frac{x+\tan^{-1}\frac{5}{4}}{2}\right)\right| + C$

08. $\int e^x \frac{x-1}{(x+1)^3}dx$ **Ans:** $\frac{e^x}{(x+\ldots}$

09. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^3 x \sin(x+a)}}$ **Ans:** $\frac{2\sqrt{\sin(\ldots}}{\cos^2 a\sqrt{\ldots}}$

10. $\int \frac{x^x(x^{2x}+1)(\ln x+1)}{x^{4x}+1}dx$ Ans: $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^x - \ldots}{\sqrt{2}}\ldots\right.$

11. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^4+3x^2+1)\tan^{-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$ Ans: $\ln \tan^{-1}\left(x+\ldots\right.$

12. $\int \frac{x^2+3}{x^6(x^2+1)}dx$ Ans: $C - \frac{2}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{3}{5}\frac{1}{x^5} \ldots$

13. $\int \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{7}{2}}+x^6}dx$ Ans: $\frac{2}{5}\ln\left|\frac{x^{\ldots}}{x^{\ldots}-\ldots}\right.$

14. $\int \frac{\cos 7x - \cos 8x}{1+2\cos 5x}dx$ Ans: $\frac{\sin 2x}{2} \ldots$

15. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}dx$ Ans: $\frac{x^2}{2}\ldots$

16. $\int \left(\frac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)dx$ Ans: $\frac{4}{\sqrt{x}} \ldots$

17. $\int \left\{\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}} \cdot \frac{x^2}{4-4x^{-1}+x^{-2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}\right\}dx$

Ans: $x^{\ldots}$

18. $\int \frac{\sin 2x + \sin 5x - \sin 3x}{\cos 2x + 1 - 2\sin^2 2x}dx$ Ans: $-2\ldots$

19. $\int \sqrt{\frac{\cos x - \cos^3 x}{1-\cos^3 x}}\,dx$ Ans: $-\frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\cos^{\ldots}\right.$

20. $\int e^{(x\sin x + \cos x)}\,\frac{x^4\cos^3 x - x\sin x + \cos x}{x^2\cos^2 x}dx$

Ans: $e^{(x\sin x + \cos x)}\left(x - \frac{\ldots}{x\cos\ldots}\right.$

21. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx$ Ans: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left(\frac{x^2+\ldots}{\sqrt{2}\ldots}\right.$

22. $\int (x^{3m}+x^{2m}+x^m)(2x^{2m}+3x^m+6)^{\frac{1}{m}}dx$

Ans: $\frac{1}{6(m+1)}(2x^{3m}+3x^{2m}+6x^{\ldots}$

23. $\int \frac{dx}{\tan x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x}$ Ans: $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x \ldots$

...ET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... নির্ণয় কর: $\int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx$ [16-17]

Solve ধরি, $\tan^{-1}x = z \therefore x = \tan z \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = dz$

$\int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)(1+x^2)}dx$

$= \int \frac{e^{mz}}{1+\tan^2 z}dz = \int e^{mz}\cos^2 z\, dz$

$= \frac{1}{2}\int e^{mz}(1+\cos 2z)\,dz = \frac{1}{2}\int e^{mz}dz + \frac{1}{2}\int e^{mz}\cos 2z\, dz$

$= \frac{1}{2m}e^{mz} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{mz}}{m^2+2^2}(m\cos 2z + 2\sin 2z)\right] + C$

$= \frac{1}{2m}e^{mz} + \frac{e^{mz}}{2(m^2+4)}(m\cos 2z + 2\sin 2z) + C$, যেখানে $z = \tan^{-1}x$

$\left[\because \int e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C\right]$ **Ans.**

... যোগজীকরণ নির্ণয় কর: $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$ [15-16]

Solve $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$ Let, $x + \frac{1}{x} = z \Rightarrow \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dz$

$= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + C$ **Ans.**

... যোগজীকরণ নির্ণয় কর: $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$ [15-16]

Solve $\int \frac{dx}{\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{\left(-\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 1\right)}$

$= \int \frac{2dz}{(-z^2+2z+1)}$ Let, $\tan\frac{x}{2} = z \Rightarrow 2dz = \sec^2\frac{x}{2}dx$

$= -2\int \frac{dz}{(z^2-2z+1)-2} = -2\int \frac{dz}{(z-1)^2-(\sqrt{2})^2}$

$= -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-1-\sqrt{2}}{z-1+\sqrt{2}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}\right| + C$ **Ans.**

04. যোগজ নির্ণয় কর: $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ [14-15]

Solve $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$= \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

ধরি, $x - \frac{1}{x} = z \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dz$

$= \int \frac{dz}{(\sqrt{2})^2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) + C$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) + C$ **Ans.**

05. যোগজ নির্ণয় কর: $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ [06-07]

Solve $\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \int \frac{(1+x-1)e^x}{(1+x)^2}dx$

$= \int e^x\left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx = \int e^x\left[\frac{1}{1+x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]dx$

$= \frac{e^x}{1+x} + c$ $[\because \int e^x[f(x)+f'(x)] = e^x f(x) + c]$ **Ans.**

06. যোগজ নির্ণয় কর: $\int x^2(\ln x)^2 dx$ [05-06]

Solve $\int x^2(\ln x)^2 dx$

$= (\ln x)^2\int x^2 dx - \int\{\frac{d}{dx}(\ln x)^2 . \int x^2 dx\}dx$

$= (\ln x)^2\frac{x^3}{3} - \int \frac{2\ln x}{x}.\frac{x^3}{3}dx = \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\int \ln x.x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2}{3}\left[\ln x\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx\right]$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{x^3}{3} + C$

$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$ **Ans.**

07. যোগজ নির্ণয় কর: $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx$ [04-05, CUET 11-12]

Solve $\int e^x\sec x(1+\tan x)dx = \int e^x(\sec x + \sec x.\tan x)dx$

$= \int e^x(\sec x + \frac{d}{dx}\sec x)dx = e^x\sec x + C$ **Ans.**

$[\because \int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x)]$

08. যোগজ নির্ণয় কর: $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ [03-04;RUET: 08-09]

Solve $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int \sec^2 x\, dx - \int \sec x\tan x\, dx$

$= \tan x - \sec x + c$ **Ans.**

09. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনটি ইন্টিগ্রেট কর: $\dfrac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2}$ **[02-03, RUET 10-11]**

Solve $\int e^x \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}dx = \int e^x \dfrac{x^2-1+2}{(x+1)^2}dx$

$= \int e^x \left\{\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{(x+1)^2}\right\}dx$

$= \int e^x \left\{\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right\}dx$

$= e^x\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + C$ **Ans.**

10. ইন্টিগ্রেট কর: $\int \dfrac{x^2}{e^{x^3} - e^{-x^3}}dx$ **[01-02]**

Solve

$\int \dfrac{x^2}{e^{x^3} - e^{-x^3}}dx$ | ধরি, $e^{x^3} = z$

$= \int \dfrac{x^2 e^{x^3}dx}{e^{2x^3} - 1}$ | $\Rightarrow 3x^2 e^{x^3}dx = dz$ | $\therefore x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}dx$

$= \dfrac{1}{3}\int \dfrac{dz}{z^2-1} = \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| + C$

$= \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{e^{x^3}-1}{e^{x^3}+1}\right| + C$

11. যোগজ নির্ণয় কর: $\int \dfrac{dx}{(x^2+9)^2}$ **[00-01]**

Solve $\int \dfrac{dx}{(x^2+9)^2} = \int \dfrac{9\sec^2\theta d\theta}{(9\tan^2\theta + 9)^2} = \int \dfrac{3\sec^2\theta d\theta}{(9\sec^2\theta)^2}$

$= \dfrac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta = \dfrac{1}{54}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$

[ধরি, $x = 3\tan\theta \therefore dx = 3\sec^2\theta d\theta \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{x}{3}$]

$= \dfrac{1}{54}\left(\theta + \dfrac{\sin 2\theta}{2}\right) + C = \dfrac{1}{54}\left(\theta + \dfrac{1}{2}\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + C$

$= \dfrac{1}{54}\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{3} + \dfrac{\frac{x}{3}}{1+\frac{x^2}{9}}\right) + C$

$= \dfrac{1}{54}\left(\tan^{-1}\dfrac{x}{3} + \dfrac{3x}{x^2+9}\right) + C$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. মান নির্ণয় কর: $\int \dfrac{\cos x\, dx}{3 - \cos^2 x}$ **[05-06]**

Solve $\int \dfrac{\cos x dx}{3-\cos^2 x} = \int \dfrac{\cos x\, dx}{2+\sin^2 x}$ | ধরি, $\sin x = P$ | $\therefore \cos x dx = dP$

$= \int \dfrac{dP}{2+P^2} = \int \dfrac{dP}{(\sqrt{2})^2 + P^2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{P}{\sqrt{2}}\right) + C$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C$ **Ans.**

02. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int e^x \cos x\, dx$ **[06-07, RUET 04-[illegible]**

Solve ধরি, $I = \int e^x \cos x dx$

$\Rightarrow e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = I$

$\Rightarrow e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx + C' = I$

$\Rightarrow e^x(\sin x + \cos x) - I + C' = I$

$\therefore I = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

03. মান নির্ণয় কর: $\int \dfrac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$ **[04-05]**

Solve $\int \dfrac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \dfrac{dx}{e^x(e^x-3)} = \dfrac{1}{3}\int \dfrac{1}{e^x-3}dx - \dfrac{1}{3}\int$ [illegible]

$= \dfrac{1}{3}\int \dfrac{e^{-x}}{1-3e^{-x}}dx - \dfrac{1}{3}\int e^{-x}dx = \dfrac{-1}{9}\int \dfrac{\frac{d}{dx}(1-3e^{-x})}{1-3e^{-x}}dx + \dfrac{1}{3}$ [illegible]

$= -\dfrac{1}{9}\ln|1-3e^{-x}| + \dfrac{1}{3}e^{-x} + C$

04. নিচের ফাংশনগুলির যোজিত ফল নির্ণয় কর **[04-05]**

(a) $\int \dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}dx$ (b) $\int \dfrac{dx}{5+4x-x^2}$

a. $\int \dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x.\cos x}.dx = \int \dfrac{\sec^2 x\sqrt{\tan x}}{\tan x}dx$ | Let, tan[illegible] | $\Rightarrow \sec^2 x$ [illegible]

$= \int \dfrac{dP\sqrt{P}}{P} = \int \dfrac{dP}{\sqrt{P}} = 2\sqrt{P} + C = 2\sqrt{\tan x} + C$

(b) $\int \dfrac{dx}{5+4x-x^2} = \int \dfrac{dx}{3^2-(x-2)^2} = \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{3+x-2}{3-x+2}\right|$

$= \dfrac{1}{6}\left|\dfrac{1+x}{5-x}\right| + C$

05. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int \sin(\ell nx)dx$ **[04-05]**

Solve

$\int \sin(\ln x)dx$ | ধরি, $\ln x = z$

$= \int e^z \sin z dz$ | $\Rightarrow x = e^z$ | $\therefore dx = e^z dz$

$= \dfrac{e^z(\sin z - \cos z)}{2} + C = \dfrac{x[(\sin(\ln x)) - \cos(\ln x)]}{2} + C$

06. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int x\sin^{-1}x^2 dx$ **[03-04, RUET 03-[illegible]**

Solve

$\int x\sin^{-1}x^2 dx$ | ধরি, $\sin^{-1}x^2 = z$ | $\Rightarrow x^2 = \sin z$ | $\Rightarrow 2xdx = \cos z dz$

$= \int z\dfrac{\cos z dz}{2} = \dfrac{1}{2}\int z\cos z\, dz$ | $\therefore xdx = \dfrac{\cos z dz}{2}$

$= \dfrac{1}{2}[z\sin z - \int 1.\sin z dz] = \dfrac{1}{2}(z\sin z + \cos z) + C$

$= \dfrac{1}{2}(x^2\sin^{-1}x^2 + \sqrt{1-\sin^2 z}) + C$

$= \dfrac{1}{2}(x^2\sin^{-1}x^2 + \sqrt{1-x^4}) + C$ **Ans.**

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int x^3 e^{x^2} dx$ [11-12]

Solve ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2xdx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$

$\int x^3 e^z \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2}\int e^z z dz = \frac{1}{2}[z\int e^z dz - \int\{1.\int e^z dz\}dz]$

$= \frac{1}{2}ze^z - \frac{1}{2}e^z + C = \frac{1}{2}e^z(z-1) + C$

$= \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C$ **Ans.**

যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\, dx$ [11-12]

Solve

$\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\, dx$ | ধরি, $\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} = z \Rightarrow x = a\tan^2 z \Rightarrow dx = 2a\sec^2 z \tan z dz$

$= \int \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\, dx$

$= \int z.2a\sec^2 z \tan z\, dz = 2a\int z.(\sec^2 z \tan z)dz$

$= 2a\left[z\left(\frac{\tan^2 z}{2}\right) - \int 1.\frac{\tan^2 z}{2}dz\right]$

$= 2a\left[\frac{z}{2}\tan^2 z - \frac{1}{2}\int(\sec^2 z - 1)dz\right]$

$= a[z\tan^2 z - \tan z + z] + C$

$= a\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\,\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x}{a}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right] + C$

$= (x+a)\tan^{-1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + C$ **Ans.**

যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int \sin^5 x\, dx$ [10-11]

Solve $\int \sin^5 x\, dx$ [Let, $\cos x = z \therefore -\sin x\, dx = dz$]

$= \int (\sin^2 x)^2 \sin x\, dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx = \int (1-z^2)^2(-dz)$

$= -z + 2\frac{z^3}{3} - \frac{1}{5}z^5 + c$

$= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$ **Ans.**

যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int \frac{x+1}{3x^2-x-2}dx$ [07-08]

Solve $\int \frac{x+1}{3x^2-x-2}dx$

$= \frac{2}{5}\int\frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{5}\int\frac{dx}{3x+2}dx$

$= \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5\times 3}\ln|3x+2| + C$

$= \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{15}\ln|3x+2| + C$ **Ans.**

04. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int \frac{adx}{(\sqrt{x^2+a^2})^3}$ [06-07]

Solve $\int \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$ [Let, $x = a\tan\theta \quad \therefore dx = a\sec^2\theta\, d\theta$]

$= \int \frac{a^2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2)^3(1+\tan^2\theta)^3}}$

$= \int \frac{a^2\sec^2\theta\, d\theta}{a^3\sec^3\theta}$

$= \frac{1}{a}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{a}\sin\theta$

$= \frac{1}{a}\sin\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} + C$

$= \frac{1}{a}\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) + C$

$= \frac{x}{a\sqrt{a^2+x^2}} + C$ **Ans.**

05. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ [05-06]

Solve

$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}} = \int \frac{(1-z^2)(-2zdz)}{z}$ | ধরি, $1-x = z^2 \Rightarrow -dx = 2zdz$

$= 2\int(z^2-1)dz = 2\frac{z^3}{3} - 2z + C$

$= 2\left[\frac{(\sqrt{1-x})^3}{3} - \sqrt{1-x}\right] + C$ **Ans.**

06. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int \sqrt{1+e^x}\, dx$ [03-04]

Solve $\int\sqrt{1+e^x}\, dx = \int\frac{1+e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

$= \int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx + \int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

$= \int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{e^{-x}+1}} + \int\frac{\frac{d}{dx}(1+e^x)}{\sqrt{1+e^x}}dx$

$= -2\int\frac{\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}}dx + 2\sqrt{1+e^x} + C$

$= -2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{1+e^{-x}}\right) + 2\sqrt{1+e^x} + C$

$= 2\sqrt{1+e^x} - 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{e^x+1}}{e^{\frac{x}{2}}}\right) + C$

$= 2\sqrt{1+e^x} - 2\ln(1+\sqrt{e^x+1}) + x + C$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $2\int \sin(2e^{x^2})xe^{x^2}dx$ এর মান হল- [13-14]

A. $\sin(2e^{x^2}) + c$ B. $2\sin(2e^{x^2}) + c$
C. $\cos^2(e^{x^2}) + c$ D. $\sin^2(e^{x^2}) + c$

Ans D Solve $2\int \sin\left(2e^{x^2}\right)xe^{x^2}dx$

ধরি, $2e^{x^2} = z$
$\Rightarrow 4x.e^{x^2}dx = dz$
$\therefore xe^{x^2}dx = \frac{1}{4}dz$

$= \frac{1}{4}.2\int \sin zdz = \frac{-1}{2}\cos z + c'$

$= \frac{-1}{2}\cos(2e^{x^2}) + c' = \frac{-1}{2}\{1 - 2\sin^2(e^{x^2})\} + c'$

$= \frac{-1}{2} + \sin^2(e^{x^2}) + c' = \sin^2(e^{x^2}) + c$

02. $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ এর মান হল- [12-13]

A. $e^x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + c$ B. $e^x\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$
C. $e^x\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$ D. $e^x\cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$

Ans C Solve $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx = \int e^x\left(\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$

$= \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx = \int e^x\left(\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$

$= \int e^x\left[\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]dx = e^x\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c$

$\left[\because \int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c\right]$

03. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$ এর মান হল- [11-12]

A. $\sin(xe^x)+C$ B. $\cos(xe^x)+C$ C. $\tan(xe^x)+C$ D. $\cos^2(xe^x) + C$

Ans C Solve ধরি, $e^x.x = z \therefore e^x(x+1)dx = dz$

$\therefore \int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \sec^2 zdz = \tan z + C$

$= \tan(xe^x) + C$

04. $\int \frac{\sec^2(\cot^{-1}x)}{1+x^2}dx$ এর মান হচ্ছে- [10-11]

A. $-\frac{1}{x} + c$ B. $\frac{1}{x} + c$ C. $x+c$ D. $-x + c$

Ans A Solve ধরি, $\cot^{-1}x = z \therefore -\frac{dx}{1+x^2} = dz$

$\therefore \int \frac{\sec^2(\cot^{-1}x)}{1+x^2}dx = -\int \sec^2 z\,dz$

$= -\tan z + c = -\tan(\cot^{-1}x) + c$

$= -\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{x}\right) + c = -\frac{1}{x} + c$

05. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ এর মান হচ্ছে- [10-11]

A. $\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$ B. $\sqrt{1-x^2} + c$
C. $\sin^{-1}x + c$ D. $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

Ans D Solve $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}dx - \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int \frac{6x-7}{4x^2-4x+5}dx$ এর মান হলো- [17-18]

A. $\frac{3}{2}\log(4x - 4k + 5) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$

B. $3\log(4x^2 - 4x + 5) + \tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$

C. $\frac{3}{2}\log(4x - 4x + 5) + 2\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{2}\right) + c$

D. $\frac{3}{2}\log(4x^2 - 4x + 5) + \tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$

E. $3\log(4x^2 - 4x + 5) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$

Ans Blank Solve $\int \frac{6x-7}{4x^2-4x+5}dx$

$= \int \frac{3(2x-1)-4}{(2x-1)^2+4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4(2x-1)dx}{(2x-1)^2+4} - 4\int \frac{dx}{(2x-1)^2 + 4}$

$= \frac{3}{4}\ln\{(2x-1)^2 + 4\} - \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{2}\right) + c$

$= \frac{3}{4}\ln(4x^2 - 4x + 5) - \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{2}\right) + c$

02. $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx$ এর মান কোনটি? [16-17]

A. $x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c$ B. $x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$
C. $x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ D. $x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c$
E. $x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

Ans B Solve $\int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx = \int \frac{x^2-4}{x^2-4}dx + 3\int \frac{1}{x^2-4}$

$= x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

03. $\int \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}d\theta$ এর মান হলো- [15-16]

A. $\log_e\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + c$ B. $\log_e\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + c$
C. $\log_e\sec\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + c$ D. $\log_e\text{cosec}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + c$
E. $\log_e\sin 2\theta + c$

Ans C Solve $\int \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}d\theta$

$= \int \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}d\theta = \int \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)d\theta = \ln\left|\sec\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\right| + c$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ এর মান কোনটি? [14-15]

A. $\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$ B. $\tan^{-1}x$ C. $\cos^{-1}x$

D. $\sin^{-1}x$ E. $\text{cosec}^{-1}x$

Ans A Solve $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}+c$

$\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$ এর মান কোনটি? [13-14]

A. $\frac{1}{1+\cot x}+c$ B. $\frac{1}{1-\tan x}+c$ C. $\frac{1}{1+\cos x}+c$

D. $\frac{1}{1-\cot x}+c$ E. $-\frac{1}{1+\tan x}+c$

Ans E Solve $\int \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$

Let, $1+\tan x = z$
$\Rightarrow \sec^2 x dx = dz$

$= \int \frac{\sec^2 x dx}{(1+\tan x)^2} = \int \frac{dz}{z^2}$

$= -\frac{1}{z}+c = -\frac{1}{1+\tan x}+c$

$\int \frac{(\tan x+\tan^3 x)\,dx}{e^{\sec^2 x}+e^{-\sec^2 x}}$ -এর মান হলো- [12-13]

A. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(e^{\sec^2 x})+c$ B. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{\sec^2 x}\right)+c$

C. $2\tan^{-1}(e^{\sec^2 x})+c$ D. $\tan^{-1}\left(2e^{\sec^2 x}\right)+c$

E. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(e^{-\sec^2 x})+c$

Ans A Solve $\int \frac{\tan x+\tan^3 x}{e^{\sec^2 x}+e^{-\sec^2 x}}dx$

$= \int \frac{\tan x \sec^2 x\, dx}{e^{\sec^2 x}+e^{-\sec^2 x}}$

$= \int \frac{\tan x \sec^2 x\, e^{\sec^2 x}}{(e^{\sec^2 x})^2+1}dx$

ধরি, $e^{\sec^2 x} = z$
$\Rightarrow 2\sec^2 x \tan x\, e^{\sec^2 x}dx = dz$
$\therefore \sec^2 x \tan x\, e^{\sec^2 x}dx = \frac{1}{2}dz$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\tan^{-1}z+c = \frac{1}{2}\tan^{-1}(e^{\sec^2 x})+c$

$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}dx$ এর মান কোনটি? [11-12]

A. $\tan x+c$ B. $\cot x+c$ C. $2\sqrt{\tan x}+c$

D. $\frac{\sqrt{\tan x}}{2}+c$ E. $\log(\sin 2x)+c$

Ans C Solve $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}dx = \int \frac{\sec^2 x\sqrt{\tan x}}{\tan x}dx$

$= \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx = 2\sqrt{\tan x}+c$

$\int \frac{x^2}{e^{x^3}+e^{-x^3}}dx$ এর মান কত? [10-11]

A. $\frac{1}{3}\tan^{-1}(e^{-x^3})+C$ B. $\frac{1}{3}\tan^{-1}(e^{-x^3})+C$

C. $\frac{1}{3}\tan^{-1}(e^{x^3})+C$ D. $\tan^{-1}3x+C$ E. $\tan^{-1}x+C$

Ans C Solve $\int \frac{x^2}{e^{x^3}+e^{-x^3}}dx$

$= \int \frac{x^2 e^{x^3}dx}{(e^{x^3})^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2+1}$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1}z+c = \frac{1}{3}\tan^{-1}(e^{x^3})+c$

ধরি, $e^{x^3} = z$
$\Rightarrow 3x^2 e^{x^3}dx = dz$
$\therefore x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}dz$

09. $\int \frac{x}{9x^4+4}dx$ এর মান কত? [09-10]

A. $\frac{1}{18}\tan^{-1}\frac{2}{3}x^2$ B. $\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{3x^2}{2}$ C. $\frac{1}{24}\tan^{-1}\frac{3x^2}{2}$

D. $\frac{1}{24}\ln\frac{3x^2-2}{3x^2+2}$ E. $\frac{1}{24}\ln\frac{3x^2+2}{3x^2-2}$

Ans B Solve $\int \frac{x}{9x^4+4}dx$

ধরি, $x^2 = z$
$\Rightarrow 2x\,dx = dz$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{9\left(z^2+\frac{4}{9}\right)} = \frac{1}{18}\int \frac{dz}{\left(\frac{2}{3}\right)^2+z^2} = \frac{1}{12}\tan^{-1}\left(\frac{3x^2}{2}\right)+C$

10. $\int \frac{e^x}{x}(1+x\ln(x))\,dx$ এর মান কোনটি? [08-09]

A. $e^x\ln(x)+c$ B. $\frac{1}{x}e^x+c$ C. e^x+c

D. $-\frac{1}{x^2}e^x+c$ E. $\ln(x)+c$

Ans A Solve $\int \frac{e^x}{x}\{1+x\ln x\}dx =$

$\int e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x) = e^x\ln x+c$

ধরি, $f(x) = \ln x$
$\therefore f'(x) = \frac{1}{x}$

11. $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$ এর মান হল- [07-08]

A. $e^{2x}+5+c$ B. $\frac{1}{4}e^{4x}+c$ C. $e^{3x}+c$ D. $e^{4x}+5+c$ E. e^x+6+c

Ans B Solve $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$

$= \int \frac{e^{4x}(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})}dx = \int \frac{e^{4x}}{1}dx = \frac{e^{4x}}{4}+c$

12. $\int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ এর মান হল- [06-07]

A. $e^{\cos^{-1}x}+c$ B. $e^{\sin^{-1}x}$ C. $e^{\sin^{-1}x}+c$

D. $e^{\cos^{-1}x}$ E. $e^{\log\sqrt{1-x^2}}+c$

Ans C Solve $\int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \int e^p dp = e^p+c = e^{\sin^{-1}x}+c$

ধরি, $\sin^{-1}x = p$
$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dp$

13. মান নির্ণয় কর : $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-6x}}dx$ [05-06]

A. $\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}}$ B. $-\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{3}{2}}$

C. $-\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}}$ D. $-\frac{1}{4}(6x-1)^{\frac{2}{3}}$

Ans C Solve $\int (1-6x)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{(1-6x)^{-\frac{1}{3}+1}}{\left(-\frac{1}{3}+1\right)(-6)}+C = -\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}}+C$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1} dx$ এর মান বের কর। [15-16]

A. None of them
B. $x + \frac{2}{3}(1 + e^{-3x})$
C. $x + 2\log(1 + e^{-3x}) + c$
D. $x - \frac{2}{3}(1 + e^{-3x}) + c$

Ans B Solve $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}dx = \int\left(1 - \frac{2}{e^{3x}+1}\right)dx$

$= \int\left(1 - \frac{2e^{-3x}}{1+e^{-3x}}\right)dx = x + \frac{2}{3}\log(1 + e^{-3x}) + c$

02. $\int x \ln x dx$ এর মান কত? [13-14]

A. $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$
B. $x^2\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$
C. $\frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{x^2}{4} + c$
D. None

Ans A Solve $\int x \ln x dx = \ln x \int x.dx - \int\left(\frac{d}{dx}\ln(x)\int x dx\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}.dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

03. $\int\left\{\frac{(\log x - 1)}{1 + (\log x)^2}\right\}^2 dx$ এর মান কত? [12-13]

A. $\frac{x}{(\log x)^2 + 1} + c$
B. $\frac{\log x}{1 + (\log x)^2} + c$
C. $\frac{x}{x^2 + 1} + c$
D. None

Ans A Solve $\int\left\{\frac{\ln x - 1}{1 + (\ln x)^2}\right\}^2 dx = \int \frac{1 + (\ln x)^2 - 2\ln x}{\{1 + (\ln x)^2\}^2}dx$

$= \int\left\{\frac{1}{1 + (\ln x)^2} - \frac{2\ln x}{\{1 + (\ln x)^2\}^2}\right\}dx$

Let, $\ln x = z$, $x = e^z$; $dx = e^z dz$

$\int\left\{\frac{1}{1+z^2} - \frac{2z}{(1+z^2)^2}\right\}e^z dz = \int e^z\left\{\frac{1}{1+z^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)\right\}dz$

$= e^z\frac{1}{1+z^2} + c = \frac{x}{1+(\ln x)^2} + c$

04. যোগজ নির্ণয় কর (Integrate): $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ [10-11]

A. $\sec^{-1}x + c$
B. $\text{cosec}^{-1}x + c$
C. $-x^2\sqrt{x^2-1} + C$
D. None of these

Ans D Solve $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

$= \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{PdP}{(P^2-1)P}$

Let,
$x^2 + 1 = P^2$
$\Rightarrow 2x\,dx = 2P\,dP$
$\therefore xdx = PdP$

$= \int \frac{dP}{P^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{P-1}{P+1}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) + C$

05. $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1+\tan x}}$ মান নির্ণয় কর- [10-11]

A. $2\sqrt{1+\tan x} + c$
B. $\sqrt{1+\tan x} + c$
C. $2\sqrt{1+\tan x}$
D. None of these

Ans A Solve $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1+\tan x}}$ | Let, $1 + \tan x = P \Rightarrow \sec^2 x$ ...

$= \int \frac{dP}{\sqrt{P}} = 2\sqrt{P} + c = 2\sqrt{1 + \tan x} + c$

06. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ এর মান কত? [09-10]

A. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + c$
B. $\ln(\ln x)$
C. $\ln(\ln x) + c$
D. None of them

Ans C Solve $\int \frac{dx}{x \ln x}$

$= \int \frac{dP}{P} = \ln|P| + c = \ln|\ln x| + c$

Let, $\ln x = P$
$\therefore \frac{1}{x}dx = dP$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int a^{a^{a^x}}.a^{a^x}.a^x dx = ?$ [14-15]

A. a^{a^x}
B. $\frac{a^x}{\log a}$
C. $\frac{a^{a^x}}{3}$
D. $\frac{a^{a^{a^x}}}{(\log a)^3}$
E. 1

Ans D Solve

$\int a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x dx$

$= \int \frac{dz}{(\ln a)^3}$

$= \left(\frac{1}{\ln a}\right)^3 z + C = \frac{a^{a^{a^x}}}{(\ln a)^3} + c$

ধরি, $a^{a^{a^x}} = z$
$\Rightarrow a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x (\ln x)^3 dx = dz$
$\therefore a^{a^{a^x}} a^{a^x} a^x dx = \frac{dz}{(\ln a)^3}$

02. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ?$ [13-14]

A. $\sin^{-1}e^x$
B. $\tan^{-1}\frac{1}{e^x}$
C. $\tan^{-1}e^x$
D. $\cos^{-1}e^x$
E. None

Ans C Solve $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

$= \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}dx$ [ধরি, $e^x = z \Rightarrow e^x dx = dz$]

$= \int \frac{1}{z^2+1}dz = \tan^{-1}z + C = \tan^{-1}(e^x) + c$

$\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}} dx = ?$ [11-12]

A. $\frac{5}{4}\ln(1+e^{4x})+c$ B. $\frac{5}{2}\ln(1+e^{4x})+c$

C. $\frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x})+c$ D. $\frac{5}{4}\ln(1+e^{2x})+c$

Ans C Solve ধরি, $e^{2x} = z \quad \therefore e^{2x}dx = \frac{dz}{2}$

$\int \frac{5e^{2x}}{1+(e^{2x})^2} dx = \frac{5}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x}) + c$

$\int \frac{xe^{-x}dx}{(x-1)^2} = ?$ [09-10]

A. $\frac{e^{-x}}{x-1}+C$ B. $\frac{e^{-2x}}{x-1}+C$ C. $-\frac{e^{-x}}{(x-1)^2}+C$

D. $\frac{e^{-x}}{x}+C$ E. কোনটিই নয়

Ans A Solve $\int \frac{xe^{-x}}{(x-1)^2} dx = -\int e^{-x}\left\{-\frac{1}{(x-1)} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right\}dx$

$= -\int e^{-x}\left\{-\frac{1}{x-1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right\}dx$

$[\int e^{ax}\{af(x) + f'(x)\}dx = e^{ax}f(x) + C]$

$= \frac{e^{-x}}{x-1} + C$

SELF TEST [Written]

1. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x+2}}$ **Ans:** $2\tan^{-1}\sqrt{x+2} + C$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ **Ans:** $\sqrt{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$

3. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+4x+7}} dx$
Ans: $3\sqrt{x^2+4x+7} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+4x+7} + (x+2)\right| + C$

4. $\int \frac{x+b}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$ **Ans:** $\sqrt{x^2+a^2} + b\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$

5. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2-12x+2}}$
Ans: $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|(z-1) + \sqrt{(z-1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right| + C$
Where, $z = \frac{1}{x+1}$

6. $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$ **Ans:** $a\sin^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$ **Ans:** $\frac{2}{3}[(x+3)^{3/2} - (x+2)^{3/2}] + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$ **Ans:** $2\sin^{-1}\sqrt{x-2} + C$

9. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{5\sin^2 x - 12\sin x + 4}}$ **Ans:** $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|5\sin x - 6 + \sqrt{5\sin^2 x - 12\sin x + 4}\right| + C$

10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-3x}}$ **Ans:** $\frac{1}{27}\left\{\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}z^{\frac{3}{2}} + 8z^{\frac{1}{2}}\right\} + C$ Where, $z = 2 - 3x$

11. $\int \sqrt{25+4x^2}\, dx$
Ans: $\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{25+4x^2} + \frac{25}{2}\ln\left(2x + \sqrt{16+4x^2}\right)\right\} + C$

12. $\int \frac{\cos x\, dx}{2\sin x + 3\cos x}$ **Ans:** $\frac{3}{13}x + \frac{2}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + C$

13. $\int \cos^4 x\, dx$ **Ans:** $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

14. $\int \sin^{2/3}x \cos^3 x\, dx$ **Ans:** $-\frac{3}{2}(\tan x)^{-2/3} + C$

15. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ **Ans:** $\left[\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right)\right] + C$

16. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ **Ans:** $\tan^{-1}(\tan^2 x) + C$

17. $\int \frac{e^{9x} + e^{2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$ **Ans:** $\frac{1}{7}e^{7x} + C$

18. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **Ans:** $\ln|x-1| - 5\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + C$

19. $\int x^n \ln x\, dx$ **Ans:** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln|x| - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$

20. $\int \sin\sqrt{x}\, dx$ **Ans:** $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C$

21. $\int e^x \frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2} dx$ **Ans:** $e^x \frac{1}{1+x^2} + C$

22. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$ **Ans:** $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C$

23. $\int \frac{5x^4 + 4x^5}{(x^5+x+1)^2} dx$ **Ans:** $\frac{x^5}{x^5+x+1} + C$

24. $\int \frac{2x+1}{(x^2+4x+1)^{\frac{3}{2}}} dx$ **Ans:** $\frac{x}{\sqrt{x^2+4x+1}} + C$

25. $\int \frac{x^2-1}{x^3\sqrt{2x^4-2x^2+1}} dx$ **Ans:** $\frac{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}{2x^2} + C$

26. $\int \frac{p x^{p+2q-1} - q x^{q-1}}{x^{2p+2q} + 2x^{p+q} + 1} dx$ **Ans:** $-\frac{x^q}{x^{p+q}+1} + C$

27. $\int \frac{x^4-2}{x^2\sqrt{x^4+x^2+2}} dx$ **Ans:** $\sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2} + 1} + C$

28. $\int \frac{\cos 6x + \cos 9x}{1 - 2\cos 5x} dx$ **Ans:** $-\frac{\sin 4x}{4} - \sin x + C$

29. $\int x^{x+1}\ln x(1+\ln x)\, dx.$ **Ans:** $x^x(x\ln x - 1) + C$

30. $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\left[\left(\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}\right)^2 + \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right] dx$
Ans: $e^{\tan^{-1}x}(\tan^{-1}x)^2 + C$

31. $\int \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ **Ans:** $\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{15}}{15} + C$

32. $\int \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^{\frac{2}{3}}} dx$ **Ans:** $2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C$

33. $\int \frac{\cos x - \sin x + 1 - x}{e^x + \sin x + x} dx$ **Ans:** $\ln(e^x + \sin x + x) - x + C$

SELF TEST [MCQ]: 01

01. $\int\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx=?$

A. $\frac{x^2-x+1}{x+1}+C$ B. $\frac{x^2+x+1}{x+1}+C$

C. $\frac{x^2+x+1}{x+2}+C$ D. $\frac{x^2+1}{x+1}+C$

02. $\int\frac{\tan x}{\sqrt{2}\cot x}dx=?$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\tan x)+C$ B. $(x-\tan x)+C$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan x-x)+C$ D. কোনটিই নয়

03. $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=A\cos x+C; A=?$

A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{2}$

04. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}=?$

A. $\frac{2}{3}\left[x^{3/2}+(x-1)^{3/2}\right]+C$ B. $\frac{3}{2}\left[x^{3/2}+(x-1)^{3/2}\right]+C$

C. $\frac{2}{3}\left[x^{3/2}-(x-1)^{3/2}\right]+C$ D. $\frac{3}{2}\left[x^{-3/2}+(x-1)^{3/2}\right]+C$

05. $\int\operatorname{cosec}\frac{x}{2}dx=?$

A. $2\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ B. $2\tan\frac{x}{4}+C$

C. $2\ln\left|\tan\frac{x}{4}\right|+C$ D. $2\ln\left|\tan\frac{x}{3}\right|+C$

06. $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=?$

A. $\ln|\sin x-\cos x|+C$ B. $(\sin x+\cos x)+C$

C. $\ln|\sin x+\cos x|+C$ D. $\ln|\tan x+\cot x|+C$

07. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}=?$

A. $\sin^{-1}\frac{4x}{5}+C$ B. $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{5}+C$

C. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4x}{5}+C$ D. $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{5}{4x}+C$

08. $\int\frac{dx}{9x^2-16}=?$

A. $\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|+C$ B. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right|$

C. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|+C$ D. কোনটিই নয়

09. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}=A(x+2)\sqrt{1-x}+C; A=?$

A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

10. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=?$

A. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$ B. $\frac{3}{2}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$

C. $\frac{2}{3}(1-\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$ D. $(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}C$

11. $\int\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=?$

A. $\frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}+c$ B. $\frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2}+c$ C. $\frac{3}{2}\sin^3\frac{x}{2}+c$ D. $\frac{3}{2}$

12. $\int\frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}=?$

A. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan\theta)+C$ B. $\frac{1}{4}\tan^{-1}(\tan\theta)+C$

C. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)+C$ D. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\tan\theta\right)+C$

13. $\int\frac{4}{16a^2+x^2}dx=?$

A. $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{4a}{x}+C$ B. $\frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{4a}+C$

C. $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{4a}+C$ D. $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{4}+C$

14. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4+x}}=A(x-8)\sqrt{4+x}+C; A=?$

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

15. $\int\frac{x\,dx}{x^4+3}=?$

A. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)+C$ B. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C$

C. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)+C$ D. কোনটিই নয়

16. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}=?$

A. $\frac{1}{4}\ln\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-2\tan\frac{x}{2}}+C$ B. $\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}+C$

C. $\frac{1}{4}\ln\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}+C$ D. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}+C$

17. $\int\frac{x^{-\frac{3}{4}}}{1+\sqrt{x}}dx=?$

A. $4\tan^{-1}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)+C$ B. $4\ln\left(\tan^{-1}x^{\frac{1}{4}}\right)+C$

C. $2\tan^{-1}\left(\sqrt[4]{x}\right)+C$ D. কোনটিই নয়

[illegible] $dx = ?$

A. [illegible]$)^2 + 2x\ln x + 2x + C$
B. [illegible]$)^2 - 2x\ln x + x + C$
C. [illegible]$)^2 + 2x\ln x + x + C$
D. [illegible]$)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

[illegible] $dx = ?$

A. [illegible]$\frac{x}{2} + C$ B. $x\cot\frac{x}{2} + C$
C. [illegible]$\frac{x}{2} + C$ D. কোনটিই নয়

[illegible] $\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx = A\ln(x-3) + B\ln(x-2) + C$; A, B = ?

A. $A = 4; B = 3$ B. $A = 4; B = -3$
C. $A = -3; B = 4$ D. $A = 1; B = -1$

[illegible]$+\ln x)dx = ?$

A. [illegible]$+ C$ B. $x^{2x} + C$
C. [illegible]$\ln x + C$ D. $\frac{1+\ln x}{x} + C$

[illegible] $\frac{\ldots + \sin^2 x}{1+x^2}\sec^2 x\,dx = ?$

A. [illegible]$ - \tan^{-1}x + C$ B. $\tan^{-1}x - \tan x + C$
C. [illegible]$(\tan x) - \tan^{-1}x + C$ D. None

OMR

[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
[illegible] Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

[illegible]	21.A	20.B	19.A	18.D	17.A	16.C	15.C	14.B	13.C	12.C
[illegible]	10.A	09.B	08.C	07.B	06.C	05.C	04.A	03.D	02.C	01.B

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

01. $\int\frac{1+x\cos x}{x(1-x^2e^{2\sin x})}dx$ Ans: $\ln|xe^{\sin x}| - \frac{1}{2}\ln|1 - x^2e^{2\sin x}| + C$

02. $\int\frac{1+x}{x(1+xe^x)^2}dx$ Ans: $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + \frac{1}{1+xe^x} + C$

03. $\int\frac{dx}{[illegible]\sin x + \sec x}$

Ans: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{cosec}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{2(\sin x + \cos x)} + C$

04. $\int\frac{(x-1)\sqrt{x^4+2x^3-x^2+2x+1}}{x^2(x+1)}dx$

Ans: $\sqrt{t^2+2t-3} - \ln(t+1+\sqrt{t^2+2t-3}) - \sqrt{3}\sin^{-1}\left(\frac{t+5}{t+2}\right) + C$

[যেখানে $t = x + \frac{1}{x}$]

05. $\int\frac{\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\cos^3\theta + \cos^2\theta + \cos\theta}}$

Ans: $\tan^{-1}(\cos\theta + \sec\theta + 1)^{\frac{1}{2}} + C$

06. $\int\frac{e^x(2-x^2)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}dx$ Ans : $e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$

07. $\int\frac{x^2(x\sec^2x + \tan x)}{(1+x\tan x)^2}dx$ Ans: $\frac{-x^2}{x\tan x + 1} + 2\ln|x\sin x + \cos x| + C$

08. যদি $(x-y)^2 = \frac{x}{y}$ হয় তবে দেখাও যে,

$$\int\frac{dx}{(x-3y)^2} = \frac{1}{2}\ln[(x-y)^2 - 1] + C$$

09. $\int\frac{x^2+n(n-1)}{(x\sin x + n\cos x)^2}dx$ Ans: $\frac{-x\sec x}{x\sin x + n\cos x} + \tan x + C$

10. $\int\frac{dx}{(\sin x + a\sec x)^2}$

Ans: $\frac{1}{4a^2-1}\frac{\cos 2x}{2a+\sin 2x} + \frac{4a}{(4a^2-1)^{\frac{3}{2}}}\tan^{-1}\left(\frac{2a\tan x + 1}{\sqrt{4a^2-1}}\right) - \frac{1}{2a+\sin 2x} + C$

11. $\int\tan(x-\alpha)\tan(x+\alpha)\tan 2x\,dx$

Ans : $\ln|\sqrt{\sec 2x}\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)| + C$

12. $\int\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos^2x\sqrt{\tan^3x + \tan^2x + \tan x}}dx$

Ans : $-2\tan^{-1}(\sqrt{\tan x + 1 + \cot x}) + C$

13. $\int\sin^{-1}\frac{2x+2}{\sqrt{4x^2+8x+13}}dx$

Ans: $(x+1)\tan^{-1}\left\{\frac{2}{3}(x+1)\right\} - \frac{3}{4}\ln(4x^2+8x+13) + C$

14. $\int\frac{dx}{\cos x + \operatorname{cosec}x}$

Ans: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3} + \sin x - \cos x}{\sqrt{3} - \sin x + \cos x}\right| - \tan^{-1}(\sin x + \cos x) + C$

15. $\int\sin(101x)\sin^{99}x\,dx$ Ans: $\frac{\sin(100x)(\sin x)^{100}}{100} + C$

16. $\int\frac{\tan^{-1}x}{x^4}dx$ Ans: $-\frac{\tan^{-1}x}{x^3} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2}\right| - \frac{1}{6x^2} + C$

17. $\int \frac{dx}{2x\sqrt{1-x}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}\right)}$

Ans: $\frac{1}{2}\ln\left(z+\frac{3}{2}+\sqrt{z^2+3z+3}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C$

যেখানে, $z=\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}$ এবং $t=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

18. $\int\left[\ln\left(\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}\right)^{\cos^2\theta}+\ln\left(\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}\right)\right]d\theta$

Ans: $\frac{\sin 2\theta}{2}\ln\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)+\frac{1}{2}\ln|\cos 2\theta|+C$

19. $\int\frac{x^2(1-\ln x)}{\ln^4 x-x^4}dx$ Ans: $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\ln x-x}{\ln x+x}\right)-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\ln x}{x}\right)+C$

20. $\int\frac{(2\sin\theta+\sin 2\theta)\,d\theta}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\cos^3\theta+\cos^2\theta+\cos\theta}}$

Ans: $-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{\cos\theta+\sec\theta+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{\cos\theta+\sec\theta+1}+\sqrt{3}}\right|+C$

21. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$ Ans: $2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x\right|$

$-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x-1\right|-\frac{3}{2\sqrt{x^2+2x+4}-x-1}+C$

22. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

Ans: $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\frac{2}{(x+2)+\sqrt{x^2+2x+2}}+C$

23. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ Ans: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}+x}{x}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{2(1-x^3)^{\frac{1}{3}}-x}{\sqrt{3}x}\right\}$

$-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}-x(1-x^3)^{\frac{1}{3}}+x^2}{x^2}\right|+C$

24. $\int\frac{\left(\sin^{\frac{3}{2}}\theta+\cos^{\frac{3}{2}}\theta\right)d\theta}{\sqrt{\sin^3\theta\cos^3\theta\sin(\theta+\alpha)}}$

Ans : $\frac{2}{\cos\alpha}\sqrt{\cos\alpha\tan\theta+\sin\alpha}-\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\cos\alpha+\cot\theta\sin\alpha}+C$

25. $\int\text{cosec}^2x\ln\left(\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)dx$

Ans : $C-\cot x-x+\sqrt{\cot^2x-1}-\cot x\ln\left(\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)$

26. $\int\frac{\sin^3x\,dx}{(\cos^4x+3\cos^2x+1)\tan^{-1}(\sec x+\cos x)}$

Ans: $\ln\tan^{-1}(\sec x+\cos x)+C$

27. $\int\frac{x^{-\frac{7}{6}}-x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}}dx$

Ans: $-2z^3-9z^2-18z-6\ln|z|+C$ যেখানে, $z=\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^{\frac{1}{6}}-1$

28. $\int\frac{e^x(x^4+2)\,dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ Ans : $e^x\left\{\frac{1+x+x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}+C$

নির্দিষ্ট যোগজ: [২য় অংশ (1.5)]

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

অনির্দিষ্ট যোগজ অধ্যায়ে আমরা যা আলোচনা করেছি ঐ আলো... যোগজ এর জন্য প্রযোজ্য। নির্দিষ্ট যোগজে শুধুমাত্র limit ... অনির্দিষ্ট যোগজ এর সকল অংক এ অধ্যায়ের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। ঐ ... করার পর শুধুমাত্র limit বসিয়ে মানটা বের করতে হবে নির্দিষ্ট ...

- ☐ অনির্দিষ্ট যোগজের ফলাফল চলকের মাধ্যমে আসে কিন্তু নির্দি... ফলাফল সর্বদা ধ্রুবক হয়।
- ☐ $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ $\phi(x)+c$ হলে, a নিম্নসীমা এবং b ... মধ্যে এর নির্দিষ্ট যোগজকে

$\int_a^b f(x)dx=[\phi(x)]_a^b=\phi(b)-\phi(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

- ☐ $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
- ☐ $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- ☐ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- ☐ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$; [যখন $a\le c\le b$]
- ☐ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$
- ☐ $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$
- ☐ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$
- ☐ $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ যদি $f(-x)=f(x)$ হয়। [$f(x)$ যুগ্ম ...
- ☐ $\int_{-a}^a f(x)dx=0$ যদি $f(-x)=-f(x)$ হয়। [$f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন ...
- ☐ $\int_0^{2a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ যদি $f(2a-x)=f(x)$ হয়।
- ☐ $\int_0^{2a} f(x)dx=0$ যদি $f(2a-x)=-f(x)$ হয়।
- ☐ $\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{b+a}{2}} f(x)dx$ যদি $f(x)=f(a+b-x)$ হয়।
- ☐ $\int_a^b f(x)dx=0$ যদি $f(x)=-f(a+b-x)$ হয়।
- ☐ $\int_0^{na} f(x)dx=n\int_0^a f(x)dx$ যদি $f(a+x)=f(x)$ হয়।

Only For M.C.Q

$\int \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\, dx = \frac{\pi}{8}(\beta-\alpha)^2$

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \pi$

$\int \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\, dx = \frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)$

$\left.\frac{\int_0^x f(x)dx}{x}\right| = f(0)$

$\int f(x)dx = \frac{1}{n}\int_{na}^{nb} f\left(\frac{x}{n}\right)dx$

$\int f(x+c)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b-c} f(x-c)dx$

$\int f(x)dx = (b-a)\int_0^1 \{(b-a)x+a\}dx$

$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}(a+b)$

$\int \{|x-a| + |x-b|\}dx = (b-a)^2$

$\int (\tan^n x + \tan^{n-2} x)dx = \int_0^{\pi/4} (\cot^n x + \cot^{n-2} x)dx = \frac{1}{n-1}$

$\int \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$

$\int \frac{f(x)dx}{f(x)+f(a+b-x)} = \frac{1}{2}(b-a)$

$\int \frac{dx}{1+e^{f(x)}} = \frac{a}{2}$ যদি $f(a-x) = -f(x)$ হয়।

SPECIAL FORMULA (অজানাকে জানো)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ হয় তবে $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$

$\int e^{-x} x^n dx = n!$ [যেখানে $n \in N$]

$\int e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ [যেখানে $n \in N$]

$\int (\ln x)^n x^m dx = \frac{n!(-1)^n}{(1+m)^{n+1}}$ [যেখানে $m, n \in N$]

$\int (\ln x)^n x^m dx = \frac{n!(-1)^n}{(1+m)^{n+1}}$ [যেখানে $m, n \in N$]

$\int x^m (1-x)^n dx = \frac{1}{(m+n+1)\, {}^{m+n}C_m}$ [যেখানে $m, n \in N$]

□ $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)^{m+n+2}}dx = \frac{1}{(m+n+1)\, {}^{m+n}C_m}$ [যেখানে $m, n \in N$]

□ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \pi\left(\frac{{}^{2m}C_m}{2^{2m+1}}\right)$ [যেখানে $m \in N$]

□ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \left\{\frac{2^{2m}}{(m+1)\, {}^{2m+1}C_m}\right\}$ [যেখানে $m \in N$]

□ **Walli's theorem**

যদি m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে,

□ $\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx = \frac{1.3.5.....(m-1)}{2.4.6.....m}\frac{\pi}{2}$ (যখন m জোড়)

□ $\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx = \frac{2.4.6.....m}{1.3.5.....(m-1)}$ (যখন m বিজোড়)

□ $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx = \frac{1.3.5.....(m-1)1.3.5.....(n-1)}{2.4.6.....(m+n)}\frac{\pi}{2}$

(যখন m এবং n জোড়)

□ $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx = \frac{2.4.6......(m-1)1.3.5......(n-1)}{1.3.5.......(m+n)}$

(যখন m বিজোড় এবং n জোড়)

□ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1.3.5...(m-1)\, 1.3.5...(n-1)}{2.4.6....(m+n)}$

(যখন m এবং n বিজোড়)

□ $\frac{d}{dt}\left(\int_a^{g(t)} f(x)\, dx\right) = fog(t).\, g'(t)$

বিশেষ ক্ষেত্র : যখন $g(t) = t$ তখন $\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(x)\, dx\right) = f(t)$

□ $\frac{d}{dt}\left(\int_{g(t)}^b f(x)\, dx\right) = -\, fog(t).\, g'(t)$

বিশেষ ক্ষেত্র : যখন $g(t) = t$ তখন $\frac{d}{dt}\left(\int_t^b f(x)\, dx\right) = -\, f(t)$

□ $\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x,t)\, dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$

□ $\frac{d}{dt}\left(\int_{g(t)}^{h(t)} f(x,t)\, dx\right) = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$

$+ foh(t).\, h'(t) - fog(t).\, g'(t)$

Calculator Type

➢ **Limit ধরার নিয়ম:**

Differantiation এর Limit ধরার নিয়মের প্রথম 3টি নিয়ম প্রযোজ্য।

➢ **Integration With Limit:**

Calculator এ Intergration করার জন্য Upper Limit এবং Lower limit এর মধ্যে যে বিন্দুতে $\int x$ এর মান Undefined সেই বিন্দুর ক্ষেত্রে নিকটবর্তী মান নিতে হবে। এখন উদাহরণ গুলো লক্ষ করি,

$\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ dx এর ক্ষেত্রে $f(x) = \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, a = 0, b = 1

$\therefore f(b) \frac{0}{0}$ Undefined.

তাই b → 1 ধরে (b = 0.999) integration করতে হবে। কিন্তু $\int_1^e \ln(x)dx$ এর ক্ষেত্রে f(x) = ln(x), a = 1, b = e(2.718...)

f(a) = ln 1 = 0 এবং f(b) = lne = 1 তাই a = 1 এবং b = e ধরে integration করা যাবে।

Example 1 $\int_0^1 \frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ এর মান কত?

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi^2}{8}$ C. $\frac{\pi^2}{4}$ D. 0

যেহেতু b = 1 এর জন্য $f(x) = \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ Undefined তাই a = 0 এবং b = 0.999 ধরতে হবে।

এখন, Integration এর general form f(f(x), a, b) এর f(x), a, b মান বসিয়ে Integration টির মান বের করা যাবে।

নিম্নের চিত্রে WS/W/ES Series Calculator এ কিভাবে Integration টি করা যায় তা দেখানো হল।

MS/W Series:

[∫dx] [SHIFT] [cos] [ALPHA] [)] [÷] [√] [(] [1] [−] [ALPHA] [)] [x²] [)] [,] [0] [,] [.] [9] [9] [)] [=]

ফলাফল = 1.2327 = $\frac{\pi^2}{8}$

ES Series:

[∫□] [□/□] [SHIFT] [cos] [ALPHA] [)] [)] [REPLAY] [Press down 1 time] [√□] [1] [−] [ALPHA] [)] [x²] [REPLAY] [Press right 3 times] [REPLAY] [Press up 1 time] [1] [REPLAY] [Press down 1 time] [0] [=] 1.2337 = $\frac{\pi^2}{8}$

ফলাফল = 1.2327 = $\frac{\pi^2}{8}$

বিঃদ্রঃ

- ❑ Calculator টি অবশ্যই Rad এ নিতে হবে।
- ❑ প্রাপ্ত মানটি অপশন গুলোর সাথে মিলিয়ে দেখতে হবে প্রাপ্ত মানটি যে অপশনের সমান বা কাছাকাছি সেটিকে সঠিক উত্তর ধরতে হবে।

❑ ES Series এ কমা (,) লিখতে [SHIFT] [)] চাপতে হয়।

$\int_1^e \ln x dx$ এর মান কত?

A. e B.1 C.1 −e D. −1

MS Series:

[∫dx] [ln] [ALPHA] [)] [,] [1] [,] [SHIFT] [ln] [1] [)] [=]

ফলাফল: 1

ES Series:

এটি Line I_0 Set up এর জন্য SHIFT MODE 2.

[∫dx] [ln] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [)] [1] [SHIFT] [)] [ALPHA] [X^{lix}] [)] [=]

ফলাফল: 1

Mat I_0 SET UP এর জন্য

SHIFT MODE 1.1

[∫dx] [ln] [ALPHA] [)] [)] [REPLAY] [ALPHA] [X^{lix}] [REPLAY] [1] [=]

ফলাফল: 1

Example 3 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$ এর মান কত?

A. $\frac{\pi}{2}$ B. 0 C. 0 D. $\frac{\pi}{3}$

ইংগিত a = 0, b = 1 $f(a) = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2.0-0^2}} = \frac{1}{0}$ = Undefined

তাই a → 0 (a = 0.0001) ধরতে হবে।

MS or W. Series:

[∫] [1] [÷] [√] [(] [2] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [)] [x²] [−] [ALPHA] [)] [x²] [)] [,] [0] [,] [1] [=]

= 1.53 = $\frac{\pi}{2}$

Line Io Set up এর জন্য

[∫] [1] [÷] [√] [(] [2] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [)] [x²] [SHIFT] [)] [,] [0] [0] [1] [SHIFT] [)] [1] [=] 1.5259.

ফলাফল: $\frac{\pi}{2}$

এভাবেই নির্দিষ্ট (যোগ) করতে হবে।

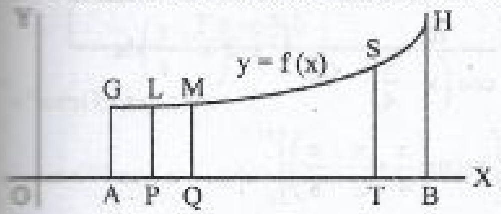
নির্দিষ্ট যোগজের প্রয়োগ

➲ ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞার সাহায্যে $\int_a^b f(x)\ dx$ এর মান নির্ণয় ...

সমষ্টির সীমারূপে $\int_a^b f(x)\ dx$ এর মান নির্ণয়ঃ

এখানে যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞার সাহায্যে ... প্রকার ধারার সমষ্টিকে নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল রূপে প্রকাশ করিয়া ... নির্ণয় করা হবে। যখন ধারার সংখ্যা সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পায়, তখন ... পদ শূন্যের দিকে অগ্রসর হয়। পদ সংখ্যা n → ∞ হলেই, উপ-... h → 0 হয়।

মনে করি, f(x) ফাংশন [a, b] বদ্ধ ব্যবধিতে সীমাবদ্ধ [Bounded], ... বিশিষ্ট [single valued] এবং অবিচ্ছিন্ন [Continuous] যখন a ... এবং b > a।



$y = f(x)$, ... (1)

a হইতে b এর দিকে ক্রমশঃ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত [Increasing].

(1) নং রেখার উপর G, H দুইটি বিন্দু, ইহাদের ভুজ যথাক্রমে a এবং b। x অক্ষের উপর GA, LP, MQ, ..., ST, HB লম্ব অংকন করি।

$OA = a$, $OB = b$; কাজেই $AB = OB - OA = b - a$।

[a, b] ব্যবধিকে n সংখ্যক সমান উপ-ব্যবধিতে বিভক্ত করি এবং প্রত্যেক উপ-ব্যবধির দৈর্ঘ্য h, অর্থাৎ $AP = PQ = ... = TB = h$.

$nh = b - a \Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$ **Error! Bookmark not defined.**

P, Q, ...T, B বিন্দুর ভুজ যথাক্রমে $a + h, a + 2h, ...a + (n-1)h, a + nh$।

P, Q, ..., B বিন্দুর অনুরূপ কোটি উপরের দিকে টানিলে (1) নং কে যথাক্রমে L, M, ..., S, H বিন্দুতে ছেদ করে। কোটিগুলো যথাক্রমে, $f(a + h)$, $f(a + 2h)$, $f(a + 3h)$, ... $f(a + nh)$। অর্থাৎ $PL = f(a + h)$, $QM = f(a + 2h)$, ..., $ST = a + (n - 1)h$, $BH = f(a + nh)$

আয়তক্ষেত্র GAPL এর ক্ষেত্রফল $= hf(a + h)$

আয়তক্ষেত্র LPQM এর ক্ষেত্রফল $= hf(a + 2h)$

....

আয়তক্ষেত্র STBH এর ক্ষেত্রফল $= hf(a + nh)$

GABH এর ক্ষেত্রফল S হয়, তবে

$$S = \lim_{h \to 0} [hf(a + h) + hf(a + 2h) + ... hf(a + nh)]$$

$$= \lim_{h \to 0} h[f(a + h) + f(a + 2h) + ... f(a + nh)]$$

$$= \lim_{h \to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a + rh) = \underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left\{a + \frac{r(b-a)}{n}\right\}$$ যখন

$h = \frac{b-a}{n}$ এবং $h \to 0$ হলে $n \to \infty$

S বিদ্যমান থাকে, তবে S কে [a, b] ব্যবধিতে x এর সাপেক্ষে f(x) এর নির্দিষ্ট যোগজ রূপে সংজ্ঞায়িত করা হয় এবং ইহাকে $\int_a^b f(x)dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যখন a নিম্নসীমা এবং b ঊর্ধ্বসীমা।

$$\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left\{a + \frac{r(b-a)}{n}\right\} = \int_a^b f(x)dx$$

যেহেতু জ্যামিতিক দৃষ্টিভঙ্গিতে $\lim_{h \to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh)$

এবং $\lim_{h \to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a + rh)$ উভয় সমান।

সুতরাং $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a + rb) = \lim_{h \to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh)$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left[a + \frac{r(b-a)}{n}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f\left[a + \frac{r(b-a)}{n}\right]$$

$\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \frac{1}{n} \sum_{r=an}^{bn+c} \frac{r}{n} = \int_a^b f(x)dx$ [এখানে $\frac{1}{n}$ এর পরিবর্তে dx, $\frac{r}{n}$ এর পরিবর্তে x এবং $\sum_{r=a}^{bn+c}$ এর পরিবর্তে $\int_a^b$ বসাতে হয়।]

এ অধ্যায়ের গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ অন্তর্ভুক্ত করা যায়

Type-01

Ex-01 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{4}$$ **Ans.**

Ex-02 $\int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}dx$

Sol^n $\int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}\, dx$

ধরি, $x = 2\sin^2\theta + \cos^2\theta$
$\therefore dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$
$x = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$
$x = 1, \theta = 0$
$\sqrt{x-1} = \sin\theta$
$\sqrt{2-x} = \cos\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{8}$$ **Ans.**

For practice:

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = ?$ **Ans:** $\frac{\pi}{4}$

02. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ **Ans:** $= \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3})$

Type-02

Ex-01 $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^x - 1} dx$

Sol^n: $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^x - 1} dx = \int_1^2 \frac{e^{2x}(e^x - 1) + e^x(e^x - 1) + e^x}{e^x - 1} dx$

$$= \int_1^2 \left(e^{2x} + e^x + \frac{e^x}{e^x - 1}\right) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + \ln(e^x - 1)\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^4 + e^2 + \ln(e^2 - 1)\right] - \left[\frac{1}{2}e^2 + e + \ln(e - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^2 - e + \ln\frac{e^2 - 1}{e - 1} = \frac{1}{2}e^2(e^2 + 1) - e + \ln(e + 1)$$ **Ans.**

Type-03

Ex-01 $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$ এর মান কত?

Sol^n: $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int_1^8 e^z dz$

$$= \frac{1}{3}\left[e^z\right]_1^8 = \frac{1}{3}\left[e^8 - e\right]$$ **Ans.**

ধরি,
$x^3 = z \Rightarrow 3x^2 dx = dz$

x = 1	z = 1
x = 2	z = 8

Ex-02 $\int_1^2 \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$

ধরি, $x + \frac{1}{x} = z$

$\frac{x^2-1}{x^2} dx = dz$

x	1	2
z	2	5/2

Sol^n: $\int_2^{5/2} e^z dz = \left[e^z\right]_2^{5/2} = e^{5/2} - e^2$

$= e^2(\sqrt{e} - 1)$ **Ans.**

For practice:

01. $\int_0^1 xe^x dx$ **Ans :1**

Type-04

Ex-01 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x} =$ কত?

Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx = [\tan x + \sec x]_0^{\pi/3}$

$= \sqrt{3} + 2 - 1 = \sqrt{3} + 1$ **Ans.**

Ex-02 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = ?$

Sol^n: Let, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\, dx = dz$

x	$\frac{\pi}{2}$	0
z	1	0

$= \int_0^1 \frac{1}{1+z^2} dz = [\tan^{-1} z]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$ **Ans.**

Ex-03 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x\, dx = ?$

Sol^n: Let, $\tan x = z \Rightarrow \sec^2 dx = dz$

x	$\frac{\pi}{4}$	0
z	1	0

$= \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}[z^3]_0^1 = \frac{1}{3}[1^3 - 0^3] = \frac{1}{3}$ **Ans.**

Ex-04 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3} dx = ?$

Sol^n: Let, $1 + \sin x = z$

$\cos x\, dx = dz$

x	$\frac{\pi}{2}$	0
z	2	1

$= \int_1^2 \frac{1}{z^3} dz = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z^2}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right] = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$ **Ans.**

Ex-05 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

Sol^n: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} dx}{\cos x \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\frac{\pi}{4} \cos x + \sin x \sin\frac{\pi}{4}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) - \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln \cot\frac{\pi}{8} - \ln \tan\frac{\pi}{8}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\cot\frac{\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \cot^2 \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} \ln \cot \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1)$

For practice:

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ **Ans**

02. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

Type-05

Ex-01 $\int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1} x dx = ?$

Sol^n: $\int x \tan^{-1} x dx$

$= \tan^{-1} x \int x dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) \int x dx\right) dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \ldots$

$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$= \frac{3}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **Ans.**

Ex-02 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

Sol^n: $\int x^2 \cos x dx = x^2 \int \cos x dx - \int \frac{d}{dx} x^2 \int \cos x dx$

$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$

$= x^2 \sin x - 2 [x \int \sin x dx - \int \frac{d}{dx} x \int \sin x dx]$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \int - \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \ldots$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} \ldots$

For practice:

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 3x dx$ **Ans :**

Type-06

$\int_0^{\pi} e^x \sec x(1+\tan x)dx = ?$

$\int_0^{\pi} e^x(\sec x + \sec x \tan x)dx = [e^x \sec x]_0^{\pi} = e^{\pi} \times \sec\pi - e^0 \times \sec 0$

$= -e^{\pi} - 1$ **Ans.**

For practice:

$\int e^x(\sin x + \cos x)dx$ **Ans** : $e^{\frac{\pi}{2}}$

Type-07

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}dx$ —— (i)

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$ ——— (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \therefore I = \frac{\pi}{4}$ **Ans.**

For practice:

$\int \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}}dx$ **Ans.** $\frac{\pi}{4}$

Type-08

$\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ যখন $f(x) = f(2a-x)$ হয়

$\int_0^{\pi} \sin^8 x dx$ [For M.C.Q]

$\int_0^{\pi} \sin^8 x dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx = 2 \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{35}{128}\pi$

For practice:

$\int \cos^5 x dx$ **Ans.** $\frac{8}{15}$

Type-09: পরমমান বিষয়ক সমস্যাবলী

পরমমান বিষয়ক সূত্র

$\int |f(x)|dx = \begin{cases} \int f(x)dx & \text{যখন } f(x) > 0 \\ -\int f(x)dx & \text{যখন } f(x) < 0 \end{cases}$

ii. $\int |x-a|dx = \begin{cases} \int (x-a)dx & \text{যখন } x > a \\ -\int (x-a)dx & \text{যখন } x < a \end{cases}$

i. $\int f(|x|)dx = \begin{cases} \int f(x)dx & \text{যখন } x > 0 \\ \int f(-x)dx & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

Ex-01 $\int_{-3}^{3} |1-x^2|dx$

Sol^n: $-\infty<x<-1$ সীমার মধ্যে ফাংশনটি ঋণাত্মক, $-1\le x \le 1$ সীমার মধ্যে অঋণাত্মক এবং $1<x<\infty$ সীমার মধ্যে ঋণাত্মক। $|f(x)|$ এর অর্থ হল $f(x)$ এর ঋণাত্মক অংশসমূহকে অঋণাত্মকে পরিণত করা। এই উদ্দেশ্য ফাংশনকে তিনটি ভাগ করা প্রয়োজন।

$\therefore \int_{-3}^{3} |1-x^2|dx = \int_{-3}^{-1} -(1-x^2)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{3} -(1-x^2)dx$

$= \int_{-3}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-3}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3} = \frac{44}{3}$ **Ans.**

Ex-02 $\int_{-2}^{6} |x-1|dx$

Sol^n: $\int_{-2}^{6} |x-1|dx$

$= -\int_{-2}^{1}(x-1)dx + \int_{1}^{6}(x-1)dx = \int_{1}^{-2}(x-1)dx + \int_{1}^{6}(x-1)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{6}$

$= \left[\frac{(-2)^2-1}{2} - (-2-1)\right] + \left[\frac{6^2-1^2}{2} - (6-1)\right] = 17$ **Ans.**

For practice:

01. $\int_{-5}^{5} |x-5|dx$ **Ans.** 50

Type-10

Ex-01 যোগফলের সীমা রূপে (মূল নিয়মে) $\int_0^1 x^3 dx$ এর মান বের কর।

Sol^n: $\int_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left\{a + \frac{(b-a)r}{n}\right\}$

এখানে $a = 0, b = 1; f(x) = x^3 \therefore f\left\{a + \frac{(b-a)r}{n}\right\}$

$= f\left\{0 + \frac{1-0}{n}r\right\} = f\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{r^3}{n^3}$

$\therefore \int_0^1 x^3 dx = \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{r^3}{n^3} = \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{1}{n^4} \sum_{r=1}^{n} r^3 = \underset{n\to\infty}{Lt} \frac{1}{n^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$= \frac{1}{4} \underset{n\to\infty}{Lt} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}$ **Ans.**

Ex-02 $\underset{n\to\infty}{Lt} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right] \times n$

Sol^n: $\underset{n\to\infty}{Lt} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right] \times n$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2+1} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+r^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\tan^{-1}x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$ **Ans.**

Ex-03 $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

Sol^n: ধরি $A = \left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

$$\therefore \ln A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\ln\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)$$

$$= \int_0^1 \ln(1+x^2)dx = [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \ln 2 - 2[x-\tan^{-1}x]_0^1$$

$$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \quad \therefore A = e^{\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2} = 2e^{\frac{\pi-4}{2}}$$ **Ans.**

For practice:

01. যোগফলের সীমা রূপে (মূল নিয়মে) $\int_0^1 x^2dx$ এর মান বের কর। **Ans:** $\frac{1}{3}$

02. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ **Ans:** ln2

03. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\sin\frac{\pi k}{n}$ **Ans:** $\frac{1}{\pi}$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। [11-12]

Solve $\int\frac{dx}{1+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$

$$= \int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}dx$$

$$\therefore \int\frac{dz}{z(1+z)} = \int\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz$$

$$= \ln(z) - \ln(z+1) = \ln\frac{z}{z+1}$$

ধরি, $\tan\frac{x}{2} = z$
$\therefore \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dz$
$x = \frac{\pi}{3}$ হলে, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = 1$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = \left[\ln\frac{z}{z+1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$= -\ln 2 - \ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

02. মান নির্ণয় কর: $\int_0^4 y\sqrt{4-y}\,dy$ [10-11]

Solve $\int_0^4 y\sqrt{4-y}\,dy$

$$= -\int_2^0(4-z^2)\,2.z.zdz$$

$$= 2\int_0^2(4z^2-z^4)dz$$

$$= 2\left\{4.\frac{1}{3}[z^3]_0^2 - \frac{1}{5}[z^5]_0^2\right\}$$

$$= 2\left[\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right] = 2.\frac{64}{15} = \frac{128}{15}$$

ধরি, $\sqrt{4-y} = z$
$\Rightarrow 4-y = z^2$
$\Rightarrow -dy = 2\,zdz$
$\therefore dy = -2\,zdz$
যখন, $y = 0$ তখন, $z = 2$
যখন, $y = 4$ তখন, $z = 0$

03. মান নির্ণয় কর: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-\sin^2x)\sqrt{\sin x}\,dx$ [10-11;CUET...]

Solve $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(1-\sin^2x)\sqrt{\sin x}\,dx$

$$= \int_0^1(1-P^2)\sqrt{P}dP$$

$$= \int_0^1\sqrt{P}dP - \int_0^1 P^{\frac{5}{2}}dP$$

$$= \left[\frac{P^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{P^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{2}{7} = \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$$

Let, $\sin x = P$
$\Rightarrow \cos x\,dx = dp$
যখন, $x = 0$, $P = 0$
এবং $x = \frac{\pi}{2}$, $P = 1$

04. যোগজটির মান নির্ণয় কর: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x dx}{\sin^4x+\cos^4x}$
[10-11,08-09, 97-98, 96-97; KUET 16-17,...]

Solve $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\tan x\sec^2x}{1+\tan^4x}dx$$

[Let, $\tan^2x = z \Rightarrow 2\tan x\sec^2x\,dx = dz$,
$x = \frac{\pi}{4}$ হলে, $z = 1$; $x = 0$ হলে, $z = 0$]

$$\therefore \int_0^1\frac{dz}{1+z^2} = [\tan^{-1}z]_0^1 = [\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0] = \frac{\pi}{4}$$

...মান নির্ণয় কর : $\int_1^{\sqrt3} x\cot^{-1}x\,dx$ [09-10]

Solve $I=\int x\cot^{-1}x\,dx$

$=\cot^{-1}x\int x\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}\cot^{-1}x\int x\,dx\right\}dx$

$=\cot^{-1}x.\frac{x^2}{2}-\int\left\{\frac{-1}{1+x^2}.\frac{x^2}{2}\right\}dx$

$=\frac{x^2}{2}\cot^{-1}x+\frac12\int\left[1-\frac{1}{1+x^2}\right]dx$

$=\frac{x^2}{2}\cot^{-1}x+\frac12(x-\tan^{-1}x)$

$\int_1^{\sqrt3}x\cot^{-1}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\cot^{-1}x+\frac12(x-\tan^{-1}x)\right]_1^{\sqrt3}$

$=\frac32\cot^{-1}\sqrt3+\frac12(\sqrt3-\tan^{-1}\sqrt3)-\frac12\cot^{-1}1-\frac12(1-\tan^{-1}1)$

$=\frac32.\frac{\pi}{6}+\frac12\left(\sqrt3-\frac{\pi}{3}\right)-\frac12.\frac{\pi}{4}-\frac12\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{3\pi}{12}+\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}-\frac12+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt3}{2}-\frac12$ **Ans.**

...sinxdx [08-09;RUET:07-08]

Solve [ধরি, $1+\cos x=z\Rightarrow \sin x\,dx=-dz$
যখন $x=0, z=2$ এবং যখন $x=\frac{\pi}{2}, z=1$]

$=\int_2^1 z^2(-dz)=-\left[\frac{z^3}{3}\right]_2^1=\frac83-\frac13=\frac73$ **Ans.**

...যোগজটির মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1-\tan^2x}$, [07-08]

Solve $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1-\tan^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2x}{\cos^2x-\sin^2x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac12(1+\cos2x)}{\cos2x}dx=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec2x\,dx+\frac12\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx$

$=\frac14[\ln(\sec2x+\tan2x)]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{12}$

$=\frac14\ln(2+\sqrt3)-\frac14\ln1+\frac{\pi}{12}$

$=\frac14\ln(2+\sqrt3)+\frac{\pi}{12}$ **Ans.**

...মান নির্ণয় কর : $\int_{\frac12}^1\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$ [04-05 ; CUET 12-13]

Solve $\int_{\frac12}^1\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

$=\int_{\frac12}^1\frac{2dx}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}=\int_1^2\frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$

Let, $2x=z$
$\therefore\ 2dx=dz$
এখন $x=\frac12$ হলে, $z=1$
এবং $x=1$ হলে, $z=2$

$=[\sec^{-1}z]_1^2=\sec^{-1}2-\sec^{-1}1$

$=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$ **Ans.**

09. নির্দিষ্ট ইন্টিগ্রাল নির্ণয় কর : $\int_2^e\left[\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$ **[02-03, 95-96]**

Solve $\int\frac{1}{\log x}dx-\int\frac{1}{(\log x)^2}dx$

$=\frac{1}{\log x}\int dx-\int\frac{-1}{x(\log x)^2}x\,dx-\int\frac{1}{(\log x)^2}dx$

$=\frac{x}{\log x}+\int\frac{1}{(\log x)^2}dx-\int\frac{1}{(\log x)^2}dx=\frac{x}{\log x}$

$\therefore\int_2^e\left\{\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right\}dx=\left[\frac{x}{\log x}\right]_2^e=e-\frac{2}{\log2}$ **Ans.**

10. মান নির্ণয় কর: $\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ **[01-02, 03-04]**

Solve $\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$

$=\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}=[\sec^{-1}(x-1)]_2^3=\sec^{-1}2-\sec^{-1}1$

$=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$ **Ans.**

11. মান নির্ণয় কর : $\int_0^a\frac{(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2}dx$ **[00-01]**

Solve $\int_0^a\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$

$=\int_0^a\frac{\frac{a^2-x^2}{x^2}}{\frac{(a^2+x^2)^2}{x^2}}dx$

ধরি, $x+\frac{a^2}{x}=z$
$\Rightarrow\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)dx=dz$
$x=0, z=\infty$
$x=a, z=2a$

$=-\int_0^a\frac{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{a^2}{x}\right)^2}=-\int_\infty^{2a}\frac{dz}{z^2}=\left[\frac1z\right]_\infty^{2a}=\frac{1}{2a}$ **Ans.**

12. মান নির্ণয় কর : $\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx$. **[98-99]**

Solve $\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\frac12\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$

$=[\tan^{-1}x]_0^1+\frac12[\log(1+x^2)]_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac12\log2$ **Ans.**

13. মান নির্ণয় কর : $\int_2^{5.5}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}}$ **[95-96]**

Solve $\int_2^{5.5}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}}$

$=\int_2^{5.5}\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}}{2x+5-2x+3}dx=\frac18\int_2^{5.5}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x-3}\right)dx$

$=\frac18\left[\frac{(2x+5)^{\frac32}}{\frac32\times2}-\frac{(2x-3)^{\frac32}}{\frac32\times2}\right]_2^{5.5}=\frac{19}{12}-\frac{2\sqrt2}{3}$ **Ans.**

14. মান নির্ণয় কর : $\int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ [96-97]

Solve $\int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$

$\therefore \int \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = \log x\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\log x)\int\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \log x 2\sqrt{x} - \int\left(\frac{1}{x}.2\sqrt{x}\right)dx = 2\log x\sqrt{x} - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= 2\log x\sqrt{x} - 2.2\sqrt{x}$

$\therefore \int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx = [2\log x.\sqrt{x} - 4\sqrt{x}]_1^4$

$= (4\log 4 - 8) - (0 - 4) = 4\log 4 - 4$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. মান নির্ণয় কর: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,\sin^3 x dx$ [03-04]

Solve $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,\sin^3 x\,dx$

Let, $\cos x = p$
$\Rightarrow -\sin x\,dx = dp$
যখন, $x = 0, p = 1$
এবং $x = \frac{\pi}{2}, p = 0$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\,(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$= -\int_1^0 \sqrt{p}(1-p^2)dp = -\left[\frac{p^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_1^0 = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. মান নির্ণয় কর: $\int_0^1 2x^3e^{-x^2}dx$ [14-15; RUET:12-13;]

Solve $\int_0^1 2x^3e^{-x^2}dx$

ধরি, $-x^2 = z$
$\therefore 2x\,dx = -dz$
$x = 0$ হলে, $z = 0$
এবং $x = 1$ হলে, $z = -1$

$= \int_0^{-1}(-z)e^z.(-dz) = \int_0^{-1} ze^z dz$

এখন, $\int ze^z dz = z\int e^z dz - \int\left(\frac{d}{dz}.z\int e^z dz\right)dz$
$= ze^z - \int e^z dz = e^z(z-1)$

$\therefore \int_0^{-1} ze^z dz = \left[e^z(z-1)\right]_0^{-1} = e^{-1}.(-2) + 1 = 1 - \frac{2}{e}$ **Ans.**

02. যোজিত ফল নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ [09-10]

Solve $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

ধরি, $1 + \sin x = P$
$\Rightarrow \cos x\,dx = dP$
যখন $x = 0, P = 1$
এবং $x = \frac{\pi}{2}, P = 2$

$= \int_1^2 \frac{dP}{P(P+1)}$

$= \int_1^2\frac{dP}{P} - \int_1^2\frac{dP}{P+1}$ [আংশিক ভগ্নাংশ করে]

$= [\ln P]_1^2 - [\ln(P+1)]_1^2 = \ln\frac{4}{3}$ **Ans.**

03. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\sin 3x dx$ [08-09...]

Solve $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x\sin 3x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\sin 3x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 5x - \frac{1}{4}\sin x\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{20}\cos 5x + \frac{1}{4}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{4} = \frac{-2}{15}$

04. মান নির্ণয় কর: $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ [07-08]

Solve $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \int_1^3\frac{dP}{P^2}$

Let, $1 + \ln x = P$
$\frac{1}{x}dx = dP$
যখন $x = e^2, P = 3$
এবং $x = 1, P = 1$

$= -\left[\frac{1}{P}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$ **Ans.**

05. মান নির্ণয় কর: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$ [03-04]

Solve $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$

Let, $\sin x = P$
$\Rightarrow \cos x\,dx = dP$
এখন, $x = 0, P = 0$
এবং $x = \frac{\pi}{2}, P = 1$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sqrt{\sin x}}dx$

$= \int_0^1\frac{(1-P^2)}{\sqrt{P}}dP = \left[2\sqrt{P}\right]_0^1 - \frac{2}{5}\left[P^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. (a) মান নির্ণয় কর: $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ [11-12]

Solve $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$I = \int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

এখন, $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$ [ধরি, $\tan x = z \Rightarrow \sec^2 x dx = dz$
$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = \infty$, এবং $x = 0$ হলে, $z = 0$]

$= 2\int_0^{\infty}\frac{dz}{a^2 + b^2z^2} = 2\frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\left(\frac{bz}{a}\right)\right]_0^{\infty}$

$= \frac{2}{ab}[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0] = \frac{2}{ab}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{ab}$

...মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$ [11-12]

Solve $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$

$\ldots + 1)dx = \ln(x^2+1)\int dx - \int\left(\frac{2x}{x^2+1}\int dx\right)dx$

$\ldots(x^2+1) - 2.\int\frac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln(x^2+1) - 2.\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$\ldots(x^2+1) - 2(x-\tan^{-1}x) + c$

$\ldots(x^2+1)\,dx = [x\ln(x^2+1) - 2(x-\tan^{-1}x)]_0^1$

$\ldots\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ **Ans.**

...নির্ণয় কর : (a) $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$ [09-10]

Solve (a) $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$

$\ldots \int\tan^{-1}x\,dx = (\tan^{-1}x)x - \int\frac{1}{1+x^2}x\,dx$

$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \left[x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$

$= \left[\tan^{-1}1 - \frac{1}{2}\ln 2\right] - 0 - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ **Ans.**

(b) $\int_{-\ln 2}^{0}\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$

Solve (b) $\int_{-\ln 2}^{0}\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$

$\ldots 1 + e^{-x} = z$

$\ldots e^{-x}dx = dz$, যখন $x = 0, z = 2$ এবং $x = -\ln 2, z = 3$]

$\int_{-\ln 2}^{0}\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int_3^2\frac{dz}{z} = -[\ln z]_3^2 = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$ **Ans.**

$\ldots \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ [08-09]

Solve $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int e^x\left\{\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx$

$\ldots\int e^x\left\{\frac{1}{1+x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right\}dx = e^x\frac{1}{1+x} + C$

$\int_0^1\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{e^x}{(1+x)}\right]_0^1 = \left(\frac{e}{2} - \frac{e^0}{1}\right) = \frac{e}{2} - 1$ **Ans.**

04. মান নির্ণয় কর: $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ [07-08]

Solve $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ধরি, $\sin^{-1}x = z$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dz$

$x = 1$ হলে $z = \frac{\pi}{2}$

এবং $x = 0$ হলে $z = 0$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{8}$ **Ans.**

05. মান নির্ণয় কর: $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ [06-07]

Solve $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ধরি, $x = a\sin\theta$

$\Rightarrow dx = a\cos\theta\,d\theta$

যখন $x = 0$, তখন $\theta = 0$

এবং $x = a$, তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi a^2$ **Ans.**

06. যোজিত ফল নির্ণয় কর: $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ [04-05]

Solve $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

ধরি, $x = 2\sin\theta$

$\therefore dx = 2\cos\theta\,d\theta$

যখন, $x = 2$ তখন $\theta = \frac{\pi}{2}$

এবং $x = 1$ তখন $\theta = \frac{\pi}{6}$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta d\theta}{4\sin^2\theta\,2\cos\theta} = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{cosec}^2\theta d\theta$

$= \frac{1}{4}[-\cot\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[-\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **Ans.**

07. মান নির্ণয় কর: $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$ [03-04]

Solve ধরি, $1 + 3x^4 = z$ যখন $x = 1$ তখন $z = 4$

$\Rightarrow 12x^3dx = dz \Rightarrow x^3dx = \frac{dz}{12}$ যখন $x = 0$ তখন $z = 1$

$\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}dx$

$= \int_1^4 \frac{1}{12}\sqrt{z}\,dz = \frac{1}{12}\left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$= \frac{1\times2}{12\times3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

$= \frac{1}{18}(8-1) = \frac{7}{18}$ **Ans.**

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ এর মান– [13-14]

A. 0 B. π C. –π D. π/2

Ans B Solve $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left\{x^2-2.\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}}$

$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \left[\sin^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = [\sin^{-1}(2x-1)]_0^1$

$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

02. নিচের যোগজের মান হবে: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$ [09-10]

A. 1 B. $\frac{1}{152}$ C. 0 D. $\frac{1}{162}$

Ans D Solve $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cot^5 x .\text{cosec}^2 x\, dx$

[ধরি, cotx = z ∴ $\text{cosec}^2x\, dx = -dz$

যখন $x = \frac{\pi}{2}$, z = 0 এবং $x = \frac{\pi}{3}$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

$= -\int_{1/\sqrt{3}}^{0} z^5 dz = \left[\frac{z^6}{6}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(\sqrt{3})^6} = \frac{1}{162}$

03. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ এর মান হবে: [09-10]

A. $\frac{\pi}{32}$ B. $\frac{\pi}{16}$ C. $\frac{\pi^2}{32}$ D. $\frac{\pi^2}{16}$

Ans C Solve $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$

$= \int_0^{\pi/4} z dz = \frac{1}{2}\left[z^2\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$

ধরি, $\tan^{-1}x = z$
∴ $\frac{dx}{1+x^2} = dz$
যখন x = 0, z = 0
এবং x = 1, $z = \frac{\pi}{4}$

04. মান নির্ণয় কর: $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-2x^2}} dx$ [09-10]

A. 1 B. 4 C. 3 D. None

Ans A Solve $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-2x^2}} dx$

ধরি, $9 - 2x^2 = z^2$
∴ 0 – 4xdx = 2 zdz

$= -\frac{1}{2}\int_3^1 \frac{zdz}{z}$

$= \frac{1}{2}\int_1^3 dz = \frac{1}{2}[z]_1^3 = \frac{1}{2}(3-1) = 1$

∴ xdx = ...
যখন x = 0, ...
এবং x = 2, ...

05. $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos\theta d\theta$ এর মান হবে- [07-08 , CUET 11-12]

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{4}$

Ans C Solve $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos\theta\, d\theta$

$= \int_0^1 z^5 dz = \frac{1}{6}[z^6]_0^1 = \frac{1}{6}$

ধরি, sinθ = z
∴ cosθ dθ = ...
যখন $x = \frac{\pi}{2}$, ...
এবং x = 0, ...

06. নিচের যোগজ এর মান হবে- $\int_0^{\log 2} \frac{e^x dx}{1+e^x}$ [07-08]

A. $e^{3/2}$, B. $\log\frac{3}{2}$ C. log2 D. ...

Ans B Solve $\int_0^{\log 2} \frac{e^x dx}{1+e^x} = \left[\log(1+e^x)\right]_0^{\log 2}$

$= [\log(1+e^{\log 2})] - [\log(1+e^0)] = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}$

07. নিচের যোগজ এর মান হবে- $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$ [06-07]

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. ...

Ans C Solve $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$ | ধরি, $x^2 = z$ ∴ 2x dx = dz; যখন x = 0, z = 0 যখন x = ...

$= \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}[\tan^{-1}z]_0^1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

11. নিচের যোগজ এর মান হবে- $\int_{-1}^{1} |x| dx$ [06-07]

A. 2 B. –1 C. 1 D. 0

Ans C Solve $\int_{-1}^{1} |x|dx = -\int_{-1}^{0} xdx + \int_0^1 xdx$

$= -\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(0-1) + \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ...

12. নিচের যোগজ এর মান হবে: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx$ [05-06]

A. $\sqrt{2}-2$ B. $2-\sqrt{2}$ C. $1-\sqrt{2}$ D. ...

Ans B Solve $\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx$

$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx - \int \sec x \tan x\, dx$ = tan ...

∴ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = [\tan x - \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$ ...

13. নিচের যোগজ-এর মান হবে- $\int_1^e \ln x\, dx$ [05-06]

A. –1 B. 0 C. e D. 1

Ans D Solve $\int \ln x\, dx = \ln x \int dx - \int\left(\frac{1}{x}\int dx\right)dx$ = ...

∴ $\int_1^e \ln x\, dx = [x \ln x - x]_1^e = e - e - 0 + 1 = 1$

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ এর মান কোনটি? [17-18]

A. $\frac{\pi a^2}{4}$ B. $\frac{\pi a^2}{3}$ C. $\frac{\pi a^2}{5}$ D. $\frac{\pi a^2}{7}$ E. $3\pi a^2$

Ans A Solve

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[x\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{\pi a^2}{4}$$

02. $\int_0^\infty \frac{22dx}{x^2 - 14x + 170}$ এর মান কত? [15-16]

A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{\pi}{4}$ D. 22π E. 11π

Ans Blank Solve $\int_0^\infty \frac{22\,dx}{x^2 - 14x + 170}$

$$= \int_0^\infty \frac{22\,dx}{(x-7)^2 + 11^2} = \frac{1}{2\times 11}\times 22\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-7}{11}\right)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{7}{11}$$

03. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$ এর মান কোনটি? [14-15]

A. $\ln 3 + \frac{1}{2}$ B. $2\ln 2 - 1$ C. $4\ln 3 + 1$ D. $\frac{1}{2}\ln 3$ E. $2\ln 3 + 5$

Ans B Solve $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{2-(1+x)}{1+x}dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x} - 1\right)dx = [2\ln(1+x) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

04. $\int_0^\infty e^{-2x}\cos 4x\,dx$ এর মান হলো– [13-14]

A. e^{-2x} B. 0 C. 2/5 D. 1/10 E. 1/20

Ans D Solve $\int_0^\infty e^{-2x}\cos 4x\,dx$

ধরি, $I = \int e^{-2x}\cos 4x\,dx$

$$= \cos 4x\int e^{-2x}dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\cos 4x)\int e^{-2x}dx\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 4x - \int\left(-4\sin 4x\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 4x - 2\int e^{-2x}\sin 4x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 4x - 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 4x - \int\left(4\cos 4x.\frac{-1}{2}e^{-2x}\right)dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 4x + e^{-2x}\sin 4x - 4\int e^{-2x}\cos 4x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 4x + e^{-2x}\sin 4x - 4I$$

$$\Rightarrow 5I = e^{-2x}\sin 4x - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos 4x \Rightarrow I = \frac{e^{-2x}}{5}\left[\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x\right]$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-2x}\cos 4x\,dx = \left[\frac{e^{-2x}}{5}\left(\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x\right)\right]_0^\infty$$

$$= [0 - \{\tfrac{1}{5}(0 - \tfrac{1}{2})\}] = \frac{1}{10}$$

05. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ -এর মান হলো- [12-13, CUET 11-12]

A. $\frac{-\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{2}$ E. $\frac{3\pi}{2}$

Ans Blank Solve

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$$

[ধরি, $1 - x = t \therefore -dx = dt$

$x = 0$ হলে, $t = 1$ এবং $x = 1$ হলে, $t = 0$]

$$\therefore I = \int_1^0 \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -[\sin^{-1}t]_1^0$$

$$= -[\sin^{-1}0 - \sin^{-1}1] = -\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

06. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ এর মান কোনটি? [11-12]

A. 1 B. π C. $\frac{\pi}{2} - 1$ D. $\frac{\pi}{2} + 1$ E. $1 - \pi$

Ans C Solve $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= [\sin^{-1}x]_0^1 + \frac{1}{2}\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

$$= \sin^{-1}(1) - 0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

07. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ এর মান কত? [10-11]

A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{11}{15}$ E. $\frac{8}{15}$

Ans E Solve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx = \frac{4\times 2\times 1}{5\times 3\times 1} = \frac{8}{15}$$ [By wallie's theorem]

08. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ এর মান কত? [10-11]

A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$ E. $\frac{\pi}{7}$

Ans C Solve $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{3}$

09. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ এর মান কত? [09-10]

A. $\tan^{-1} e - \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}\tan^{1} e$ C. $\tan^{-1}(e) - \frac{\pi}{4}$

D. $\tan^{-1} e - \frac{1}{3}$ E. $\tan^{-1} e^{2x}$

Ans C Solve

$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1}$

ধরি, $e^x = z$
$\Rightarrow e^x\,dx = dz$
যখন, $x = 0$ তখন $x = 1$
যখন, $x = 1$ তখন $z = e$

$= \int_1^e \frac{dz}{z^2+1} = [\tan^{-1}(z)]_1^e = \tan^{-1}(e) - \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}(e) - \frac{\pi}{4}$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9 - \sin^2 x} dx$ এর মান কোনটি? [07-08]

A. $\frac{1}{6}\ln 2$ B. $2\ln 6$ C. $\frac{1}{2}\ln 6$ D. $\frac{1}{3}\ln 2$ E. $6\ln 3$

Ans A Solve

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9 - \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{dh}{3^2 - h^2}$

ধরি, $\sin x = h$
$\Rightarrow \cos x\, dx = dh$
যখন $x = 0$, তখন $h = 0$
যখন $x = \frac{\pi}{2}$, তখন $h = 1$

$= \left[\frac{1}{2\times 3}\ln\left(\frac{3+h}{3-h}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+1}{3-1}\right) = \frac{1}{6}\ln 2$

11. মান নির্ণয় করঃ $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ [06-07, 05-06]

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{5}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$ E. $\frac{\pi}{3}$

Ans D Solve

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1}(x)]_1^{\sqrt{3}} = \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ এর মান কত? [13-14]

A. π B. $\pi/2$ C. 2π D. None

Ans A Solve

$\int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} = \left[\sin^{-1}\frac{x-a}{a}\right]_0^{2a}$

$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \pi$

02. $\int_1^2 \log x\, dx$ -এর মান- [10-11]

A. log 2 B. 2 log 2 C. 2 log 2–1 D. None

Ans C Solve $\int_1^2 \log x dx$

$\int \log x dx = \log x . x - \int \frac{1}{x} x dx = x\log x - x$

$\therefore \int_1^2 \log x\, dx = [x\log x - x]_1^2 = 2\log 2 - 2 - \log 1 + 1 = 2\log 2 - 1$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\int_0^1 e^{-x^2} dx = ?$ [14-15]

A. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ B. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$ C. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \ldots}{\ldots}$

D. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k!}$ E. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-\frac{1}{2}}}{2\ln k}$

Ans B Solve $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{\lfloor k} dx$

$= \sum_{K=0}^{\infty}\left[\int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{\lfloor k} dx\right] = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lfloor k}\left[\int_0^1 x^{2k} dx\right] = \sum_{K=0}^{\infty} \ldots$

02. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin x} dx$ এর মান- [13-14]

A. $\frac{1}{2}\ln(2)$ B. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ C. $\frac{1}{4}\ln(3)$ D. $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ E. None

Ans E Solve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{4 - \sin x}$

ধরি $4 - \sin x = z \therefore -\cos x \ldots$
যখন $x = \frac{\pi}{2}$, $z = 3$
এবং $x = 0$, $z = 4$

$\Rightarrow \int_4^3 \frac{-dz}{z} = -\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3}$

03. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$ এর মান- [13-14]

A. $\frac{\pi}{a^2}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{\pi}{2a^2}$ E. None

Ans C Solve $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$

$= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}$

$= \left[\sin^{-1}\frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right]_0^a = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

04. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} = ?$ [12-13]

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$ E. None

Ans B Solve

$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{2^2 - z^2}}$

ধরি, $\sin x = z$
$\therefore \cos x\, dx = dz$
$x = 0$ হলে, $z = 0$
$x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $z = 1$

$= \left[\sin^{-1}\frac{z}{2}\right]_0^1 = \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{6}$

$\int (\sin x + \cos x)^2\, dx = ?$ [11-12]

A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$ E. π

Solve $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\, dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 2.\frac{\pi}{2} = \pi$

যদি $\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cos^{-1} \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ হয়, তবে

$\int \frac{dx}{a + b\cos x}$ এর মান হবে- [10-11]

A. $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ B. $\frac{-2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

D. $\frac{-1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ E. $\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

Solve

$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cos^{-1} \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left[\cos^{-1}\frac{b - a}{a - b} - \cos^{-1}\frac{b + a}{b + a}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}[\pi - 0] = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

SELF TEST [Written]

01. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{2 + \cos x}$ **Ans.** $2 + 4\ln\frac{2}{3}$

02. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + a} + \sqrt{x}}$ **Ans.** $\frac{4}{3}\sqrt{a}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

03. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$ **Ans.** $-\frac{\pi}{12}$

04. $\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$ **Ans.** $\frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}$

05. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ **Ans.** $6 - 4\ln 2$

06. $\int \frac{1}{1 + x^2} \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) dx$ Ans : $\frac{7\pi^2}{72}$

07. $\int \left(\sqrt{x + \sqrt{12x - 36}} + \sqrt{x - \sqrt{12x - 36}}\right) dx$ Ans : $6\sqrt{3}$

08. $\int \{(1 + x)\sin x + (1 - x)\cos x\}\, dx$ Ans : $2\left(\sqrt{2} + 1\right)$

SELF TEST [MCQ]

01. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^2}} = ?$

A. $\sqrt{3} - 2$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. $4 - 2\sqrt{3}$ D. $1 - \sqrt{3}$

02. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x} = ?$

A. $\ln\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)$ B. $\ln(\tan 8\pi)$ C. $\ln\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)$ D. কোনটিই নয়

03. $\int_0^a \sin^{-1}\frac{2t}{1 + t^2}\, dt = ?$

A. $2a\tan^{-1}a - \ln(1 + a)$ B. $2a\tan^{-1}a - \ln(1 + a^2)$
C. $2a\tan^{-1}a - \tan^{-1}(1 + a)$ D. কোনটিই নয়

04. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x - 1)(2 - x)}} = ?$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. 2π C. π D. π^2

05. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x)\, dx = ?$

A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

06. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}\, dx = ?$

A. $\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ B. $\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $3 - \sqrt{2}$

07. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \frac{1}{6}\sin^2 x} = ?$

A. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$

08. $\int_1^a \frac{2x\, dx}{1 + x^2} = \ln 5$ হলে, a = ?

A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

09. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot x}\, dx = ?$

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{\pi}{4}$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}\, d\theta = ?$

A. $\frac{4 - \pi}{3}$ B. $\frac{4 - \pi}{4}$ C. $\frac{\pi - 4}{4}$ D. $\frac{\pi - 3}{4}$

11. $\int_{-2}^{2} |x - 1|\, dx = ?$

A. 5 B. 4 C. 2 D. 1

12. $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

A. $\frac{\pi a^2}{a}$ B. $\frac{\pi a^2}{2}$ C. πa^2 D. $\frac{3\pi a^3}{4}$

13. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx = ?$

A. ln2 B. ln4 C. $\ln\sqrt{2}$ D. ln8

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^3 x \sec^2 x\, dx = ?$

A. 0 B. −1 C. 1 D. 2

15. $\int_2^5 \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}} dx = ?$

A. $\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{7}$ C. $3\sqrt{7}$ D. $7\sqrt{7}$

16. $\int_0^4 \frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}\, dx = ?$

A. 5π B. 6π C. 7π D. 8π

17. $\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13} = ?$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{5}$ D. $\frac{\pi}{12}$

18. $\int_a^b f(x)dx = ?$

A. $\int_a^b f(a+b+x)\,dx$ B. $\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

C. $\int_a^b f(a-b+x)\,dx$ D. $\int_a^b f(b-a+x)\,dx$

19. $\int_0^{\pi} \sin 2x dx = ?$

A. 1 B. −1 C. 0 D. 2

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot x}\,dx}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}} = ?$

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. none

OMR

01. (A)(B)(C)(D)	06. (A)(B)(C)(D)	11. (A)(B)(C)(D)	16. (A)(B)(C)(D)
02. (A)(B)(C)(D)	07. (A)(B)(C)(D)	12. (A)(B)(C)(D)	17. (A)(B)(C)(D)
03. (A)(B)(C)(D)	08. (A)(B)(C)(D)	13. (A)(B)(C)(D)	18. (A)(B)(C)(D)
04. (A)(B)(C)(D)	09. (A)(B)(C)(D)	14. (A)(B)(C)(D)	19. (A)(B)(C)(D)
05. (A)(B)(C)(D)	10. (A)(B)(C)(D)	15. (A)(B)(C)(D)	20. (A)(B)(C)(D)

Correct Answer

20.A	19.C	18.B	17.D	16.A	15.D	14.C	13.C	12.B	11.A
10.B	09.D	08.C	07.D	06.A	05.B	04.C	03.B	02.A	01.B

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}$ Ans : $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4a^3b^3}$

02. যদি $f: R \to R$, $f(x) = \sin x + x$ হয় তবে $\int_0^{\pi} [f^{-1}(x)]dx = ?$

Ans : $\frac{\pi^2}{2} - 2$

03. $\underset{a\to\infty}{Lt} \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{x^2+ax+1}{1+x^4} \tan^{-1}\frac{1}{x} dx$ Ans [illegible]

04. $\int_0^{\pi} \frac{x^2 \cos x}{(1+\sin x)^2} dx$ Ans : [illegible]

05. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sec x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x(1-\sin x)} dx$ Ans : $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$ [illegible]

06. $\int_{-2\pi}^{5\pi} \cot^{-1}(\tan x)dx$ Ans [illegible]

07. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 nx}{(1+\pi^{-x})\sin^2 x} dx$, $n \in Z^+$ Ans [illegible]

08. যদি $2f(x) + f(-x) = \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{1}{x}\right)$ হয় তবে $\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)dx = ?$

09. $\int_{\cos^{-1}(\cos\theta)}^{\sin^{-1}(\sin\theta)} \left|\frac{\cos^{-1}(\cos x)}{\sin^{-1}(\sin x)}\right| dx$ Ans [illegible]

10. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{n\pi-\frac{\pi}{4}} |\sin x + \cos x|dx$ Ans [illegible]

11. যদি $f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f(x) = 0$ $(x \neq 0)$ হয় তবে $\int_{\sin\theta}^{\operatorname{cosec}\theta} f(x)\,dx = ?$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{2x-\pi} dx$ Ans [illegible]

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sec x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x(1-\sin x)} dx$ Ans : $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$ [illegible]

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ Ans [illegible]

15. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \ln|\sin x| \cos 2nx dx$, $n \in N$ Ans [illegible]

16. প্রমাণ কর যে, $\int_a^b [f^2(x) - f^2(a)\}\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} 2x\, \{b - f^{-1}(x)$ [illegible]

17. যদি $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ এবং $g(x) = f^{-1}(x)$ হয় তবে $g'(0) = ?$

Ans : [illegible]

18. $\int_0^{\alpha} \ln(\cot\alpha + \tan x)dx$ Ans : − [illegible]

19. $\int_0^2 \frac{dx}{(17+8x-4x^2)(e^{6(1-x)}+1)}$ Ans : $\frac{1}{4\sqrt{21}} \ln$ [illegible]

20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2(\sin 2x - \cos 2x)}{(1+\sin 2x)\cos^2 x} dx$ Ans: $\frac{\pi^2}{16}$ − [illegible]

21. $\int_1^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|dx$ Ans [illegible]

22. যদি $f(x) = x + \int_0^1 (xy^2 + x^2y)\, f(y)dy$ হয় তবে $f(x) = ?$

Ans: $\frac{80x^2 + \text{[illegible]}}{119}$

$\int \frac{\sin\theta\left(\cos^2\theta - \cos^2\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos^2\theta - \cos^2\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin 5\theta} d\theta$ Ans: $\frac{1}{16}$

$\int \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx$ Ans: $\pi\left(\sqrt{1 - a^2} - 1\right)$

$\int [\tan^{-1}x]dx = ?$ [[x] = Greatest integer function]

Ans: $10\pi - \tan 1$

$\int x\sin[x^2 - \pi]\, dx = ?$ [[x] = Greatest integer function]

Ans: $\frac{1}{2}[(4 - \pi)\sin 4 + \sin 5 - (6 + \pi - \pi^2)\sin 6]$

$f(x) = \min\{|x - 1|, |x|, |x + 1|\}$ হয় তবে $\int_{-1}^{1} f(x)dx = ?$ Ans: $\frac{1}{2}$

$f(x)f'(-x) = f(-x)f'(x)$ এবং $f(0) = 3$ হয় তবে $\int_{-51}^{51} \frac{dx}{3 + f(x)} = ?$

Ans: 17

$f(x) = e^x + \int_0^1 (e^x + te^{-x})\, f(t)\, dt$ হয় তবে f(x)-এর মান নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{2(e - 1)}{4e - 2e^2} e^x + \frac{e - 1}{4 - 2e} e^{-x}$

$f(x) = \int_0^x \{x\, f(t) + 1\}\, dt$ হয় তবে $\int_0^3 f(x)dx = ?$ Ans: 12

$\int \max[\ln(1 + x^2), 1]\, dx$

Ans: $2\sqrt{e - 1} + 2\ln 5 - 4 + 2\tan^{-1}2 - 2\tan^{-1}\sqrt{e - 1}$

$\int [x^2 - x + 1]dx$ [x] = Greatest integer function

Ans: $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

$\int \{\cos x \cos 2x \cos 2^2x \ldots\ldots \cos 2^{n-1}x \cos(2^n - 1)x\}dx$

Ans: $\frac{\pi}{2^{n-1}}$

$f: R \rightarrow R$ এবং $f(x) = \int_1^3 \frac{1}{|t - x| + 1}\, dt$ হয় তবে $\int_1^3 f(t)\, dt = ?$

Ans: $6\ln 3 - 4$

$\alpha = \int_0^1 e^{9x + 3\tan^{-1}x}\left(\frac{12 + 9x^2}{1 + x^2}\right) dx$ হয় তবে $\left\{\ln|1 + \alpha| - \frac{3\pi}{4}\right\} = ?$

Ans: 9

$\int 4x^3\left\{\frac{d^2}{dx^2}(1 - x^2)^5\right\} dx = ?$ Ans: 2

$\int \frac{x \sin x^2}{\sin x^2 + \sin(\ln 6 - x^2)} dx$ Ans: $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$ বর্গ একক

$\int \max\{\sin x, \sin^{-1}(\sin x)\}dx$ Ans: $\frac{\pi(\pi^2 - 8)}{4}$

$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \le 1 \\ |x| - 1 & |x| > 1 \end{cases}$ এবং $g(x) = f(x - 1) + f(x + 1)$ হয় তবে,

$\int g(x)\, dx = ?$ Ans : 24

নির্দিষ্ট যোগজের প্রয়োগ: [৩য় অংশ (1.6)]

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

❑ **১ম ক্ষেত্রঃ** যখন ফাংশনের আকার $y = f(x)$

নিয়মঃ যদি (a, b) ব্যবধিতে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয়, তবে $y = f(x)$ বক্ররেখা x অক্ষ এবং $x = a$, $x = b$ রেখাদ্বয়

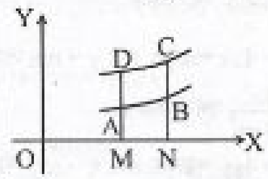


আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে $\int_a^b y dx$ অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx$

$\therefore$ $y = f(x)$ সমীকরণের ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b y\, dx\ [a \le x \le b]$

অনুরূপভাবে $x = f(y)$ সমীকরণের ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b x\, dy\ [a \le y \le b]$

❑ **২য় ক্ষেত্রঃ** মনে করি, CD এবং AB বক্ররেখা দুটির সমীকরণ $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ এবং এখানে, OM = a; ON = b, চিত্র হতে পাই, ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$= \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$

$\therefore$ $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ সমীকরণের ক্ষেত্রে

ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$

অনুরূপভাবে $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ সমীকরণের ক্ষেত্রে

ক্ষেত্রফল, $A = \int_c^d (x_1 - x_2)dx$

এক্ষেত্রে y_1, y_2 বা x_1, x_2 প্রদত্ত রেখাদ্বয় হতে প্রাপ্ত যথাক্রমে y বা x এর মান a, b হল y_1, y_2 রেখা সমাধান করে প্রাপ্ত x এর মান এবং c, d হল x_1, x_2 রেখা সমাধান করে প্রাপ্ত y এর মান।

❑ **৩য় ক্ষেত্রঃ** যেসব বক্ররেখা নিজেই লুপ বা আবদ্ধ ক্ষেত্র তৈরী করে এবং মূলবিন্দু বক্ররেখার ভিতরে অবস্থান করে তবে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}\right) d\theta$ [যেখানে $x = f(\theta)$ এবং $y = g(\theta)$]

বক্ররেখার প্রতিসমতা

01. যদি x এর পরিবর্তে (– x) বসালে বক্ররেখার সমীকরনে কোন পরিবর্তন না আসে তবে বক্ররেখাটি y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। উদাহরণঃ $x^2 = 4ay$
02. যদি y এর পরিবর্তে (– y) বসালে বক্ররেখার সমীকরনে কোন পরিবর্তন না আসে তবে বক্ররেখাটি x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। উদাহরণঃ $y = 4ax$
03. যদি x এর পরিবর্তে (– x) এবং y এর পরিবর্তে (– y) বসালে বক্ররেখার সমীকরনে কোন পরিবর্তন না আসে তবে বক্ররেখাটি উভয় অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। উদাহরণঃ $x^2 + y^2 = a^2$
04. যদি x এর পরিবর্তে y এবং y এর পরিবর্তে x বসালে বক্ররেখার সমীকরণে কোন পরিবর্তন না আসে তবে বক্ররেখাটি $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। উদাহরণঃ $x^3 + y^3 = 3axy$
05. যদি x এর পরিবর্তে – y এবং y এর পরিবর্তে – x বসালে বক্ররেখার সমীকরণে কোন পরিবর্তন না আসে তবে বক্ররেখাটি $y = -x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। উদাহরণঃ $x^5 - y^5 = 5axy$

06. যদি একই সাথে x এর পরিবর্তে (−x) এবং y এর পরিবর্তে (−y) বসালে বক্ররেখার সমীকরণে কোন পরিবর্তন না আসে তবে বক্ররেখাটি বিপরীত অক্ষে প্রতিসম। উদাহরণ: (i) $y = x^3$ (ii) $y = -x^5$

M.C.Q এর জন্য গুরুত্বপূর্ন সূত্রাবলী

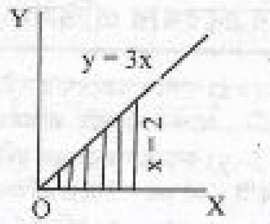
- ☐ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের- একটি চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi a^2}{4}$ বর্গ একক। মোট ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$ বর্গএকক।
- ☐ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের একটি চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi ab}{4}$ বর্গ একক। মোট ক্ষেত্রফল $= \pi ab$ বর্গএকক।
- ☐ $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4by$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{16ab}{3}$ বর্গ একক।
- ☐ $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = mx$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ বর্গ একক।
- ☐ $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং $x = my$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$ বর্গ একক।
- ☐ $y^2 = 4ax$ বা $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক।
- ☐ $y = k\sin ax$ বা $y = k\cos ax$ এর একটি চাপ এবং x - অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{2k}{a}$ বর্গ একক।

এ অধ্যায়ের গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ অন্তর্ভুক্ত করা যায়

Type- 01

Ex-01 y = 3x রেখা x অক্ষ এবং কোটি x = 2 দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n:



ক্ষেত্রফল $= \int_0^2 3x dx = \frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^2 = 3 \times 2 = 6$ বর্গএকক **Ans.**

Ex-02 দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাংকের অক্ষ দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক।

Sol^n: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

$\Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a \Rightarrow x + y - a = 2\sqrt{xy}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay + a^2 = 4xy$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + a^2 = 0$

∴ এটি পরাবৃত্ত।

এখন, $\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$ ∴ $y = a + x - 2\sqrt{ax}$

সমীকরণ হতে, ∴ y = 0 হলে, x = a

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $A = \int_0^a y dx = \int_0^a (a + x - 2\sqrt{ax})dx$

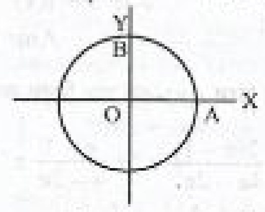
$= \left[ax + \frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{3} = \frac{3a^2}{2} - \frac{4a^2}{3} = \frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক

Ex-03 $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

= 4 × (বৃত্ত, x অক্ষ এবং কোটি x = 0 ও x = a দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের



$= 4\int_0^a y dx = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$

$x = a\sin\theta$ ধরে পাই, $dx = a\cos\theta\, d\theta$।

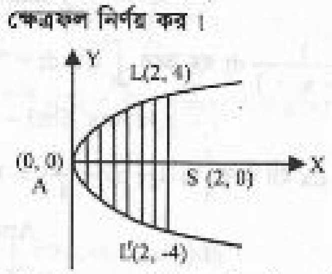
আবার, যখন x = 0, θ = 0 এবং x = a, $\theta = \frac{\pi}{2}$

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\, a\cos\theta d\theta$

$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2\theta)d\theta$

$= 2a^2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2a^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) = \pi a^2$ বর্গ একক

Ex-04 $y^2 = 8x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



$y^2 = 8x$ .... (i) কে $y^2 = 4ax$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, a = 2

∴ উপকেন্দ্র S(2, 0) । $y^2 = 8 \times 2 = 16$ বা $y = \pm 4$

সুতরাং (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু L′(2, 4), L (2, − 4)

সীমা : x = 0, x = 2

∴ নির্ণেয় আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল,

$A = 2\int_0^2 y dx = 2\int_0^2 \sqrt{8x}dx = 4\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\, dx$

$= 4\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 0) = \frac{32}{3}$ বর্গ একক

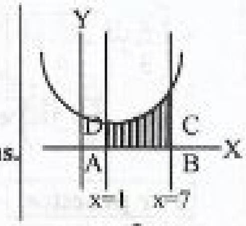
$y = x^2$ বক্ররেখা, x অক্ষ এবং $x = 1$, $x = 7$ কোটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ধরি, ABCD ক্ষেত্রের CD বক্ররেখাংশের সমীকরণ $y = x^2$; AD এর সমীকরণ $x = 1$; BC এর সমীকরণ $x = 7$

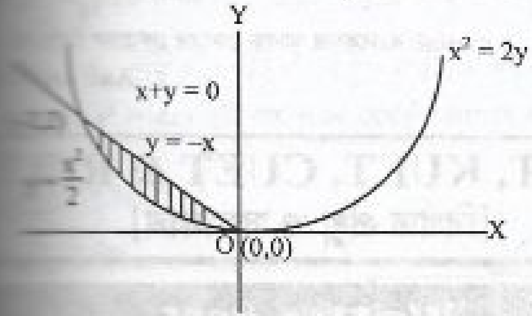
ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_1^7 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7 = \frac{1}{3}[7^3 - 1^3] = 114 \text{ বর্গ একক } \textbf{Ans.}$$



$x^2 = 2y$ বক্ররেখা এবং $y + x = 0$ সরলরেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল, $A = \int_{-2}^{0}\left(-x - \frac{x^2}{2}\right)dx$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(-\frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \text{ বর্গ একক} \quad \textbf{Ans.}$$

$x^2 + y^2 = 1$ এবং $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখা দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$x^2 + y^2 = 1$ এবং $y^2 = 1 - x$ বক্ররেখার ছেদবিন্দুতে $x^2 + 1 - x = 1$

$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1$ ∴ ছেদবিন্দুগুলো (0, 1) (0, −1) (1,0)

বক্ররেখাদ্বয়ের যে অংশ $x = 0$ ও $x = 1$ ভুজদ্বয়ের মধ্যে আবদ্ধ তার ক্ষেত্রফল, $A = 2\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x})dx$

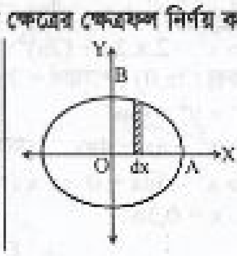
$$= 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \left(\frac{-2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= 2\left[0 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}(1-0)\right] = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right) \text{ বর্গ একক} \quad \textbf{Ans.}$$

$9x^2 + 4y^2 = 36$ উপবৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$9x^2 + 4y^2 = 36$ ∴ $y = \frac{3}{2}\sqrt{2^2 - x^2}$

চিত্র হতে ইহা স্পষ্ট যে, উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল ইহার OAB অংশের ক্ষেত্রফলের চারগুণ। এই অংশটি $x = 0$; $x = 2$, x অক্ষ এবং প্রদত্ত উপবৃত্তটি দ্বারা বেষ্টিত।



$$\triangle OAB = \int_0^2 y dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2}\, dx$$

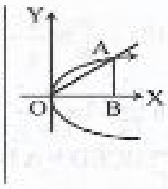
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}[\pi - 0] = \frac{3\pi}{2}$$

উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{3\pi}{2} = 6\pi$ বর্গ একক **Ans.**

Ex-09 $y^2 = 4ax$ বক্ররেখা এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: সমীকরণ দুটি সমাধান করে পাই, A(4a, 4a) অর্থাৎ OA = OB = 4a.

বক্ররেখা, OA, OB সরলরেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = \int_0^{4a}(y_1 - y_2)dx$



$$= \int_0^{4a}\left(2\sqrt{x}\sqrt{a} - x\right)dx$$

$$= \left[2 \times \frac{\sqrt{a} \times x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{4a} = \frac{32a^2}{3} - 8a^2 = \frac{8a^2}{3} \text{ বর্গ একক} \quad \textbf{Ans.}$$

Ex-10 $x - y + 2 = 0$ এবং $y = x^2$ দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: $y = x^2$ এবং $x - y + 2 = 0$ হতে y অপসারণ করে $x^2 = x + 2$ বা $x^2 - x - 2 = 0$ বা $x = 2, -1$

∴ প্রদত্ত বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল–

$$= \int_{-1}^{2}(y_1 - y_2)dx = \int_{-1}^{2}(x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2^2 - 1) + 2(2+1) - \frac{1}{3}(8+1) = \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{9}{2} \text{ বর্গএকক} \quad \textbf{Ans.}$$

Ex-11 $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ বক্ররেখার আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: নির্ণেয় আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল, $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta$

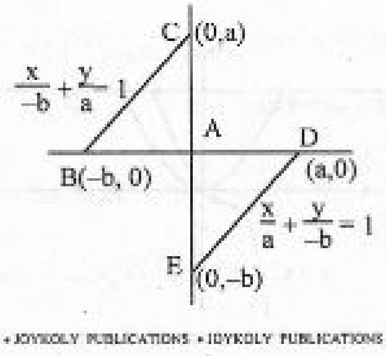
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3\theta\,(3a\sin^2\theta\cos\theta) - a\sin^3\theta\,(-3a\cos^2\theta\sin\theta)\right]d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos^2\theta.\sin^2\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\right]d\theta = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3\pi a^2}{8} \text{ বর্গ একক} \quad \textbf{Ans.}$$

Some Special Problem

Ex-01 একটি চতুর্ভুজের চারটি কৌণিক বিন্দুর ক্রম যথাক্রমে (−b,0), (0,a) (0, − b) এবং (a, 0)। দেখাও যে, এদের দ্বারা গঠিত স্থানাংক চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য।



Sol^n: $\Delta BCA = \int_{-b}^{0} a(1+x/b)dx = \left[ax + \frac{ax^2}{2b}\right]_{-b}^{0} = \left(ab - \frac{1}{2}ab\right) = \frac{1}{2}ab$

$\Delta AED = \int_0^a b\left(\frac{x}{a} - 1\right)dx$

$= \left[b\frac{x^2}{2a} - bx\right]_0^a = -\frac{1}{2}ab$ [clock wise]

$\therefore \square$ BCED = Δ BCA + ΔAED = 0 **(Showed)**

Ex-02

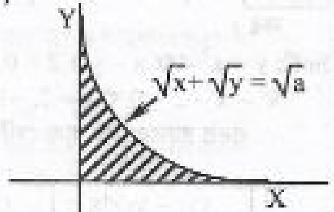
a. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ পরাবৃত্ত এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

b. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ পরাবৃত্ত, উহার অক্ষ এবং x অক্ষদ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n. a. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ এ y = 0 হলে, x = a এবং x = 0 হলে, y = a হবে।

আবার $(\sqrt{y})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$

ব্যবধিঃ x = 0 থেকে x = a $\therefore$ ক্ষেত্রফল $A = \int_0^a \left(a + x - 2\sqrt{a}\sqrt{x}\right)dx$



$= \left[ax + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^a$

$= \left[a^2 + \frac{a^2}{2} - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{3/2}\right]$

$= \frac{1}{6}a^2$ Sq. Unit **Ans.**

b. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

$\Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$

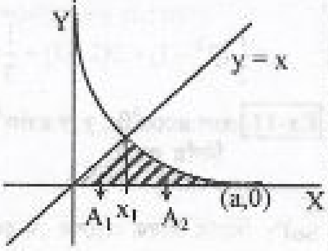
$\Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$

$\Rightarrow a + x - y = 2\sqrt{ax}$

$\Rightarrow a^2 + x^2 + y^2 + 2ax - 2xy - 2ay = 4ax$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 2ax + 2ay - a^2$

$\Rightarrow (x - y)^2 = a(2x + 2y - a)$



এখন, পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ অনুযায়ী অক্ষরেখাঃ

$x - y = 0 \Rightarrow y = x$

শীর্ষে স্পর্শক $\frac{2x}{a} + \frac{2y}{a} = 1$ এবং y = x এর ছেদবিন্দু $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$

এখানে, y = x এর জন্য ব্যবধি হবে x = 0 হতে $x_1 = \frac{a}{4}$ এবং

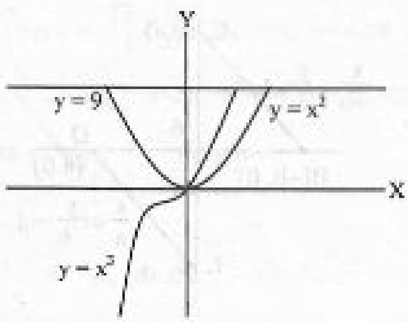
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ এর জন্য ব্যবধি হবে $x = \frac{a}{4}$ হতে x = a।

$\therefore A = |A_1| + |A_2| = \int_0^{\frac{a}{4}} xdx + \int_{\frac{a}{4}}^{a}\left(a + x - 2\sqrt{a}\sqrt{x}\right)dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{4}} + \left[ax + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{a}{4}}^{a}$

$= \frac{a^2}{32} + \frac{a^2}{6} - \left\{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{32} - \frac{4}{3}\sqrt{a}\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{a^2}{12}$ sq. Unit **Ans.**

Ex-03



চিত্রে প্রদর্শিত বক্ররেখা দুইটি $y = x^2$ এবং $y = x^3$ এবং y = … আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

Sol^n: $\int_0^9 \left(\sqrt{y} - \sqrt[3]{y}\right)dy$

$= \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\right]_0^9 = \left(18 - \frac{3}{4} \times 9 \times \sqrt[3]{9}\right)$ বর্গ একক

$= \left(18 - \frac{27}{4}.3^{\frac{2}{3}}\right)$ বর্গ একক

For practice:

01. $x = u\cos\alpha t$ এবং $y = ut\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ পরাবৃত্ত ও উহার … দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **Ans:** $\frac{2u^4\cos^3…}{3g^2}$

02. $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ বক্ররেখার আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় … **Ans:** …

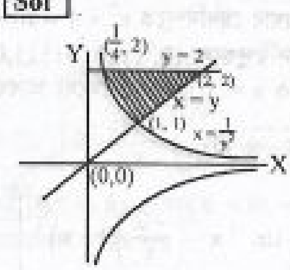
BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে …

01. $x = \frac{1}{y^2}$, x = y এবং y = 2 রেখাগুলির দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের … নির্ণয় কর। ক্ষেত্রটির চিত্র অংকন কর। [17-18]

Sol^n



আবদ্ধ, ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$A = \int_1^2 \left(y - \frac{1}{y^2}\right)dy$

$= \left[\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right]_1^2$

$= \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)$

= 1 বর্গএকক।

02. $y^2 = ax$ এবং $x^2 + y^2 = 4ax$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী এলাকার … নির্ণয় কর। [16-17]

Solve $x^2 + y^2 = 4ax \Rightarrow x^2 - 4ax + y^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2.x.2a + (2a)^2 + y^2 = (2a)^2 \Rightarrow (x - 2a)^2 + y^2 = …$

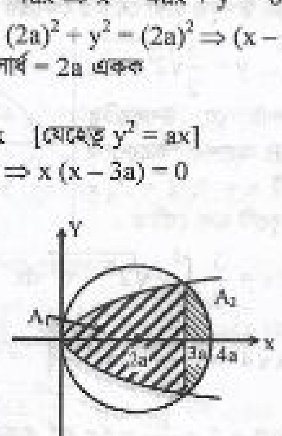
কেন্দ্র (2a,0), ব্যাসার্ধ = 2a একক

$x^2 + y^2 = 4ax$

$\Rightarrow x^2 + ax = 4ax$ [যেহেতু $y^2 = ax$]

$\Rightarrow x^2 - 3ax = 0 \Rightarrow x(x - 3a) = 0$

$\therefore x = 0, 3a$



$= 2\int_0^{3a} \sqrt{ax}\, dx = 2\sqrt{a} \int_0^{3a} \sqrt{x}\, dx = 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3} x\sqrt{x}\right]_0^{3a}$

$= \frac{2}{3}(3a).(\sqrt{3a}) = 4\sqrt{3}\, a^2$

$= 2\int_{3a}^{4a} \sqrt{4ax - x^2}\, dx = 2\int_{3a}^{4a} \sqrt{(2a)^2 - (x-2a)^2}\, dx$

$= \left[\frac{x-2a}{2}\sqrt{(2a)^2 - (x-2a)^2} + \frac{(2a)^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-2a}{2a}\right]_{3a}^{4a}$

$(x-2a)\sqrt{4ax - x^2} + 4a^2 \sin^{-1}\frac{x-2a}{2a}\Big]_{3a}^{4a}$

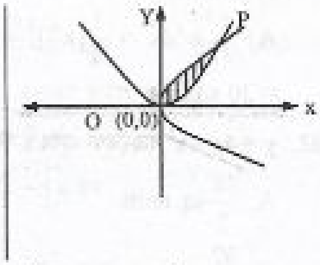
$\sqrt{16a^2 - 16a^2} + 4a^2 \sin^{-1} 1) - \left(a\sqrt{12a^2 - 9a^2} + 4a^2 \sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2} - \left(\sqrt{3}\, a^2 + 4a^2.\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi a^2 - \sqrt{3}a^2 - \frac{2\pi}{3}a^2 = \frac{4\pi}{3}a^2 - \sqrt{3}\, a^2$

$A_1 + A_2 = \frac{4\pi}{3}a^2 + 3\sqrt{3}\, a^2 = (\frac{4\pi}{3} + 3\sqrt{3})\, a^2$ বর্গ একক **Ans.**

$= 4ay$, $y^2 = 4ax$ দুটি পরাবৃত্তের ছেদকৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [15-16]

Solve $y^2 = 4ax$



$\left(\frac{x^2}{4a}\right)^2 = 4ax$

$x^4 = 64a^3x$

$x = 0, y = 0 \Rightarrow x^3 = 64a^3$

$x = 4a, y = 4a \;\therefore P = (4a, 4a)$

$y^2 = 4a \times 4a$

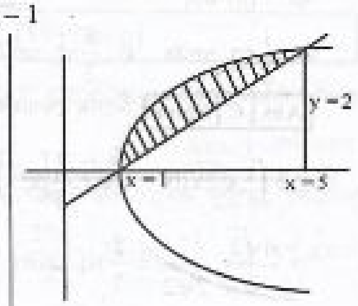
অতএব, ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a}(y_1 - y_2)dx = \int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a}\right)dx$

$= \left[2\sqrt{a}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12a}\right]_0^{4a} = \left[\frac{x^3}{12a} - \frac{4\sqrt{a}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4a}$

$\frac{4\sqrt{a}}{3} \times (4)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} - \frac{4^3}{12} \times \frac{a^3}{a} = \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক **Ans.**

$= x - 1$ পরাবৃত্ত এবং $2y = x - 1$ সরলরেখা দিয়ে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [14-15]

Solve $y^2 = x - 1 \Rightarrow y_1 = \sqrt{x-1}$



$2y = x - 1 \Rightarrow y_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

ছেদবিন্দুর জন্য, $y^2 = 2y$

$y^2 - 2y = 0$

$y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0, 2$

$2y = x - 1$

যখন $y = 0$ হলে $x = 1$

যখন $y = 2$ হলে $x = 5$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$= \int_1^5 (y_1 - y_2)\, dx = \int_1^5\left(\sqrt{x-1} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)dx$

$= \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right]_1^5 = \left[\frac{2\times 8}{3} - \frac{25}{4} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right]$

$= \left[\frac{16}{3} - \frac{26}{4} + \frac{5}{2}\right] = \frac{16}{3} - \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$ বর্গএকক **Ans.**

05. $x^2 = 4y$ পরাবৃত্ত এবং $x = 2y$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [13-14]

Solve $x^2 = 4y$ ......(i)

$x = 2y$ ......(ii)

(ii) থেকে x এর মান (i) এ বসাই, $(2y)^2 = 4y$

$\Rightarrow 4y^2 - 4y = 0 \;\Rightarrow 4y\,(y-1) = 0 \;\therefore y = 0, y = 1$

(i) ও (ii) দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল

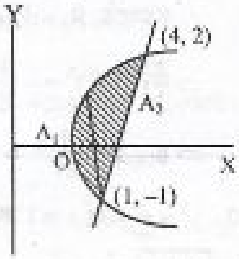
$= \int_0^1 (x_1 - x_2)dy$

$= \int_0^1 (2\sqrt{y} - 2y)dy = \int_0^1 2\sqrt{y}dy - \int_0^1 2ydy$

$= 2\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}(1-0) - (1-0) = \frac{1}{3}$ বর্গ একক **Ans.**

06. x এর সাপেক্ষে যোগজ করে $x = y^2$ এবং $y = x - 2$ রেখা দুটো দিয়ে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [10-11, 12-13, 13-14]

Solve $x = y^2, y = x - 2$



$\therefore x = (x-2)^2$

$\therefore x = 4$ অথবা 1

$\therefore y = 2$ অথবা –1

ক্ষেত্রফল $A_1 = 2\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$

$= 2.\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$ বর্গ একক

ক্ষেত্রফল $A_2 = \int_1^4 (y_1 - y_2)dx = \int_1^4\left[\sqrt{x} - (x-2)\right]dx$

$= \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^4 - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^4 + 2\left[x\right]_1^4$

$= \frac{2}{3}(8-1) - \frac{1}{2}(16-1) + 2(4-1) = \frac{14}{3} - \frac{15}{2} + 6$

$= \frac{28 - 45 + 36}{6} = \frac{19}{6}$ বর্গ একক

$\therefore$ সর্বমোট ক্ষেত্রফল, $A = A_1 + A_2 = \frac{19}{6} + \frac{4}{3} = \frac{9}{2}$ বর্গ একক **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $x^2 + y^2 = 36$ একটি বৃত্ত এবং $x = 5$ সরল রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [04-05]

Solve $\Delta = 2\int_5^6 ydx$

$= 2\int_5^6 \sqrt{36 - x^2} = 2\int_{\sin^{-1}5/6}^{\pi/2} 36\cos^2\theta d\theta$

Let, $x = 6\sin\theta$

$\Rightarrow dx = 6\cos\theta\, d\theta$

যখন, $x = 5$ তখন, $\theta = \sin^{-1}\frac{5}{6}$

যখন, $x = 6$ তখন, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$= 36\int_{\sin^{-1}5/6}^{\pi/2}(1 + \cos 2\theta)d\theta = 36\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\sin^{-1}5/6}^{\pi/2}$

$= \left(18\pi - 36\sin^{-1}\frac{5}{6} - 5\sqrt{11}\right)$ বর্গ একক **Ans.**

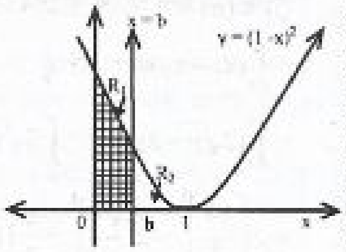
RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $x = b$ রেখাটি $y = (1 - x)^2$, $y = 0$ এবং $x = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে R_1 $(0 \le x \le b)$ এবং R_2 $(b \le x \le 1)$ অংশদ্বয়ে বিভক্ত করে যেখানে $R_1 - R_2 = \frac{1}{4}$ । b এর মান নির্ণয় কর । [15-16]

Solve $R_1 = \int_0^b (1 - x)^2\, dx$

$= \int_0^b (x-1)^2\, dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^b$

$= \frac{1}{3}(b-1)^3 + \frac{1}{3}$



$R_2 = \int_b^1 (x-1)^2\, dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_b^1 = -\frac{1}{3}(b-1)^3$

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $R_1 - R_2 = \frac{2}{3}(b-1)^3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}(b-1)^3 = -\frac{1}{12}$

$\Rightarrow b - 1 = -\frac{1}{2}$ $\therefore b = \frac{1}{2}$ **Ans.**

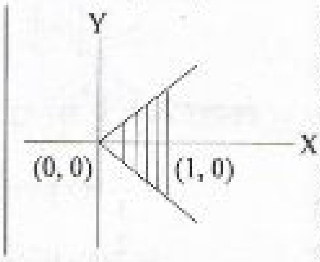
02. $y^2 = x^2$ এবং $x = 1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রমান নির্ণয় কর । [12-13]

Solve $y^2 = x^2$

$\Rightarrow y = \pm x$

$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = 2\int_0^1 x\,dx$

$= \left[x^2\right]_0^1 = 1$ **Ans.**

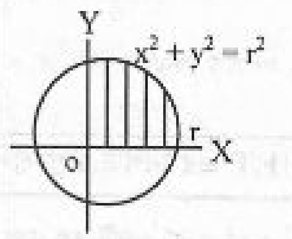


03. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর । [04-05]

Solve $x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$\therefore \int_0^r y\,dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$



$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta$

$= \frac{1}{2} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{2} r^2 \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} r^2 \left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2} r^2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} r^2 \times 0 = \frac{1}{4}\pi r^2$

ধরি, $x = r\cos\theta$

$dx = r\sin\theta d\theta$

যখন $x = r$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

এবং $x = 0$, $\theta = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= 4 \times \int_0^r y\,dx = 4 \times \frac{1}{4}\pi r^2 = \pi r^2$ বর্গ একক **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে

01. x– অক্ষ, y– অক্ষ, $y = \ln 5$ এবং $y = \ln x$ বক্ররেখা দ্বারা ক্ষেত্রফল হবে– [13-14]

A. ln 4 sq. unit B. 5 sq. unit
C. 4 sq. unit D. ln 5 sq. unit

Ans C Solve $\text{Area} = \int_{y_1}^{y_2} e^y dy = \int_0^{\ln 5} e^y dy$

$= \left[e^y\right]_0^{\ln 5} = e^{\ln 5} - e^0 = 5 - 1 = 4$sq. unit

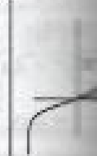
02. $y = x^3$ বক্ররেখা এবং $y = 0$, $x = 1$ ও $x = 3$ সরলরেখা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে । [11-12]

A. 5 sq. unit B. 20 sq. unit
C. 10 sq. unit D. 15 sq. unit

Ans B Solve সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$A = \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4}[x^4]_1^3 = \frac{1}{4}(3^4 - 1)$

$= 20$ sq.unit



03. $y = 4x - x^2$ বক্ররেখা এবং x-অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

A. $\frac{16}{3}$ sq. units B. $\frac{8}{3}$ sq. units
C. $\frac{32}{3}$ sq. units D. $\frac{4}{3}$ sq. units

Ans C Solve আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$,

এখন, $y = 0$ হলে, $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$

$\therefore x_1 = 0, x_2 = 4$

$\therefore A = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$ sq.units

04. পরাবৃত্ত $y^2 = 2x$ এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা বেষ্টিত হবে- [07-08]

A. $\frac{1}{3}$ sq. units B. $\frac{8}{3}$ sq. units C. $\frac{2}{3}$ sq. units D. $\frac{4}{3}$

Ans C Solve নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2x}\,dx = 2\sqrt{2}.\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{1/2}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{3}.\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$ sq. units.

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে

01. x-অক্ষে $y = \sin x$ বক্র রেখার একটি চাপ দ্বারা ক্ষেত্রফলের মান কত? [06-07]

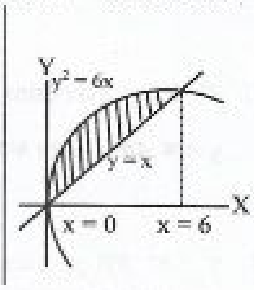
A. π B. $\pi/2$
D. $\pi/2$ E. 2

Ans E Solve $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi$

... এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... পরাবৃত্ত ও y = x সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল বের কর। [15-16]
... unit B. 128/3 unit C. 28/3 unit D. 64/3 unit

Solve $y^2 = 6x$ এবং $y = x$
... সমাধান করে, $x^2 = 6x$
$x(x-6) = 0$
$x = 0, x = 6$



$\int (y_1 - y_2)dx$
$\int (\sqrt{6x} - x)dx$
$\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^6 = \left[\sqrt{6}\times\frac{2}{3}6^{\frac{3}{2}} - \frac{6^2}{2}\right] = \frac{72}{3} - \frac{36}{2} = 6$ unit

... $y^2 = 4x$ এবং y = x সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের ... [14-15]
... unit B. $\frac{5}{3}$ sq. unit C. $\frac{8}{3}$ sq. unit D. $\frac{7}{3}$ sq. unit

Solve $y^2 = 4x$ এবং $y = x$ রেখাদ্বয় সমাধান করে,
... $= 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \quad \therefore x = 0, 4$
... ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_0^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 x\,dx$
$... \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$ বর্গ একক

... এবং $y^2 = 16x$ রেখা দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [11-12]
... sq. Unit B. 128 sq. Unit
... sq. Unit D. None of these

Solve ∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{16} (y_2 - y_1)dx$
[... এবং $y^2 = 16x$ সমাধান করে x = 0, 16]
$= \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)\,dx = \frac{128}{3}$ বর্গ একক

SELF TEST [Written]

... পরাবৃত্ত এবং y = 2x সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ... **Ans.** $\frac{1}{3}$ বর্গ একক

... $y^2 = 25$ বৃত্ত এবং x = 3 সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ... নির্ণয় কর। **Ans.** $(\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12)$ বর্গ একক

... $\frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **Ans.** 6π বর্গ একক

... ax এবং $x^2 + y^2 = 4ax$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ... কর। **Ans.** $a^2(3\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3})$ বর্গ একক

... 4ax পরাবৃত্ত এবং ইহার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ... কর। **Ans.** $\frac{8}{3}a^2$ বর্গ একক

06. $x = y^2$ ও $y = x^2$ পরাবৃত্ত দ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{1}{3}$ বর্গ একক

07. $y = 2x - x^2$ এবং x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{4}{3}$ বর্গ একক

08. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের যে অংশ $x = \frac{a}{2}$ রেখাংশ দ্বারা খণ্ডিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{a^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$ বর্গ একক

09. $|y| = \sin 2x$ বক্ররেখার আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। যখন $0 \le x \le 2\pi$
Ans: 4 বর্গ একক

SELF TEST [MCQ]

01. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ এক চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল কোনটি?
A. 16π B. 18π C. 4π D. none

02. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল কোনটি?
A. 16π B. 25π C. 20π D. 30π

03. $y = x^3$, x অক্ষ এবং x = 1 ও x = 3 রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি?
A. $\frac{13}{3}$ B. $\frac{26}{3}$ C. $\frac{38}{3}$ D. none

04. y অক্ষ, y = sin x বক্ররেখা এবং $x = \frac{\pi}{2}$ একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

05. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাংকের অক্ষ দুইটি দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি?
A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{25}{6}$ D. $\frac{25}{3}$

06. y = 3x সরলরেখা, x অক্ষ এবং x = 2 দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

07. y = cos x বক্ররেখা, x অক্ষ এবং $x = -\frac{\pi}{2}$ ও $x = \frac{\pi}{2}$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

08. $x = 4y^2 - 3$ বক্ররেখা, y অক্ষ এবং y = 2 ও y = 3 রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
A. $\frac{17}{2}$ B. $\frac{18}{3}$ C. $\frac{32}{9}$ D. $\frac{67}{3}$

09. y = 2x + 1 এবং x অক্ষ ও x = 2 রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি?
A. 25 B. $\frac{25}{3}$ C. 6 D. $\frac{25}{9}$

10. |x| + |y| = 4 দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-
A. 8 B. 4 C. 16 D. 32

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	04. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	
03. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

10.D	09.C	08.D	07.B	06.C	05.C	04.B	03.B	02.C	01.C

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

01. $y \geq \sqrt{x}$ এবং $x^2 + y^2 < 2$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর।
Ans: $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right)$ বর্গ একক

02. $|y| = -(1 - |x|)^2 + 5$ বক্ররেখার আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর।
Ans: $\frac{8}{3}(7 + 5\sqrt{5})$ বর্গ একক

03. $f(x) = ||\tan x + \cot x| - |\tan x - \cot x||$ বক্ররেখার আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: ln 4 বর্গ একক

04. $|y| = e^{-|x|} - \frac{1}{2}$ এবং $\frac{|x| + |y|}{2} + \left|\frac{|x| - |y|}{2}\right| \leq 2$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর Ans: $(14 - \ln 4)$ বর্গ একক

05. $y = x^2$, $y = |2 - x^2|$ এবং $y = 2$ রেখাত্রয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর, যেখানে আবদ্ধ ক্ষেত্রটি $x = 1$ রেখার ডানপার্শ্বে অবস্থিত।
Ans: $\frac{20 - 12\sqrt{2}}{3}$ বর্গ একক

06. $y = \cos x - \cos^2 x$ এবং $y = x^2\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\left(2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^5}{120}\right)$ বর্গ একক

07. $5x^2 + 6xy + 2y^2 + 7x + 6y + 6 = 0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\frac{\pi}{2}$ বর্গ একক

08. $y = 2x^4 - x^2$ বক্ররেখা, x অক্ষ এবং এই বক্ররেখার দুটি লম্বিষ্ট বিন্দুর কোটিদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\frac{7}{120}$ বর্গ একক

09. $x + y \leq 6$, $x^2 + y^2 \leq 6y$ এবং $y^2 \leq 8x$ বক্ররেখাত্রয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{1}{6}\right)$ বর্গ একক

10. $x^2 + y^2 = 25$, $4y = |4 - x^2|$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা x অক্ষের উপরের অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\left\{25\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + 4\right\}$ বর্গ একক

11. $x^2 + y^2 = a^2$ এবং $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = \sqrt{a}$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। যখন $a > 0$ Ans: $\left(\pi - \frac{2}{3}\right)a^2$ বর্গএকক

12. $(y - x)^2 = x^3$ বক্ররেখাদ্বয় এবং $x = 1$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\frac{4}{5}$ বর্গ একক

13. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x^2 + x + 1$, $y = \left[\sin^2\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right]$ এবং x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। যেখানে [x] = Greatest integer function. Ans: $\left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{6}\right)$ বর্গ একক

14. যদি $f(x) = \max\{x^2, (1 - x)^2, 2x(1 - x)\}$ (যেখানে $0 \leq x \leq 1$) হয় তবে $y = f(x)$, x অক্ষ, $x = 0$ এবং $x = 1$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\frac{17}{27}$ বর্গ একক

15. এমন আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর যার প্রতিটি বিন্দু $|x - 2y| + |x + 2y| \leq 8$ এবং $xy \geq 2$ শর্তদ্বয়কে সিদ্ধ করে।
Ans: $(12 - 4\ln 4)$ বর্গ একক

16. ধরি $f(x) = \begin{cases} -2 & -3 \leq x \leq 0 \\ x - 2 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$
যেখানে $g(x) = \min\{f(|x|) + f(x), f(|x|) - |f(x)|\}$। y = g… x অক্ষ, $x = 3$, $x = -3$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর…
Ans: …

17. যদি $f(x) = \max\left\{\sin x, \cos x, \frac{1}{2}\right\}$ হয় তবে $y = f(x)$ বক্র… y অক্ষ এবং $x = 2\pi$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর…
Ans: $\left(\frac{5\pi}{12} + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ …

18. $y = x^2$ এবং $y = \sec^{-1}[-\sin^2 x]$ [যেখানে [x] = Great… function] রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর…
Ans: $\frac{4\pi\sqrt{\ldots}}{3}$ …

19. $y = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, x অক্ষ এবং $x \geq -\frac{1}{2}$ দ্বারা আবদ্ধ অং… বের কর। Ans: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ …

20. $y = f(x)$, $y = |g(x)|$ এবং বক্ররেখাদ্বয় এবং $x = 0$, $x = 2$ … দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। [যেখানে f এবং g দুটি… ফাংশন এবং $f(x + y) = f(x) + f(y) - 8xy$, $g(x + y) = g…$ $+ 3xy(x + y)$ (সকল $x, y \in R$), $f'(0) = 8$, $g'(0) = …$ সিদ্ধ করে।] Ans: …

21. $\frac{(x - y)^2}{a^2} + \frac{(x + y)^2}{b^2} = 2$ $(a > b)$ বক্ররেখা $y = x$ রেখা … অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর।
Ans: $\frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2}\sin^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ …

22. যদি $f(xy) = f(x) + f(y)$ (সকল $x, y > 0$) এবং $f'(1) = 2$ হয় … $y = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|$ বক্ররেখাদ্বয় এবং y অক্ষ দ্বারা … ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। Ans: …

23. ধরি f(x) অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং দেওয়া আছে
$f(x) = \begin{cases} 2x & |x| \leq 1 \\ x^2 + ax + b & |x| > 1 \end{cases}$
$x = -2y^2$ এবং $y = f(x)$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা তৃতীয় চতুর্ভাগে এবং $8x + 1 = 0$ সরলরেখার বামপার্শ্বে অবস্থিত আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\frac{257}{192}$ …

24. $y = x$, $x = e$, $y = \frac{1}{x}$ এবং ধনাত্মক x অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অং… বের কর। Ans: …

25. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ব্যবধিতে $y = \sin x + \cos x$ এবং $y = |\cos x - …$ দ্বারা আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $(4 - 2\sqrt{2})$ …

26. $\{(x,y) : 0 \leq y \leq x^2 + 1, 0 \leq y \leq x + 1, 0 \leq x \leq 2\}$ ক্ষেত্র… অংশের ক্ষেত্রফল বের কর। Ans: $\frac{23}{6}$ …

বুয়েট গণিত
[২য় পত্র]

১ম অধ্যায়
দ্বিতীয় পত্র

বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা (Real Numbers & Inequalities)

এক নজরে এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী

❒ **বাস্তব সংখ্যা (Real Number):** যে সমস্ত সংখ্যার বর্গ একটি ধনাত্মক সংখ্যা তাদেরকে বাস্তব সংখ্যা বলে। জটিল সংখ্যা ছাড়া আমরা যত ধরনের সংখ্যা নিয়ে কাজ করি সবগুলোই বাস্তব সংখ্যা। বাস্তব সংখ্যার সেটকে **R** দ্বারা সূচীত করা হয়। [ঋণাত্মক সংখ্যা, ধনাত্মক সংখ্যা ও শূন্য সবই বাস্তব সংখ্যা]

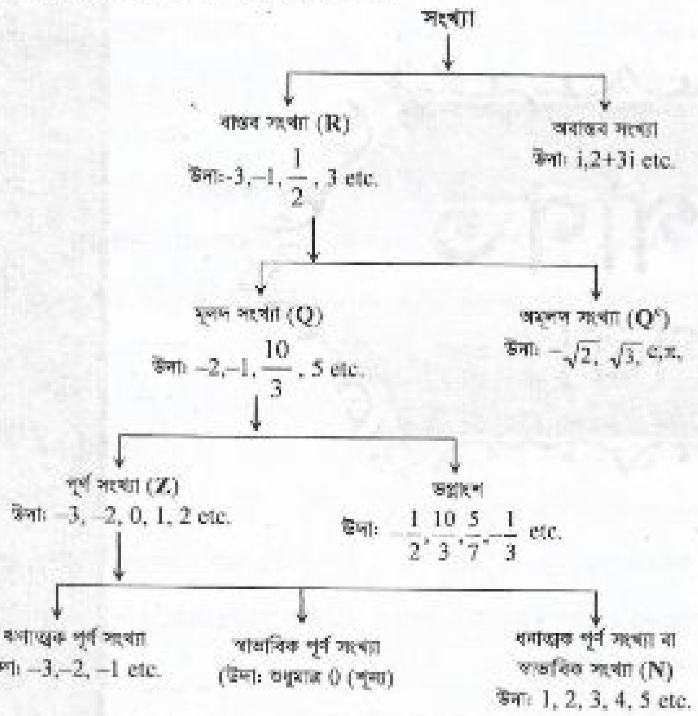
$\mathbf{R} = \{-\infty, ..., -10, -5..., 0, 1, \sqrt{2}, e, \pi, 6, 8, ..., \infty\} = (-\infty, \infty)$

❒ **স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (Set of Natural Numbers):** ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেটকে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট বলা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে N দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $N = \{1, 2, 3, ...\}$

❒ **পূর্ণ সংখ্যার সেট (Set of Integer Numbers):** ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, শূন্য এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেটকে পূর্ণ সংখ্যার সেট বলে। পূর্ণ সংখ্যার সেটকে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$Z = \{ ..... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.......\} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$

❒ সংখ্যার শ্রেণীবিন্যাস নিম্নে দেওয়া হলো-



❒ **মূলদ সংখ্যা (Rational):** যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় ($p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$; p ও q সহমৌলিক) তাদেরকে মূলদ সংখ্যা বলে। যেমন- 2, 5, 28.135, $\ln e^2$ ইত্যাদি।

❒ **মূলদ সংখ্যা চেনার উপায়:** তিনটি উপায়-

(i) যে কোন পূর্ণ সংখ্যা। যেমন: –7, –5, 0, 1, 2, 5 ইত্যাদি।

(ii) ভাগফল সসীম বা সমাপ্ত দশমিক। যেমন: $\frac{6}{4}, \frac{5}{2}$, 1.25, 5.112, 627.1235 ইত্যাদি।

(iii) ভাগফল আবৃত দশমিক। যেমন: $\frac{1}{3}, \frac{100}{33}, \frac{10}{3}$, 1.111...., 5.202202202...... ইত্যাদি।

❒ **অমূলদ সংখ্যা (Irrational):** যে সব সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না ($p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$) তাদেরকে অমূলদ সংখ্যা বলে ... সংখ্যা মূলদ নয় তাদেরকে অমূলদ সংখ্যা বলে।

যেমন- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, e, π ইত্যাদি।

❒ **মৌলিক সংখ্যা (Prime Number):** যে সংখ্যাকে 1 এবং ঐ সংখ্যা ... অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা যায় না তাকে মৌলিক সংখ্যা বলে ... P দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন- 2, 3,5,7 ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যা ...

Note: 1 কে মৌলিক সংখ্যা ধরা হয় না।

❒ **অমৌলিক সংখ্যা (Composite Number):** স্বাভাবিক সংখ্যা ... সংখ্যাগুলি মৌলিক নয় তাদেরকে অমৌলিক সংখ্যা বলে। যেমন- 4,6,8 ...

❒ **সহমৌলিক সংখ্যা (Coprime Number):** দুইটি সংখ্যার ... গুণনীয়ক 1 ভিন্ন অন্য কোন সংখ্যা পাওয়া না গেলে তাদেরকে সহমৌলিক ... যেমন- (3, 5), (9, 10) এবং (14, 17) প্রত্যেকটি ক্রমজোড়ই সহমৌলিক ...

❒ **বিভিন্ন সংখ্যার সেট:**

01. সকল বাস্তব সংখ্যার সেট, $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$

02. মূলদ সংখ্যার সেট, $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q}; p, q \in z; q \neq 0\}$

03. অমূলদ সংখ্যার সেট, $\mathbf{Q'}$ বা $\mathbf{Q}^c = \{x ; x \in \mathbf{R}, x \notin \mathbf{Q}\}$ ...

04. সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট, **Z** বা **I** $= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$

05. সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট, **N** বা $\mathbf{I}^+$ বা $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4......\}$

06. সকল অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট $\{0, 1, 2, 3, 4......\}$

07. ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট, $\mathbf{Z}^-$ বা $\mathbf{I}^- = \{-\infty, ..., -10, ...\}$

Note: (i) শূন্য (0) ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক সংখ্যার মধ্যে অবস্থিত একটি ...

❒ **R** বাস্তব সংখ্যার সেট হলে, $N \subset Z \subset Q \subset R$, $Q \cup Q' = R$, $Q \cap Q' = \emptyset$ ...

❒ **বাস্তব সংখ্যার সেট R এর স্বীকার্য ভিত্তিক ধর্ম:**

(1) **আবদ্ধতা (Closure) :** সকল $a, b \in \mathbf{R}$ এর জন্য
$a + b \in \mathbf{R}$ [যোগের আবদ্ধতা] এবং $ab \in \mathbf{R}$ [গুণনের আবদ্ধতা]

(2) **বিনিময় যোগ্যতা (Commutativity) :**
$a, b \in \mathbf{R}$ হলে, $a + b = b + a$ [যোগের বিনিময় যোগ্যতা] ...
$ab = ba$ [গুণনের বিনিময় যোগ্যতা]

(3) **সংযোজন যোগ্যতা (Associativity) :** $a, b, c \in \mathbf{R}$ ...
$a + (b + c) = (a + b) + c$ [যোগের সংযোজন যোগ্যতা] ...
$a(bc) = (ab)c$ [গুণনের সংযোজন যোগ্যতা]

(4) **বন্টন যোগ্যতা (distributivity) :** সকল $a, b, c \in \mathbf{R}$ ...
$a(b + c) = ab + ac$ অথবা $(b + c) a = ba + ca$

(5) **অভেদক (Indentity) :** $a \in \mathbf{R}$ এর জন্য i) $a + 0 = 0 + a$ ...
[যোগের অভেদক] ii) $a.1 = 1.a = a$ [গুণনের অভেদক]

(6) **বিপরীতক (Inverse):** $a \in \mathbf{R}$ এর জন্য i) $a + (-a) = (-a) + ...$
[যোগের বিপরীতক] ii) $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ [গুণনের বিপরীতক]

(7) **অনন্যতা (Uniqueness):** $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ হলে, এবং $a = b$, ...
$a + c = b + d$ [যোগের অনন্যতা] এবং $ac = bd$ [গুণের অনন্যতা]

অর্থাৎ, উভয় পাশে একই রাশি যোগ করা যোগের অনন্যতা, গুণ করা গুণের অনন্যতা ...

❒ **পরমমান (Absolute value):** সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা ... হলে, যদি $x \in \mathbf{R}$ হয় তাহলে x এর পরমমানকে $|x|$ (পড়তে হয়, Modulus ...) দ্বারা সূচিত করা হয়। $|x|$ বলতে বুঝায় 0 থেকে x সংখ্যার দূরত্ব।

পরমমানের সংজ্ঞা নিম্নরূপ: $|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

...মানের ধর্ম:

... R এর জন্য $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$

... R এর জন্য (i) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

(ii) $|a| > |b| \Rightarrow a^2 > b^2$

... R এর জন্য (i) $|ab| = |a|\,|b|$ (ii) $|abc| = |a|\,|b|\,|c|$

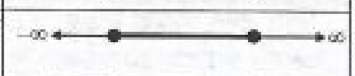
... R এর জন্য $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$

... R এর জন্য (i) $|a| + |b| \geq |a+b| \geq \big||a| - |b|\big|$

(ii) $|a| + |b| \geq |a-b|$

... R এর জন্য $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

... (Interval): বাস্তব সংখ্যার সেটের বিশেষ ধরণের উপসেটকে ব্যবধি ... যদি a ও b দুটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$ হয় a ও b এর মধ্যবর্তী সকল ... নিয়ে গঠিত সেটকে বাস্তব সংখ্যা a ও b এর ব্যবধি বলা হয়।

ব্যবধি (Interval)	সংখ্যারেখা
... = $\{x \in R: a < x < b\}$ মুক্ত ...	
... = $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$ বদ্ধ ...	
... = $\{x \in R: a < x \leq b\}$	
... = $\{x \in R: a \leq x < b\}$	
... = $\{x \in R: a < x < \infty\}$	
... = $\{x \in R: a \leq x < \infty\}$	
... = $\{x \in R: -\infty < x < b\}$	
... = $\{x \in R: -\infty < x \leq b\}$	
... = $\{x \in R: -\infty < x < \infty\}$	

...: যদি $S \subset R$ এবং একটি বাস্তব সংখ্যা u থাকে যেন সকল $x \in$ ... জন্য $x \leq u$ হয় তবে u হবে S এর একটি উর্ধ্বসীমা এবং S কে ... বলা হয়। S এর অসংখ্য উর্ধ্বসীমা থাকতে পারে। উর্ধ্বসীমিত ... উর্ধ্বসীমা গুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতম সীমাকে ক্ষুদ্রতম উর্ধ্বসীমা বলা হয় ... Sup S লিখে প্রকাশ করা হয়।

...: যদি $S \subseteq R$ এবং একটি বাস্তব সংখ্যা l থাকে যেন সকল $x \in S$ ... $\leq x$ হয়, তবে l হবে S এর নিম্নসীমা এবং S কে নিম্নসীমিত বলা ... S এর অসংখ্য নিম্নসীমা থকতে পারে। নিম্নসীমিত সেটের নিম্নসীমা ... বৃহত্তম সীমাকে বৃহত্তম নিম্নসীমা বলা হয় এবং ইহাকে Inf S ... করা হয়।

... সেট: যদি $S \subseteq R$ এবং দুইটি বাস্তব সংখ্যা m, M থাকে যেন সকল ... জন্য $m \leq x \leq M$ হয়। তবে S কে সীমিত সেট বলা হয়। যেমন: ... $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$ হলে, সকল $x \in S$ এর জন্য $\frac{1}{5} \leq x \leq 2$, যেখানে $\frac{1}{5}$, ... এখানে, Sup S = 1 এবং $\text{Inf } S = \frac{1}{4}$

... সম্পর্কিত স্বীকার্য:

... c এবং $d \in R$ হয় তাবে,

... এবং $b < c \Rightarrow a < c$

... $\Rightarrow a + c < b + c$ এবং $a - c < b - c$

... $\Rightarrow ac < bc$, যখন $c > 0$

... $\Rightarrow ac < bc$ যখন $c < 0$

... এবং $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

... $b > 0$ এবং $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

☐ মূলদ-অমূলদ সংখ্যা চিনিবার উপায়:

(i) 0. 30 300 3000 30000 ......

(ii) 0.30 300 300 300 3 ....

➢ অমূলদ সংখ্যার শেষ নেই এবং এতে পৌনঃপুনিক থাকে না। তবে যদি থাকে তা মূলদ। যেমন- (ii) নং সংখ্যা মূলদ।

➢ যেকোন পূর্ণ সংখ্যাই মূলদ সংখ্যা।

➢ দশমিকের পরে নির্দিষ্ট সংখ্যক অংক থাকলে তা মূলদ।

যেমন- – 4.30247, 4.38927

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: পরম মান চিহ্ন ব্যতীত প্রকাশ করা

Ex-01 $|x-1| + |2x-3| = 5$ সমাধান কর।

Sol^n: $|x-1| + |2x-3| = 5$

$\Rightarrow \pm(x-1) \pm (2x-3) = 5$

সুতরাং,

i) $x - 1 + 2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 3$

ii) $x - 1 - (2x - 3) = 5 \Rightarrow x = -3$

iii) $-(x-1) + (2x-3) = 5 \Rightarrow x = 7$

iv) $-(x-1) - (2x-3) = 5 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$x = -3$ এবং $x = 7$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। **Ans.** $\{3, -\frac{1}{3}\}$

For practice:

01. $|x-5| = |2x-3|$ অসমতাটি সমাধান কর। **Ans.** -2 অথবা $\frac{8}{3}$

02. $|x-2| < \frac{1}{4}$ এবং $x > 2$, সমাধান কর। **Ans.** $2 < x < \frac{9}{4}$

03. $|x-1| < 2$ এবং $|x-2| < 1$ সমাধান কর। **Ans.** $1 < x < 3$

04. $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5$ সমাধান কর।

Ans: $\frac{-2}{5} \leq x \leq \frac{-4}{15}$ যেখানে $x \neq \frac{-1}{3}$

Type-02: পরম মান চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কর-

প্রদত্ত অসমতাকে এরূপে প্রকাশ করতে হবে যে একই সংখ্যা বিপরীত চিহ্নসহ ঐ অসমতার দুই প্রান্তে থাকে।

Ex-01 $4 < x < 10$ অসমতাকে পরমমান চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কর।

Sol^n: দেখা যায় $\frac{10+4}{2} = 7$ সংখ্যাটি 10 ও 4 হতে সমান ব্যবধানে তাই প্রদত্ত অসমতার প্রত্যেক পক্ষের সঙ্গে –7 যোগ করলে

$-3 < x - 7 < 3$

$\Rightarrow |x-7| < 3$ হয়।

Ans:

Ex-02 সমাধান কর: $-3 < 5 - 2x < 7$

Sol^n: $-3 - 2 < 5 - 2x - 2 < 7 - 2$

$\Rightarrow -5 < 3 - 2x < 5$

$\therefore |3 - 2x| < 5$

$\left|\frac{-3+7}{2}\right| = 2$

Ans:

For practice:

01. $-1 < 2x - 3 < 5$ অসমতাটি পরমমান চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কর। **Ans:** $|2x - 5| < 3$

02. $|x - 1| < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $|x^2 - 1| < \frac{11}{25}$

Type-03: ঊর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা সংক্রান্ত

Ex-01 বাস্তব সংখ্যার উপসেট $S = \{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$ হলে বৃহত্তম নিম্নসীমা ও ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা নির্ণয় কর।

$S = \{x : 5x^2 - 16x + 3 < 0\}$

$= \{x : (5x-1)(x-3) < 0\} = \{x : \frac{1}{5} < x < 3\}$

বৃহত্তম নিম্নসীমা (Inf S) $= \frac{1}{5}$; ক্ষুদ্রতম ঊর্ধ্বসীমা (Sup S) $= 3$ **Ans.**

Ex-02 x এর বাস্তব মানের এরূপ সীমা নির্ণয় কর যা $5x - 1 < (x+1)^2 < 7x - 3$ হয়।

Sol^n: $5x - 1 < (x+1)^2$

$0 < x^2 - 3x + 2$

$\therefore (x-2)(x-1) > 0$

$x > 2$ বা $x < 1$

$(x+1)^2 < 7x - 3$

$x^2 - 5x + 4 < 0$

$(x-4)(x-1) < 0$

$\therefore 1 < x < 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যবধি $2 < x < 4$. **Ans.**

For practice:

01. x এর বাস্তব মানের এরূপ সীমা নির্ণয় কর যাতে $x^2 + 6x - 27 > 0$ এবং $3x - x^2 + 4 > 0$ হয়। **Ans:** $3 < x < 4$

02. $x^2 + 6x - 27 > 0$ হলে x এর সীমা নির্ণয় কর। **Ans:** $x > 3$ অথবা $x < -9$

Type-04: মান নির্ণয় সংক্রান্ত

Ex-01 $13 + |-|-1-4| - 3 - |-8||$

Sol^n: $13 + |-5| - 3 - 8 = 13 + 5 - 3 - 8 = 18 - 11 = 7$ **Ans.**

Ex-02 $x^2 \le 4$ হলে x এর মান কত?

Sol^n: $x^2 \le 4 \Rightarrow |x| \le 2 \;\therefore -2 \le x \le 2$ **Ans:**

For practice:

01. $x^2 \ge 16$ হলে x এর ব্যবধি কত? **Ans :** $x \le -4$ অথবা $x \ge 4$

02. $||-16+3| + |-1-4| - 3 - |-1-7| + |-1-|-2-3||$ **Ans :** 13

Type- 05: সংখ্যারেখা এবং চিহ্ন ছক বিশিষ্ট সমস্যা

Ex-01 সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও:

$\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{x+1}$

Sol^n: $\frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow x < \frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{x^2+1}{x+1} - x \Rightarrow 0 < \frac{-(x-1)}{x+1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} < 0$

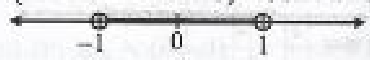
এখানে x এর মান -1 হতে পারে না, অন্যদিকে $x = 1$ হলে $\frac{x-1}{x+1} = 0$ হয়। তাই সংখ্যারেখায় -1, 1 এর প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি চিহ্নিত করি এবং $x < -1$, $-1 < x < 1$, $x > 1$, এই তিনটি ব্যবধি পর পর বিবেচনা করি। প্রত্যেকটি ব্যবধিতে $x - 1$ এবং $x + 1$ রাশি দুইটির চিহ্ন ছক:

ব্যবধি	(x – 1) এর চিহ্ন	(x + 1) এর চিহ্ন
$x < -1$	–	–
$-1 < x < 1$	–	+
$x > 1$	+	+

$\frac{x-1}{x+1} < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x - 1)$ এবং $(x + 1)$ ... বিশিষ্ট হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত অসমতার সমাধান $-1 < x < 1$

সমাধান সেট: $\{x \in R: -1 < x < 1\}$ সংখ্যারেখায় দেখানো ...



Ex-02 সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < ...$

Sol^n: এখানে x এর সমাধান -2 হতে পারে না; $x = 1$ প্রদত্ত অস... তাই সংখ্যারেখায় -2, 1 এর প্রতিরূপী বিন্দু দুইটি চিহ্নিত করি ... $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 1$ এই তিনটি ব্যবধি পর পর বিবেচনা ... চিহ্ন ছক

ব্যবধি	(x – 1) এর চিহ্ন	(x + 2) এর চিহ্ন
$x \le -2$	–	–
$-2 < x < 1$	–	+
$x \ge 1$	+	+

i. $x \le -2$, তখন $|x - 1| = -(x-1) > 0$ এবং $|x + 2| = -...$ বিধায় প্রদত্ত অসমতা দাড়ায় $-(x-1) < -2(x+2)$

$\Rightarrow -x + 1 < -2x - 4 \Rightarrow x < -5$, যা $x \le -2$ এর সাথে ...

ii. $-2 < x < 1$, তখন প্রদত্ত অসমতা দাড়ায় $-(x-1) < 2(x+2)$

$\Rightarrow -x + 1 < 2x + 4 \Rightarrow -3 < 3x \Rightarrow -1 < x$

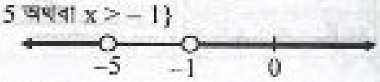
$\Rightarrow x > -1$, যা $-2 < x < 1$ এর সাথে সংগতিপূর্ণ।

iii. $x \ge 1$ তখন প্রদত্ত অসমতা দাড়ায়, $x - 1 < 2(x+2)$

$\Rightarrow -5 < x \Rightarrow x > -5$, যা $x \ge 1$ এর সাথে সংগতি পূর্ণ।

i. ii. iii. হতে পাই নির্ণেয় সমাধান সেট:

$\{x \in R: x < -5$ অথবা $x > -1\}$



For Practice:

01. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও:

$\frac{1}{|3x-5|} > 3$ **Ans:** $\frac{14}{9} < x < \frac{16}{9}, x \ne \frac{3}{5}$



02. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও:

$\left|\frac{2x}{x-2}\right| \le 1$ **Ans:** $-2 < x < \frac{2}{3}$



Type-06

Joykoli Special

Ex-01 প্রমাণ কর যে, $|a - b| \ge ||a| - |b||$ যেখানে, $a, b \in R$

Sol^n: আমরা জানি, $|a - b| \le |a| + |b|$ ---------- (i) যখন, ...

$\therefore |a| = |(a - b) + b| \Rightarrow |a| \le |a - b| + |b|$ [(i) নং অনুসারে]

$\Rightarrow |a| - |b| \le |a - b|$ ------------- (ii)

আবার, $|b| = |(b - a) + a|$

$\Rightarrow |b| \le |b - a| + |a|$ [(i) নং অনুসারে]

$\Rightarrow |b| - |a| \le |a - b| \Rightarrow |a| - |b| \ge -|a - b|$ [-1 দ্বারা ...]

$\Rightarrow -|a - b| \le |a| - |b|$ ------------- (iii)

(ii) ও (iii) সমন্বয় করে পাই,

$-|a - b| \le |a| - |b| \le |a - b|$ [$\because |x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a$]

অর্থাৎ, $|a - b| \ge ||a| - |b||$

$|x-1| < 3$ হলে, দেখাও যে, $|x^3 - 1| < 63$

$|x| = |(x-1) + 1|$

$\leq |x-1| + 1 \Rightarrow |x| < 3 + 1 \Rightarrow |x| < 4$

$|x^3 - 1| = |(x-1)^3 + 3x(x-1)|$

$|x^3 - 1| \leq |(x-1)^3| + 3|x|\,|x-1|$ ------- (i)

$|x-1| < 3 \quad \therefore |x-1|^3 < 3^3 \Rightarrow |x-1|^3 < 27$

$3|x|\,|x-1| < 3.3.4 \Rightarrow 3|x|\,|x-1| < 36$

$|x-1|^3 + 3|x|\,|x-1| < 27 + 36 \Rightarrow |x-1|^3 + 3|x|\,|x-1| < 63$

হতে, $|x^3 - 1| \leq |x-1|^3 + 3|x|\,|x-1| < 63$

$|x^3 - 1| < 63$ **(Showed)**

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

সমাধান কর: $\frac{1}{|5x+2|} \geq 5$ [16-17]

Solve $\frac{1}{|5x+2|} \geq 5$

$\Rightarrow |5x+2| \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq 5x + 2 \leq \frac{1}{5}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} - 2 \leq 5x \leq \frac{1}{5} - 2$

$\Rightarrow -\frac{11}{5} \leq 5x \leq -\frac{9}{5}$

$\Rightarrow -\frac{11}{25} \leq x \leq -\frac{9}{25}$

কিন্তু, $x \neq -\frac{2}{5}$ কারণ $x = -\frac{2}{5}$ হলে হর 0 হয়।

সমাধান সেট $= \left\{x \in R : -\frac{11}{25} \leq x \leq -\frac{9}{25}$ এবং $x \neq -\frac{2}{5}\right\}$ **Ans.**

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

প্রমাণ কর যে: $|a - b| \leq |a| + |b|$ [12-13]

Solve $\{|a| + |b|\}^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\,|b| = |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

এখন, $\{|a| + |b|\}^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab$ [$\because |a|^2 = a^2$; $|b|^2 = b^2$; $|ab| \geq ab$]

$\Rightarrow \{|a| + |b|\}^2 \geq (a+b)^2$

$\Rightarrow \{|a| + |b|\}^2 \geq (|a+b|)^2$

$\Rightarrow |a| + |b| \geq |a+b|$

b-এর পরিবর্তে –b বসালে

$\Rightarrow |a| + |-b| \geq |a + (-b)| \Rightarrow |a - b| \leq |a| + |b|$ **(Proved)**

সমাধান নির্ণয় কর: $|3x - 4| < 2$ [11-12]

Solve $|3x - 4| < 2$

$\Rightarrow -2 < 3x - 4 < 2$

$\Rightarrow -2 + 4 < 3x < 2 + 4$

$\Rightarrow 2 < 3x < 6$

$\Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$ **Ans.**

03. সমাধান কর: $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5$ [10-11]

Solve $\frac{1}{|3x+1|} \geq 5$ যেখানে, $3x + 1 \neq 0$

$\Rightarrow |3x+1| \leq \frac{1}{5}$ এবং $x \neq -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq 3x + 1 \leq \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{6}{5} \leq 3x \leq -\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{6}{15} \leq x \leq -\frac{4}{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-\frac{2}{5} \leq x \leq -\frac{4}{15}$ এবং $x \neq -\frac{1}{3}$ **Ans.**

04. সমাধান কর: $2 \leq \frac{1}{|x-1|}$ [05-06]

Solve $2 \leq \frac{1}{|x-1|}$ এবং $x \neq 1$

$\Rightarrow |x-1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ এবং $x \neq 1$ **Ans.**

05. সমাধান কর : $\frac{1}{|3x-5|} > 2$

Solve $\frac{1}{|3x-5|} > 2 \Rightarrow |3x-5| < \frac{1}{2}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 5 < 3x < \frac{1}{2} + 5$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2}$ এবং $x \neq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\frac{3^{n-1}}{9^4} = \frac{(81)^3}{9^n}$ হলে, n এর মান কত? [13-14]

A. 3 B. 5 C. 7 D. 8

Ans C Solve $\frac{3^{n-1}}{9^4} = \frac{(81)^3}{9^n}$

$\Rightarrow 3^{n-1} = \frac{3^{12}.3^8}{3^{2n}} = \frac{3^{20}}{3^{2n}} \Rightarrow 3^{n-1} = 3^{20-2n}$

$\Rightarrow n - 1 = 20 - 2n \Rightarrow 3n = 21 \therefore n = 7$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\frac{x+4}{x+3} > \frac{x-6}{x-7}$ অসমতাটির সমাধান হলো– [17-18]

A. $-4 < x < 6$ B. $-4 \leq x \leq 6$ C. $x < -3$ and $x > 7$
D. $x < -4$ and $x > 6$ E. $-3 < x < 7$

Ans E Solve $\frac{x+4}{x+3} > \frac{x-6}{x-7} \Rightarrow \frac{x+4}{x+3} - \frac{x-6}{x-7} > 0$

$\Rightarrow \frac{-10}{(x+3)(x-7)} > 0$

$\Rightarrow (x+3)(x-7) < 0$

$\therefore -3 < x < 7$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি a, b ∈ R হলে |a − b| এর মান কত? [10-11]

A. $> ||a| - |b||$ B. $= ||a| - |b||$
C. $\geq ||a| - |b||$ D.None

Ans.C

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $0 < |x - a| < p$ হলে x এর সকল মান নির্ণয় কর। এখানে a যেকোন বাস্তব সংখ্যা এবং p একটি ধনাত্মক সংখ্যা। [14-15]

A. $(a - p, a) \cup (a, a + p)$ B. $a - p \leq x \leq a$
C. $a \leq x \leq a + p$ D. $a - p \leq x \leq a + p$
E. $(a, p - a) \cup (a + p, a)$

Ans A Solve $0 < |x - a| < p$

$\Rightarrow 0 < x - a < p$ অথবা $-p < x - a < 0$

$\Rightarrow a < x < a + p$ অথবা $a - p < x < a$ $\therefore (a - p, a) \cup (a, a + p)$

02. $|x - 1| < \frac{1}{10}$ হলে, $|x^2 - 1|$-এর মান কোনটি? [12-13]

A. 1/100 B. 7/100 C. 14/100
D. 21/10 E. 21/100

Ans E Solve $|x - 1| < \frac{1}{10}$ ...... (i)

$\therefore |x + 1| \leq |(x - 1)| + 2 < \frac{1}{10} + 2 \Rightarrow |x + 1| < \frac{21}{10}$ ......(ii)

(i) × (ii) $\Rightarrow |x - 1|\,|x + 1| < \frac{1}{10} \times \frac{21}{10}$

$\Rightarrow |(x - 1)(x + 1)| < \frac{21}{100}$ $\therefore |x^2 - 1| < \frac{21}{100}$

03. (x+2) (x+3) ≥ 0 এর সর্বাধিক সঠিক উত্তর কোনটি? [09-10]

A. $x \leq -3$ B. $x \leq -3$ or $x \geq -2$ C. $x \geq -2$
D. All real numbers E. $-3 \leq x \leq 2$

Ans B Solve

ব্যবধি	(x + 2) এর চিহ্ন	(x + 3) এর চিহ্ন
$x \leq -3$	−	−
$-3 < x < -2$	−	+
$x \geq -2$	+	+

So, $x \leq -3$ অথবা, $x \geq -2$

Short cut: (x + 2) এবং (x + 3) এর মধ্যে (x + 3) হল বড়। কাজেই এটি চিহ্ন (≥) পরিবর্তন করবে অর্থাৎ, $(x + 3) \leq 0 \Rightarrow x \leq -3$ কিন্তু (x + 2) তা করবে না।

$\therefore x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ $\therefore x \leq -3$ অথবা $x \geq -2$

SELF TEST [MCQ]

01. $|3x + 2| = |5x + 4|$ সমাধান কত?

A. $x = -1, -\frac{4}{3}$ B. $x = -1, -\frac{3}{4}$
C. $x = -1, \frac{3}{4}$ D. None

02. $-2 < 3 - x < 8$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

A. $|x| < 4$ B. $|x| < 5$ C. $|x| < 6$ D. None

03. x এর কোন বাস্তব মানের জন্য $\frac{x - 1}{|x|}$ বাস্তব সংখ্যা?

A. R − {0} B. R C. R − {1} D. None

04. $|3x + 2| < 7$ অসমতাটির সমাধান কি?

A. $-3 < x < \frac{5}{3}$ B. $-1 < x < \frac{5}{3}$
C. $-2 < x < \frac{5}{3}$ D. None

05. $3x - x^2 + 4 > 0$ হলে x এর মান কত?

A. $-1 < x < 3$ B. $-1 < x < 4$ C. $1 < x < 4$ D. None

06. নিচের কোনটি মিথ্যা?

A. $|a + b| \leq |a| + |b|$ B. $|a - b| \leq |a| + |b|$
C. $|a - b| \geq |a| - |b|$ D. None

07. $\frac{|3 - x|}{|x|} = 3$ সমাধান কত?

A. $x = \frac{3}{4}, \frac{-3}{2}$ B. $x = \frac{4}{3}, \frac{-3}{2}$ C. $x = \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ D. None

08. log e কি ধরনের সংখ্যা?

A. পূর্ণ B. অমূলদ C. মূলদ D. [illegible]

09. কোন জোড়াটি সহমৌলিক?

A. 5, 25 B. 3, 15 C. 7, 15 D. [illegible]

10. যদি a < 0, b < 0 এবং a > b হয় তবে কোনটি সত্য নয়?

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $-a < -b$ C. $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$ D. $\frac{1}{a}$ [illegible]

11. ln e^e একটি−

A. ভগ্নাংশ B. পূর্ণ সংখ্যা C. অমূলদ সংখ্যা D. [illegible]

12. যোগের অভেদক কোনটি?

A. 0 B. 1 C. ∞ D. None

13. ত্রিভুজ অসমতা নিচের কোনটি?

A. $|a - b| < |a| + |b|$ B. $|a - b| > |a| + |b|$
C. $|a + b| \leq |a| + |b|$; a, b, ∈ R D. $|a + b| \leq |a| + |b|$

14. a < 0 হলে, $\frac{(\sqrt{a^2} - 1)a}{-a - 1} = ?$

A. $\frac{1}{a - 1}$ B. a C. 1 D. 0

15. $e^{\ln 3}\, e^{\ln 3}$ কি ধরনের সংখ্যা?

A. মূলদ B. অমূলদ C. ভগ্নাংশ D. None

16. a, b, c ∈ R হলে, |a b c| = ?

A. |a| |b| |c| B. abc C. ab |c| D. [illegible]

17. A = $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\ldots\}$ সেটের নিম্নসীমা হল-

A. 0 B. 1 C. 6 D. 10

18. {1, 3, 6, 10} সেটের বৃহত্তম নিম্নসীমা-

A. 1 B. 3 C. 6 D. 10

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Answer

18.A	17.A	16.A	15.A	14.B	13.C	12.A	11.C	[illegible]
09.C	08.B	07.A	06.D	05.B	04.A	03.A	02.B	[illegible]

...শ অধ্যায় | ...তীয় পত্র

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং (Linear Programming)

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

...াশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যা গঠন : নিম্নলিখিত ধাপগুলো অনুসরণ করে ...াশ্রয়ী প্রোগ্রামের সমস্যা গঠন করা হয়।

...ম ধাপ : সিদ্ধান্তকারীকে সঠিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ এবং এর সাথে সম্পর্কযুক্ত ...গুলো চিহ্নিত করে সমস্যাটিকে চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা। যেমন, ...টি দ্রব্যের কোনটি কি পরিমাণ উৎপাদন করলে সর্বোচ্চ মুনাফা হবে তা ... চলক দ্বারা প্রকাশ করা।

...তীয় ধাপ : যার পরিমাপকে সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন করতে হবে তাকে ...য়োজক চলক দ্বারা, গাণিতিক ফাংশনে প্রকাশ করা, যাকে অভীষ্ট ফাংশন (...jective function) বলে।

...তীয় ধাপ : সীমাবদ্ধতাগুলো চিহ্নিত করে তাদেরকে চলকের মাধ্যমে রৈখিক ...করণ বা অসমতা আকারে প্রকাশ করে। এগুলোকে সীমাবদ্ধতার (...nstraints) সেট বলে।

...র্থ ধাপ : রৈখিক সমীকরণগুলোর লেখ অঙ্কন করে এদের সমাধান এলাকা বা ...কূল এলাকা (Feasibility Region যা ছায়া ঘেরা ক্ষেত্র) চিহ্নিত করা।

...ম ধাপ : ছায়া ঘেরা ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক অভীষ্ট ফাংশনে ...য়ে এর সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা।

...গাশ্রয়ী প্রোগ্রাম এর শর্তাবলী : কতকগুলো শর্তপূরণ সাপেক্ষে যে কোন ...স্যার (সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করণ) সমাধান করার জন্য যোগাশ্রয়ী ...গ্রাম প্রয়োগ করা হয়। নিম্নে শর্তগুলো উল্লেখ করা হল-

... সমস্যার একটি অভীষ্ট ফাংশন (Objective function), যেমন মুনাফা বা উৎপাদন ব্যয়, অবশ্যই থাকতে হবে যার সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করতে হবে এবং তাকে সিদ্ধান্ত চলকের রৈখিক অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশ করা যাবে।

... সমস্যার অবশ্যই বিকল্প পদ্ধতির কার্যক্রম এর ব্যবস্থা থাকতে হবে। যেমন, একটি দ্রব্য দুইটি মেশিনে প্রস্তুত হতে পারে। এরূপক্ষেত্রে সমস্যা হবে কোন মেশিনে কত একক দ্রব্য প্রস্তুত হবে তা নির্ণয় করা।

... সমস্যার জন্য অবশ্যই সীমিত সম্পদ থাকতে হবে। যেমন, একটি উৎপাদন কারখানায় কাঁচা মালের যোগান সীমিত হতে বাধ্য।

... প্রতিষ্ঠানের প্রদত্ত সীমাবদ্ধতা ও শর্তগুলো একাধিক রৈখিক অসমতায় প্রকাশযোগ্য হবে।

... সিদ্ধান্ত চলকগুলো অবশ্যই পরস্পর সম্পর্কযুক্ত ও অঋণাত্মক হতে হবে। যেমন, দুই প্রকার দ্রব্যের একটি x একক এবং অন্যটি y একক প্রস্তুত করা হলে x ও y অঋণাত্মক হবে অর্থাৎ $x \geq 0, y \geq 0$।

...টি সিদ্ধান্ত চলকের জন্য যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের প্রমাণ আকার: ...টি নিম্নের তিনটি অংশে গঠিত –

...ভীষ্ট ফাংশন (Objective function) : $z = ax + by$ যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং ...মস্যায় যে রৈখিক রাশির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয় তাকে ...ভীষ্ট ফাংশন বা উদ্দেশ্য অপেক্ষক বলা হয়।

...র্ত বা সীমাবদ্ধতা বা প্রতিবন্ধকতা (Constraints or restriction)

$a_1x + b_1y \geq c_1$

$a_2x + b_2y \leq c_2$

...গাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং সমস্যায় প্রতিটি সীমাবদ্ধতা হচ্ছে রৈখিক সমীকরণ বা ...খিক অসমতা। সীমাবদ্ধতাসমূহের লেখচিত্র যে এলাকায় ছেদ করে তাকে ...ধানের অনুকূল এলাকা (Feasible region) বলা হয়।

$x \geq 0, y \geq 0$ হচ্ছে অশূন্য সীমাবদ্ধতা।

৩. যে সকল বিন্দু প্রদত্ত শর্তসমূহের প্রতিটিকে সিদ্ধ করে তাদের সেটই সমাধানের অনুকূল এলাকা (Feasible region)। সমাধানের অনুকূল এলাকায় x ও y এর মানের জন্য অভীষ্ট ফাংশনের যে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায় তা ইঙ্গিত মান (Optimal value) এবং অভীষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য x ও y এর ইঙ্গিত মান পাওয়া যায় যা ইঙ্গিত সমাধান (Optimal solution) এবং x, y চলককে সিদ্ধান্ত চলক (decision variables) বলে। একগুচ্ছ সীমাবদ্ধতায় লেখচিত্র একটি বহুভুজ গঠন করলে তাকে সীমাবদ্ধ এলাকা বলা হয়।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01

Ex-01 সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নকরণ কর। $Z = 2x - y$

শর্তসমূহ- $x+2y \leq 8, 4x+3y \geq 12, x+y \leq 5, x, y \geq 0$

Sol^n : অসমতাসমূহ :

$x + 2y \leq 8, 4x + 3y \geq 12, x + y \leq 5, x, y \geq 0$

অসমতাগুলোকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে,

$x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$............ (i)

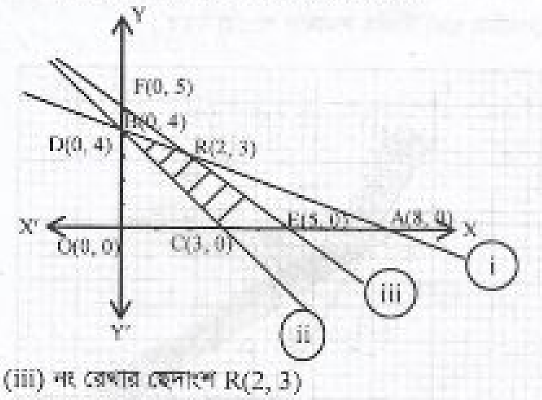
আবার, $4x + 3y = 12$

আবার, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.................... (ii)

আবার, $x + y = 5$

$\Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$.......... (iii)

বিন্দুসমূহ- (i) নং রেখা হতে A(8, 0), B(0, 4)
(ii) নং রেখা হতে C(3, 0), D(0, 4)
(iii) নং রেখা হতে E(5, 0), F(0, 5)



(i) ও (iii) নং রেখার ছেদাংশে R(2, 3)

শর্তাধীন বিন্দুসমূহ :

C(3, 0), B(0, 4), R(2, 3) ও E (5, 0)

C(3, 0) বিন্দুতে Z = 6

B(0, 4) বিন্দুতে Z = – 4

E(5, 0) বিন্দুতে Z = 10

R(2, 3) বিন্দুতে Z = 1

$Z_{min} = -4$ যেখানে x = 0 এবং y = 4

$Z_{max} = 10$ যেখানে x = 5 এবং y = 0. **Ans.**

For practice:

01. $x + y \geq 6, 2x + y \geq 8, x, y \geq 0$ শর্তসমূহ সাপেক্ষে $Z = 2x + 3y$ রাশিটির সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। **Ans.** 24

02. $Z = 3x + y$ যখন $2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12, x, y \geq 0$ লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। **Ans.** $Z_{max} = 12, Z_{min} = 4$

03. $5x + 10y \leq 50, x + y \geq 1, y \leq 4, x, y \geq 0$ শর্তাধীনে $2x + 7y$ এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। **Ans.** $Z_{max} = 32, Z_{min} = 2$

Type-02

কোন অসমতার ছক থেকে ন্যূনতম প্রয়োজন মেটানোর কৌশলঃ

Ex-01 A ও B নামক দুই ধরনের খাবার আছে, যেগুলিতে নিম্ন ছক অনুযায়ী প্রোটিন ও স্টার্চ আছেঃ

খাবার	প্রোটিন (প্রতি Kg-তে)	স্টার্চ (প্রতি Kg-তে)	প্রতি Kg-র মূল্য
A	8 গ্রাম	10 গ্রাম	40 টাকা
B	12 গ্রাম	6 গ্রাম	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32 গ্রাম	22 গ্রাম	

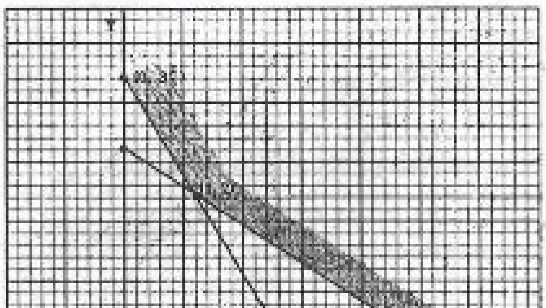
সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক প্রয়োজন কিভাবে মেটানো যাবে তা নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, A থেকে x কেজি ও B থেকে কেজি y কেজি প্রত্যহ খাওয়া হবে। তাহলে A এবং B খাবার দুটি থেকে দৈনিক আহরিত প্রোটিনের পরিমাণ $8x + 12y$ গ্রাম এবং এই পরিমাণ প্রোটিন কোনক্রমেই 32 গ্রামের কম হবে না।

অতএব, $8x + 12y \geq 32$ অর্থাৎ $2x + 3y \geq 8$

এবং অনুরূপ কারণে $10x + 6y \geq 22$ অর্থাৎ $5x + 3y \geq 11$

x কেজি A খাবারের মূল্য 40x টাকা এবং y কেজি B খাবারের মূল্য 50y টাকা। দৈনিক মোট খরচ $Z = 40x + 50y$ টাকা যা সবচেয়ে কম হতে হবে। যোগাশ্রয়ী সমীকরণ দুটিকে সমাধান করতে হবে। যেহেতু x কেজি এবং y কেজি পরিমাণ খাদ্য প্রত্যহ খাওয়া হবে, তাই $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$ হতে হবে। নিচের লেখচিত্র দ্বারা ঈঙ্গিত সমাধান পাওয়া যাবে।



লেখচিত্রের ছায়া ঘেরা অংশটি হচ্ছে সম্ভাব্য সমাধানের অনুকূল এলাকা এই এলাকার সকল বিন্দুর জন্য $2x + 3y \geq 8$ এবং $5x + 3y \geq 11$. এই এলাকার তিনটি কৌণিক বিন্দু হচ্ছে $(0, 3\frac{2}{3})$, (4, 0) এবং (1, 2)।

40x + 50y-এর মান এই তিনটি বিন্দুর একটিতে সর্বনিম্ন হবে।

যখন (i) $x = 0, y = 3\frac{2}{3}$, তখন খরচ হবে $40x + 50y = 40.0 + 5$...

$= 183\frac{1}{3}$ টাকা

যখন (ii) $x = 4, y = 0$, তখন খরচ হবে $40x + 50y = 50.0 = 160$ টাকা

যখন (iii) $x = 1, y = 2$, তখন খরচ হবে $40x + 50y = 40.1 + 50.2 = 140$ টাকা

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে, সবচেয়ে কম খরচ হবে যখন x = ... y = 2 কেজি খাদ্য খাওয়া হবে।

For practice:

1. একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য রেডিও এবং টেলিভিশন ... সেট কিনতে পারেন। রেডিও ও টেলিভিশন প্রতিটির ক্রয়মূল্য ... ডলার ও 120 ডলার। প্রতি রেডিও এবং টেলিভিশন সেটে লাভ ... এবং 24 ডলার। সর্বোচ্চ 10400 ডলার বিনিয়োগ করে তিনি ... লাভ করতে পারেন। **Ans:** 2...

2. এক ব্যক্তি x ও y দুই রকমের খাদ্য গ্রহণ করেন। তিন ধরনের পুষ্টি ... N_3 এর পরিমাণ, খাদ্যের মূল্য ও পুষ্টির দৈনিক সর্বনিম্ন প্রয়োজন নি...

মূল্য	X	Y	দৈনিক ...
	2.00 টাকা	3.00 টাকা	প্রয়ো...
N_1	30	12	60
N_2	15	15	60
N_3	6	18	36

যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সাহায্যে খাদ্যের এমন একটি সমন্বয় নি... সর্বনিম্ন খরচে ঐ ব্যক্তির দৈনিক প্রয়োজন মেটাবে।

Ans: x প্রকারের 3 একক এবং y প্রকারের ...

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমা...

01. **একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য রেডিও এবং টেলিভিশন ... সেট কিনতে পারেন। রেডিও সেট এবং টেলিভিশন সেট ... ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 40 ও 120 ডলার। প্রতি রেডিও এবং টেলি... লাভ যথাক্রমে 15 ও 30 ডলার। সর্বোচ্চ 10800 ডলার বিনি... তিনি সর্বোচ্চ কত লাভ করতে পারেন? [07-08]**

Solve ধরি x টি রেডিও ও y টি TV সেট

$\therefore x + y \leq 100 \Rightarrow x \geq 0, y \geq 0$

$40x + 120y \leq 10800 \therefore z = 15x + 30y$

কৌণিক বিন্দুগুলো, (100, 0); (0, 90); (15, 85)

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভ, $z = 15 \times 15 + 30 \times 85 = 2775$ ডলার।

02. **নিম্নলিখিত শর্তে $F = 3x + 4y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করঃ [05-...**

Solve $x + y \geq 7$; $2x + 5y \geq 20$; $x \geq 0, y \geq 0$

$\therefore$ কৌণিক বিন্দু সমূহ (7, 0) (0, 4), (5, 2)

$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $= 3 \times 5 + 4 \times 2 = 23$

MCQ Part

[illegible]ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

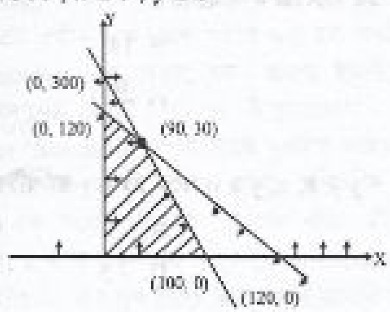
একজন ব্যবসায়ী 40 টাকা কেজি দরে পেয়ারা এবং 120 টাকা কেজি দরে [illegible] কিনতে পারেন। উভয় প্রকার মিলে তিনি তার দোকানে মোট 120 [illegible] ফল রাখতে পারেন। উক্ত ব্যবসায়ী পেয়ারা বিক্রি করে প্রতি কেজিতে [illegible] টাকা এবং আপেল বিক্রি করে প্রতি কেজিতে 32 টাকা লাভ করতে [illegible]। যদি তিনি সর্বোচ্চ 12000 টাকা বিনিয়োগ করতে পারেন, [illegible] কোন প্রকারের ফল কত কেজি কিনলে তিনি সর্বোচ্চ লাভ করতে [illegible]? [16-17]

A. 120 কেজি পেয়ারা
B. 120 কেজি আপেল
C. 30 কেজি আপেল ও 90 কেজি পেয়ারা
D. 90 কেজি আপেল ও 30 কেজি পেয়ারা
E. 60 কেজি আপেল ও 60 কেজি পেয়ারা

Ans | D | Solve ধরি, আপেল x কেজি ও পেয়ারা y কেজির জন্য সর্বোচ্চ লাভ হয়।

$\therefore x + y \le 120;\ 40y + 120x \le 12000$

$\Rightarrow 3x + y \le 300\ ;\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0$



সর্বোচ্চ লাভ, $z = 32x + 16y$

(90, 30) বিন্দুতে $z = 32 \times 90 + 16 \times 30 = 3360$ টাকা

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভের জন্য 90 কেজি আপেল এবং 30 কেজি পেয়ারা কিনতে হবে।

A ও B প্রকার খেলনা তৈরিতে যথাক্রমে 5 ও 3 একক শ্রম এবং 3 ও 4 একক কাঁচামাল লাগে। A প্রকারের প্রতিটি থেকে 10 টাকা ও B প্রকারের প্রতিটি থেকে 12 টাকা লাভ করা সম্ভব হয় এবং কোম্পানিটি 165 একক শ্রম ও 132 একক কাঁচামাল যোগান দিতে পারে, তবে সর্বোচ্চ যে লাভ হবে তা হলো− [14-15]

A. 330 taka B. 360 taka C. 420 taka
D. 448 taka E. 650 taka

Ans | C | Solve $5x + 3y = 165$

$3x + 4y = 132 \Rightarrow x = 24, y = 15$

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভ $= 10x + 12y = 420$ টাকা

A ও B দুই প্রকার যন্ত্র তৈরিতে যথাক্রমে 15 ও 5 একক সময় এবং 5 ও 10 একক কাঁচামাল লাগে। 105 একক সময় ও 60 একক কাঁচামাল দিয়ে সর্বোচ্চ যে লাভ হবে (যখন A এর প্রতি এককে লাভ 50 টাকা এবং তা B এর জন্য 30 টাকা) তা হলো- [12-13]

A. 390 টাকা B. 420 টাকা C. 380 টাকা
D. 400 টাকা E. 350 টাকা

Ans | A | Solve $15x + 5y \le 105;\ 5x + 10y \le 60$

$\therefore x = 6$ এবং $y = 3$

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভ $= 6 \times 50 + 3 \times 30 = 390$ টাকা

04. A ও B প্রকার যন্ত্র তৈরীতে যথাক্রমে 3 ও 4 একক সময় এবং 2 ও 1 একক কাঁচামাল লাগে। 45 একক সময় ও 20 একক কাঁচামাল দিয়ে সর্বোচ্চ যে লাভ হবে (যখন A এর প্রতি এককে লাভ 10 টাকা এবং তা B এর জন্য 12 টাকা) তা হলো− [13-14]

A. 100 Taka B. 135 Taka C. 142 Taka
D. 180 Taka E. 160 Taka

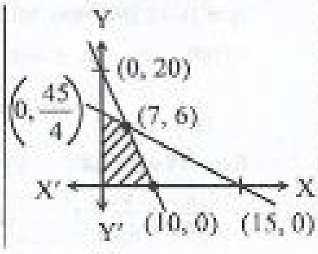
Ans | C | Solve ধরি, A প্রকার যন্ত্র x ও B প্রকার যন্ত্র y

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $3x + 4y \le 45 \rightarrow$ (i)

$2x + y \le 20 \rightarrow$ (ii)

এবং $z = 10x + 12y \rightarrow$ (iii)

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, (7, 6)



$\therefore$ অনুকূল বিন্দুসমূহ, (0, 0), (10, 0), (7, 6) $\left(0, \frac{45}{4}\right)$

(iii) নং এ যথাক্রমে বসালে, $z = 0$, $z = 100$ Taka,

$z = 70 + 72 = 142$ Taka

এবং $z = 12 \times \frac{45}{4} + 10 \times 0$ Taka $= 135$ Taka

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভের পরিমাণ = 142 Taka

05. একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য 40 ডলার দরে প্রতিটি A প্রকারের এবং 120 ডলার দরে প্রতিটি B প্রকারের সামগ্রী কিনতে পারেন। উভয় প্রকার সামগ্রী মিলে তিনি দোকানে মোট 100টি পণ্য রাখতে পারেন। A প্রকার সামগ্রীর প্রতিটিতে লাভ 16 ডলার ও B প্রকার সামগ্রীর প্রতিটিতে লাভ 32 ডলার হলে সর্বোচ্চ 10400 ডলার বিনিয়োগ করে তিনি সর্বোচ্চ কত লাভ করবেন? [08-09]

A. 2700 ডলার B. 2550 ডলার C. 2880 ডলার
D. 2773 ডলার E. 3220 ডলার

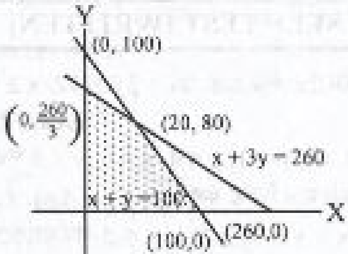
Ans | C | Solve ধরি, A প্রকারের সংখ্যা x

এবং B " " y

প্রশ্নমতে, $x + y \le 100,\ 40x + 120y \le 10400$

i. e. $x + 3y \le 260,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

$Z = 16x + 32y$



সর্বোচ্চ মানের জন্য

(20, 80) বিন্দুতে, $z = 16 \times 20 + 32 \times 80 = 2880$ ডলার

(100, 0) " $z = 16 \times 100 + 0 = 1600$ ডলার

$\left(0, \frac{260}{3}\right)$ " $z = 32 \times \frac{260}{3}$

$= \frac{8320}{3}$ ডলার

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভের পরিমাণ = 2880 ডলার

06. A ও B ধরণের প্রতিটি দ্রব্য তৈরীতে যথাক্রমে 10 ও 6 একক শ্রম, 6 ও 18 একক কাঁচামাল লাগে এবং 10 ও 12 টাকা লাভ করা যায়। একটি কোম্পানি সর্বোচ্চ 480 একক শ্রম ও 864 একক কাঁচামাল যোগান দিতে সক্ষম হলে কোম্পানিটি সর্বোচ্চ যে লাভ করতে পারে তা, কত টাকা? [15-16]

A. 576 B. 480 C. 1380 D. 1350 E. 720

Ans E Solve

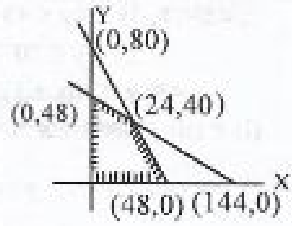
A ও B-এর দ্রব্য সংখ্যা যথাক্রমে x, y

তাহলে, $10x + 6y \leq 480$

$\therefore \frac{x}{48} + \frac{y}{80} = 1$ ..... (i)

$6x + 18y \leq 864$

$\therefore \frac{x}{144} + \frac{y}{48} = 1$ ..... (ii)



(i) ও (ii) সমাধান করে (24, 40)

$\therefore$ সর্বোচ্চ লাভ $= 10x + 12y = 10 \times 24 + 12 \times 40 = 720$ টাকা

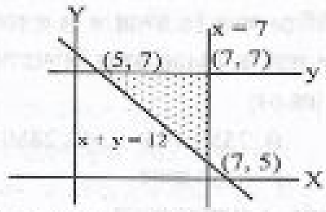
07. দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা এমনভাবে গঠিত যেন অংকদ্বয়ের যোগফল কমপক্ষে 12 হয়। আবার অংকদ্বয়ের যে কোনটির সাথে 2 যোগ করলেও সেটি এক অংক বিশিষ্ট থাকে। এরূপ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নিচের কোনটি? [07-08]

A. 57 B. 67 C. 77 D. 47 E. 75

Ans A Solve ধরি, একক স্থানীয় অংক x

এবং দশক স্থানীয় অংক y $\therefore$ সংখ্যাটি $= 10y + x$

প্রশ্নমতে, $x + y \geq 12$ ও $x + 2 \leq 9$ i.e. $x \leq 7$ এবং $y + 2 \leq 9$ i.e. $y \leq 7$



(5, 7) বিন্দুর জন্য $10y + x = 10 \times 7 + 5 = 75$

(7, 7) " " $10y + x = 10 \times 7 + 7 = 77$

(7, 5) " " $10y + x = 10 \times 5 + 7 = 57$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি $= 10y + x = 57$

SELF TEST [WRITTEN]

01. $Z = 3x + y$ যখন $2x + y \leq 8, 2x + 3y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$.

Ans. $Z_{max} = 12, Z_{min} = 4$.

02. $5x + 10y \leq 50, x + y \geq 1, y \leq 4, x \leq 0, y \leq 0$ শর্তাধীনে $Z = 2x + 7y$ এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। **Ans.** $Z_{max} = 32, Z_{min} = 2$.

03. $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 7, x \geq 3, y \leq 5$ শর্তসাপেক্ষে $Z = 3x + 4y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। **Ans.** $Z_{min} = 21$.

04. একটি বাগানে সর্বোচ্চ 23 বর্গমিটার জমিতে পেয়ারা এবং সুপারির চারা লাগাতে হবে। একটি পেয়ারার জন্য 2 বর্গমিটার এবং একটি সুপারির জন্য 1 বর্গমিটার জায়গা বরাদ্দ। প্রতি পেয়ারার মূল্য 0.4 টাকা এবং প্রতি সুপারির মূল্য 1.20 টাকা। যদি মোট 11.60 টাকার বেশি ব্যয় না হয়, তবে সর্বোচ্চ কত সংখ্যক গাছ লাগানো যাবে?

Ans. পেয়ারার চারার সংখ্যা 8 টি; সুপারির চারার সংখ্যা 7 টি

05. নিম্নলিখিত শর্তে $z = 40x + 50y$ এর সর্বনিম্ন মান কত?

যেখানে, $8x + 12y \geq 32$ এবং $10x + 6y \geq 22$ **Ans.** 140

SELF TEST [MCQ]

01. $x + y \geq 6, 2x + y \geq 8, x \geq 0, y \geq 0$ **শর্তাধীনে** $z = 2x + 3\ldots$ **সর্বনিম্ন মান কত?**

A. 12 B. 4
C. –5 D. 16

02. $x + y \geq 5, x \geq 2, y \leq 4,$ **শর্তাধীনে** $z = 6x + 2y$ **রাশিটির স…**
কত?

A. 22 B. 20
C. 18 D. 30

03. নিম্নের লিনিয়ার প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান কর- $z = 3x + \ldots$
সর্বোচ্চকরণ যেখানে $x + y \leq 7; 2x + 5y \leq 20; x, y > 0$

A. (5, 2) B. (7, 0)
C. (10, 0) D. (0, 7)

04. $x, y \geq 0$ **এবং** $x + 2y \leq 6$ **ও** $2x + y \leq 8$ **শর্ত সাপেক্ষে ফাংশন**
$z = 3x + 4y$ **এর সর্বোচ্চ মান হবে:**

A. 12 B. 14
C. 16 D. $\frac{46}{3}$

05. $x + y \leq 5, x + y \geq 8, x, y \geq 0$ **শর্তে** $2x - y$ **রাশিটির সর্বনি…**

A. – 4 B. – 8
C. – 6 D. – 5

06. সর্বোচ্চকরণ কর: $Z = 2x + 3y$ **শর্ত সমূহ:** $x + 2y \leq 10; \ldots$
$x \leq 4, x, y \geq 0$

A. 20 B. 15
C. 16 D. 14

07. $x + y \leq 7, 2x + 5y \leq 20,$ **শর্তাবলী সাপেক্ষে** $z = 3x + 4y$ **এর …**
মান কত?

A. 15 B. 18
C. 23 D. 26

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	03. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	07. Ⓐ…
02. ⒶⒷⒸⒹ	04. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	

Answer

07.C	06.C	05.B	04.D	03.A	02.D	…

...অধ্যায়	**জটিল সংখ্যা (Complex Numbers)**
...পত্র	

...সংখ্যার বর্গমূল কখনও বাস্তব হতে পারে না। কারণ ঋণাত্মক ...উভয় প্রকার রাশির বর্গ ধনাত্মক রাশি। $x^2+1=0$; $x=\pm\sqrt{-1}$ ...। এই সংখ্যাগুলো কাল্পনিক সংখ্যা। প্রত্যেক কাল্পনিক সংখ্যাকে i ...প্রকাশ করা যায়। কাল্পনিক সংখ্যার একক i এবং এর ধর্ম হচ্ছে $i^2=-1$।

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী

...জটিল রাশি: $x, y \in R$ এ থাকলে $x+iy$ কে জটিল সংখ্যা (Complex number) বলা হয় এবং z বা C দ্বারা সূচিত করা হয়। $y=0$ ...হলে, সংখ্যাটি বাস্তব এবং $x=0$ হলে, সংখ্যাটি কাল্পনিক। x কে z এর ...বাস্তব অংশ [Real part of z = Re (z)] এবং y কে z এর কাল্পনিক অংশ (Imaginary part of z = Im (z)] বলা হয়।

...$x^2+1=0$ এবং $x^2-2x+3=0$ সমীকরণদ্বয়ের কোন বাস্তব সমাধান ...। ঐতিহাসিকভাবে এ ধরণের সমীকরণের অস্তিত্বের জন্য কাল্পনিক সংখ্যা ...ও জটিল সংখ্যার ধারণা সৃষ্টি করা হয়েছে। বিশিষ্ট গণিতবিদ অয়লার (Leonhard Euler:1707 1783) এমন একটি প্রতীক ব্যবহার করেন যার ...-1 হবে। এই প্রতীকটিকে i দ্বারা সূচীত করা হয়; অর্থাৎ $i^2=-1$। i কে Imaginary number নাম দেওয়া হয়। অবশ্য ইটালীয় গণিত শাস্ত্রবিদ ...কার্ডানের অবদানের কথাও এখানে উল্লেখ্যযোগ্য। কার্ডানো i কে 'Fictitious' or 'Sophistic' সংখ্যা নামে অবহিত করেন।

...এর একটি জ্যামিতিক ব্যাখ্যা আছে। জার্মান গণিতবিদ গাউস প্রথমে এই ব্যাখ্যা দেন, i কে সংঘটন হিসাবে বিবেচনা করে এটি x অক্ষের উপর ...প্রযুক্ত করলে, x অক্ষের ধনাত্মক দিকে (Anti Clockwise) 90° কোণে আবর্তিত হয় এবং – i ঋণাত্মক দিকে 90° কোণে আবর্তিত হয়।

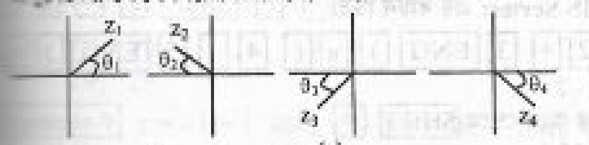
...জটিল রাশির জ্ঞাতব্য:

...কার্তেসীয় আকার, $z = x + iy$

...মডুলাস (পরমমান), $|z| = \text{mod}(z) = r = \sqrt{x^2+y^2}$

...আর্গুমেন্ট (নতি), $z = \text{Arg}(z) = \text{amp } z = \theta =$ বিস্তার (Amplitude) $=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$। সর্বদাই $-\pi < \theta \le \pi$।

...আর্গুমেন্টের ক্ষেত্রে নিচের চিত্রগুলো লক্ষ্য কর-



1 নং চিত্রে $x + iy \to \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

2 নং চিত্রে $-x + iy \to \theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

3 নং চিত্রে $-x - iy \to \theta = -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

4 নং চিত্রে $x - iy \to \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

...যদি $z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা হয়, তবে সংখ্যাটির পোলার আকার হবে $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$, যেখানে r এবং θ যথাক্রমের সংখ্যাটির মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট।

✓. $\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$
সুতরাং, $z = x + iy$ এর মডুলাস $r = \sqrt{x^2+y^2}$ হলে, $z^n = (x+iy)$ এর মডুলাস হবে $(\sqrt{x^2+y^2})^n$ এবং আর্গুমেন্ট হবে $n\theta$

- এককের ঘনমূল তিনটি $1, \omega, \omega^2$ এবং $1 + \omega + \omega^2 = 0$
- এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির একটি অপরটির বর্গ।
- $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ হলে $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$
- যেহেতু $\omega^3 = 1$; $\omega^4 = \omega$; $\omega^6 = (\omega^3)^2 = 1^2 = 1$ সেহেতু $\omega^{3n+p} = \omega^p$
  উদাহরণ : $\omega^{19} = \omega^{(3\times6)+1} = \omega$
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, |z^n| = |z|^n$
- $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2, \arg z^n = n.\arg z$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = 0$ হলে অর্থাৎ $\arg z_1 = \arg z_2$ হলে,
  $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{\pi}{2}$ হলে, $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
  [MCQ-এর জন্য গুরুত্বপূর্ণ]
- **De Moivre's Theorem**
  (i) $(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$ যখন $n \in Z$
  (ii) $(\cos\theta \pm i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$
  যখন $n \in Z$ এবং $k = 0,1,2 \ldots\ldots (n-1)$
  (iii) $(\cos\theta \pm i\sin\theta)^{\frac{m}{n}} = \cos\left(\frac{m\theta+2mk\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(\frac{m\theta+2mk\pi}{n}\right)$
  যখন $m, n \in Z$ এবং $k = 0,1,2 \ldots\ldots (n-1)$
- **Euler's Theorem**
  $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$
- **জটিল সংখ্যার লগারিদমিক Form**
  $\ln(x \pm iy) = \ln|r| \pm i(2k\pi + \theta)$ যেখানে $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
- **জটিল সংখ্যার সূচকীয় Form**
  $z^w = e^{w\{\ln r + i(2k\pi+\theta)\}}$ যেখানে $r = |z|$, $\theta = \arg z$
- **i –এর ঘাত (Powers of i):**
  $i^2 = -1, i^3 = i^2 . i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i^4 . i = i \ldots\ldots$
  ∴ n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে,
  $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$
  $i^{4n+1} = i^{4n} . i = (i^4)^n . i = 1 . i = i$
  $i^{4n+2} = i^{4n} . i^2 = (i^4)^n . i^2 = 1 . (-1) = -1$
  $i^{4n+3} = i^{4n} . i^3 = (i^4)^n . i^3 = 1 . (-i) = -i$
  সুতরাং n যথাক্রমে 4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k+3 আকারের সংখ্যা হলে i^n এর মান যথাক্রমে $1, i, -1, -i$ হবে।
  আবার, $i . (-i) = -i^2 = 1$ বিধায় $i^{-1} = -i$
  $\therefore i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$
  $i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = i$
  $i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1$
  অতএব, i -এর ঘাত ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলেও তার মান ± 1 বা ± i হবে।

জটিল রাশির ধর্ম :

- যদি $a + ib = 0$ হয় তবে $a = 0 ; b = 0$ যখন $a , b \in R$
- $a + ib = c + id$ হয় তবে $a = c ; b = d$ যখন $a , b , c , d \in R$
- $z = x + iy$ রাশির অনুবন্ধী রাশি $\bar{z} = x - iy$
- দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার গুনফল ও যোগফল উভয়েই বাস্তব সংখ্যা।
- কোন জটিল সংখ্যার মূল একটি জটিল সংখ্যা হবে।
- $z\bar{z} = |z|^2$, $\bar{\bar{z}} = z$
- দুটি জটিল সংখ্যা z এবং w হলে,

(i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ এবং $w \neq 0$ হলে $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

(ii) $|z + w| \le |z| + |w|$, $|zw|^2 = |z|^2 |w|^2$

(iii) $|z - w| \le |z| + |w|$, $|z - w| \ge ||z| - |w||$

সঞ্চারপথের সংশ্লিষ্ট :

$z = x + iy$ এবং

i. $|x \pm k| = k_1$ হলে সঞ্চারপথের সমীকরন বৃত্ত হবে।

ii. $|z \pm k_1| = |z \pm k_2|$ হলে সঞ্চারপথের সমীকরণ সরলরেখা হবে।

- $x = -n + \sqrt{-n + \sqrt{-n + \sqrt{-n}}}$ ....হলে, $x = \frac{1 - 2n \pm \sqrt{1 - 4n}}{2}$

Calculator Type
জটিল সংখ্যা (Complex Number)

■ সকল ক্ষেত্রে এই অধ্যায়ের [Mode] Complex এ রাখতে হবে।
কিভাবে Mode Complex করতে হয়-
Casio calculator এ [Mode] → 2 চেপে mode complex এ করা যায়।

Complex number Calculator এ কিভাবে প্রবেশ করানো হয়?
মনে করি, জটিল সংখ্যাটি, $z = a + ib = 4 + 5i$
জটিল সংখ্যাটির বাস্তব অংশ (real part a = 4) এবং
অবাস্তব অংশ (imaginary part b = 5)

Calculator এ Mode 2 চেপে complex mode নিয়ে [4] [+] [5] [ENG] [=] চাপলে ES series calculartor screen এ সরাসরি 4 + 5i আসে। কিন্তু Ms/w series এর screen এ real part (বাস্তব অংশ) 4 আসে। SHIFT Re-im চাপলে অবাস্তব অংশ 5i দেখা যাবে।

■ [Re-im] বাটনটি W series এর [RCL] বাটন এবং MS series এর [=] বাটন।

Example-1 $i^2 = -1$ হলে, $\frac{i^{-1} - i}{2i^{-1} + i} = ?$ (ঢা.বি 09-10)

সমাধান: $\frac{i^{-1} - i}{2i^{-1} + i} = \frac{\frac{1}{i} - i}{\frac{2}{i} + i} = \frac{\frac{1+1}{i}}{\frac{2-1}{i}} = 2$

এই problem টি Calculator এ করতে নিচের বাটন চিত্রটি অনুসরন করতে হবে।

W/MS/ES Series: এর বাটন চিত্র:
[(] [ENG] [x^{-1}] [-] [ENG] [)] [÷] [(] [2] [×] [ENG] [x^{-1}] [+] [ENG] [)] [=]
Ans. 2
বিশেষ দ্রষ্টব্য: এখানে [ENG] = i এবং [ENG] [x^{-1}] = i^{-1}

Calculator Use Ex-02
মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়:
4 + 3i এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

For MS Series:
[(] [4] [+] [3] [Eng] [)] [shift] [+] = মডুলাস পাবে 5
Again [shift] = চাপলে আর্গুমেন্ট পাবে 36.87

For ES Series:
[(] [4] [+] [3] [i] [)] [shift] [complex] [3] =
Result দেখাবে 5 < 36.86 যা যথাক্রমে মডুলাস ও আর্গুমেন্ট এর মান

Calculator Use Ex-03
i. কার্তেসীয় থেকে পোলার স্থানাংক নির্ণয়:

For MS Series:
[shift] [pol (] ভুজ [,] কোটি [)] [=] এরপর [RCL] [tan]

For ES Series:
[shift] [pol (] ভুজ [shift] [,] কোটি [)] [=]

■ **Complex number বা জটিল সংখ্যার absolute value বা পরমমান নির্ণয়**

Example-4 : $|(3+4i)| = ?$
W/MS Series: এর বাটন চিত্র:
[SHIFT] [)] [(] [3] [+] [4] [ENG] [)] [=]
Ans. 5

ES Series: (1.in 10 Set up)
[SHIFT] [hyp] [3] [+] [4] [ENG] [)] [=]
Ans. 5
Note: Mth I0 setup নিয়েও apsolute value নির্ণয় করা যাবে।

■ **Addition and Subtraction:**

Example-5 : $(5 + 8i) + (9 + 11i) = ?$
W/MS Series: এর বাটন চিত্র:
[(] [5] [+] [8] [ENG] [)] [+] [(] [9] [+] [11] [ENG] [)] [=]
Ans. 14
অবাস্তব অংশ পেতে [SHIFT] [=]
Ans. 19i
Total Ans. 14 + 19i

ES Series: এর বাটন চিত্র:
[(] [5] [+] [8] [ENG] [)] [+] [(] [9] [+] [11] [ENG] [)] [=]
Ans. 14 + 19i

■ **Multiplication & Divission:**

Example-6 $(2 + 3i) \times (4 + 5i) = ?$
W/MS Series: এর বাটন চিত্র:
[(] [2] [+] [3] [ENG] [)] [×] [(] [4] [+] [5] [ENG] [)] [=]
Ans. –7
অবাস্তব অংশ পেতে [SHIFT] [=]
Ans. 22.i
Total Answer: –7 + 22i

ES Series: এর বাটন চিত্র:
[(] [2] [+] [3] [ENG] [)] [×] [(] [4] [+] [5] [ENG] [)] [=]
Answer: –7 + 22i

■ **Some Important Similiar Problems:**

Example-7 $\frac{(2+3i)}{(2-i)} = \rho + \alpha i$, ρ ও α বাস্তব সংখ্যা হলে, ...
(DU 96-97)
A. 5 / 3 B. –5 /3 C. 8/5 D. 7/5
Ans. C

W Series: এর বাটন চিত্র:

[2] [+] [3] [ENG] [)] [÷] [(] [2] [–] [ENG] [)] [=]

Ans. 0.2

অবাস্তব অংশ পেতে [SHIFT] [=] Ans. 1.6 i

ভগ্নাংশ আকারে পেতে [SHIFT] [$a\,b/c$] Ans. 8/5

$= \frac{8}{5}$ Ans.

ES Series:

Math I, Set up করতে

[SHIFT] [MODE]

1: Math I_0	2: Line I_0
3: Deg	4: Rad
5: Gra	6: Fix

Screen → Press [1]

বাটন চিত্র:

[(] [2] [+] [3] [ENG] [)] (Press down) [2] [–] [ENG] [=]

Example-8 : $\frac{(2+3i)\times(4+5i)}{(5-2i)}$ এর মান কত?

MS Series: এর বাটন চিত্র:

[(] [2] [+] [3] [ENG] [)] [×] [(] [4] [+] [5] [ENG]
[)] [÷] [(] [5] [–] [2] [ENG] [)] [=]

Ans. – 2.7341 ....

ভগ্নাংশ আকারে পেতে [SHIFT] [$a\,b/c$] Ans. $-\frac{79}{29}$

অবাস্তব অংশ পেতে [SHIFT] [=] Ans. $\frac{96}{29}$ i

Ans. $-\frac{79}{29}+\frac{96}{29}i$

ES Series:

Math I,

[SHIFT] [Mode] [1] [$\frac{\square}{\square}$] [(] [2] [+] [3] [ENG]
[)] [×] [(] [4] [+] [5] [ENG] [)] (Press down)
[(] [5] [–] [2] [ENG] [)] [=]

Ans. $-\frac{79}{29}+\frac{96}{29}i$

Example-9 $x=-1+i$ হলে, x^3+3x^2+4x+7 এর মান কত?
(BUET 05-06)

A. 6 + i B. 8 C. 5 D. 9 + 2i

Ans. C

MS Series: এর বাটন চিত্র:

[(] [–] [1] [+] [ENG] [)] [SHIFT] [x^3] [+] [3] [(] [–] [1] [+]
[ENG] [)] [x^2] [+] [4] [(] [–] [1] [+] [ENG] [)] [+] [7] [=]

Ans. 5

অবাস্তব অংশ পেতে [SHIFT] [=]

Ans. 0

$5 + 0\times i = 5$ Ans.

ES Series:

প্রথমে Calculator কে জটিল সংখ্যার mode এ নিতে হবে অর্থাৎ [mode] [2] তারপর x^3+3x^2+4x+7 লিখে [CALC] বাটন চাপতে হবে। Screen এ আসবে x = ?

[–1] [+] [ENG] [=]

বাটন চাপলে Ans. 5

Example-10

01. $7-30i\sqrt{2}$ এর বর্গমূল কত?

A. $2-11i\sqrt{2}$ B. $11i\sqrt{2}-32$
C. $5-3i\sqrt{2}$ D. $3-5i\sqrt{2}$

প্রত্যেকটি Option কে নিচের নিয়ম অনুসারে টেস্ট করতে হবে।

MS Series এর ক্ষেত্রে : $(5-3i\sqrt{2})^2$ = (Screen এ দেখাবে 7)

SHIFT [=] চাপলে $-42.43i = -30i\sqrt{2}$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= 5-3i\sqrt{2}$

ES Series এর ক্ষেত্রে:

$(5-3i\sqrt{2}$ (ডানদিকে)$)^2$

Ans. $5-3i\sqrt{2}$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= 5-3i\sqrt{2}$

02. $\sqrt[4]{-144}=?$

MS Series এর ক্ষেত্রে:

$(\sqrt{6}(1+i))^2$ Screen এ দেখাবে 12 i.

পুনরায় Ans^2 = করলে Screen এ দেখাবে –144

∴ নির্ণেয় চারতম মূল $=\pm\sqrt{6}(1\pm i)$

ES Series এর ক্ষেত্রে:

$(\sqrt{6}$ (ডানদিকে) $(1+i))^2$ = Screen এ দেখাবে 12 i তারপর Ans^2 = করলে Screen এ দেখাবে –144

∴ নির্ণেয় চারতম মূল $=\pm\sqrt{6}(1\pm i)$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01 : মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয়-

(a) $z = x+iy$ হলে,

(i) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (ii) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

(iii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

(iv) $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)$ আকারের জটিল সংখ্যার মডুলাস,

$|z| = r=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2)\ldots\ldots}$

(v) $\frac{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)\ldots\ldots}{(x_4+iy_4)(x_5+iy_5)(x_6+iy_6)\ldots\ldots}$ আকারের জটিল সংখ্যার মডুলাস,

$|z| = r=\sqrt{\frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2)\ldots}{(x_4^2+y_4^2)(x_5^2+y_5^2)(x_6^2+y_6^2)\ldots\ldots}}$

(b) $z=x+iy$ হলে আর্গুমেন্ট $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(c) $z^n=(x+iy)^n$ হলে আর্গুমেন্ট হবে $n\theta = n\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(d) $\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$ আকারের জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট,

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_1x_2 + y_1y_2}\right) = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} - \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2}$

(e) $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$ আকারের জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট,

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_1x_2 - y_1y_2}\right) = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1} + \tan^{-1}\frac{y_2}{x_2}$

Ex-01 $-1+\sqrt{3}\,i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

Sol^n: $-1+\sqrt{3}\,i$ এর মডুলাস $= \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

$-1+\sqrt{3}\,i$ এর আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$ [কারণ x ঋণাত্মক এবং y ধনাত্মক]

Ans.

Ex-02 $\frac{i}{1-i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{i+i^2}{1-i^2} = \frac{i-1}{2} = \frac{1}{2}(-1+i)$

$\therefore$ মডুলাস $= \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ **Ans.**

For practice:

01. $\frac{1-2i}{3-4i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{1}{\sqrt{5}}, \tan^{-1}\left(\frac{-2}{11}\right)$

02. $\frac{1+5i}{1-2i} + \frac{5-3i}{2+3i}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

Ans. $\frac{14}{\sqrt{65}}, \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$.

Type-02 : পোলার ও A + iB আকারে প্রকাশ সংক্রান্ত

দুটি জটিল সংখ্যা সমান হলে,

(i) $a+ib = c+id$ হলে, $a = c, b = d$

(ii) $\frac{a+ib}{c+id} = x+iy$ হলে, $x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ এবং $y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Ex-01 $(\sqrt{3}+i)^{10}$ কে পোলার আকৃতিতে প্রকাশ কর।

Sol^n: $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\therefore (\sqrt{3}+i)^{10} = \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right)$

[By De Moivre's Formula]

$= 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **Ans.**

Ex-02 $\frac{5-i}{2-3i} = A+iB$ হলে, A ও B এর মান কত?

Sol^n: $A+iB = \frac{5-i}{2-3i} = 1+i$

$\therefore A = 1$ ও $B = 1$ **Ans.**

For practice:

01. $\frac{2+3i}{4-5i} = A+iB$ হলে A ও B-এর মান কত? **Ans:** A = ...

02. $-1+i\sqrt{3}$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর। **Ans:** $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right.$ ...

Type-03 : বিভিন্ন প্রকার মূল নির্ণয়-

❑ বর্গমূল বের করার নিয়ম:

➤ i যুক্ত পদটিকে 2ab আকারে নিতে হবে যেন $a^2 - b^2 =$ বাস্তব ...

➤ বাস্তব অংশ ধনাত্মক হলে ছোটটির সাথে i নিতে হবে ... ঋণাত্মক হলে বড়টির সাথে i নিতে হবে।

➤ সূত্রের মাঝখানের চিহ্নটি প্রদত্ত জটিল সংখ্যার i যুক্ত পদটির পূর্বে ...

Technic 01 Z = x + iy হলে,

$\sqrt{x \pm iy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^{\frac{1}{2}} \pm i\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$

Technic 02 পরীক্ষা নিরীক্ষা পদ্ধতি: অবাস্তব অংশকে 2 দ্বারা ভাগ করে ... তা থেকে এমন দুইটি উৎপাদক তৈরী কর যাদের বর্গের অন্তর ...

যেমন: $-7+24i$ এর বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $\frac{24}{2} = 12 = 3\times4$

এখন, $3^2 - 4^2 = -7$

$\therefore \sqrt{-7+24i} = \sqrt{3^2+2.3.4i+(4i)^2} = \sqrt{(3+4i)^2} = \pm(3+4i)$

Ex-01 $2x+i(x^2-1)$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। (For M.C.Q)

Sol^n: প্রথম অংশ $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(2x)^2+(x^2-1)^2}+2x\right\}} = \pm$ ...

দ্বিতীয় অংশ $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(2x)^2+(x^2-1)^2}-2x\right\}} = \pm$ ...

$\therefore 2x+i(x^2-1)$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{(x+1)+i(x-1)\}$

> **Note:** a + ib হলে- প্রথম অংশ $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$
>
> দ্বিতীয় অংশ $= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$
>
> $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm$ (প্রথম অংশ +i দ্বিতীয় অংশ)

Technique:

i. $\sqrt[3]{-n^3} = -n, -n\omega, -n\omega^2$ [যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2 =$ ...

ii. $\sqrt[4]{-n^2} = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1\pm i)$

iii. $\sqrt[6]{-n^3} = \pm\sqrt{-n}, \pm\sqrt{-n\omega}, \pm\sqrt{-n\omega^2} = \pm\sqrt{n}i, \pm\sqrt{n}$ ...

[MCQ-এর জন্য গুরুত্বপূর্ণ].

Ex-02 $\sqrt[3]{i}$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি $x = \sqrt[3]{i}$

$x^3 = i = -i^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{i}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{x}{-i} = \sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$

$\therefore x = -i, -i\omega, -i\omega^2 = -i, -i\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right), -i\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

$= -i, \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$

…practice

$\ldots a^2 - 4}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

… $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{\sqrt{a+2} + i\sqrt{a-2}\right\}$

… নির্ণয় কর: $7 - 30\sqrt{-2}$ **Ans.** $\pm(5 - i3\sqrt{2})$

Joykoly Technic

বর্গমূল সংক্রান্ত শর্টকার্ট

$\ldots, \sqrt[4]{-81}, \sqrt[4]{-144}, \sqrt[4]{-169}$

… উত্তরের অপশনে সর্বদা $\pm(1 \pm i)$ থাকে।

… এর সাথে সহগ রূপে যা থাকবে তার জন্য ভেতরের সংখ্যা ধনাত্মক … বর্গমূল, এরপর 2 দিয়ে ভাগ, এরপর আবার বর্গমূল করলে যা পাওয়া … Add করে মিলিয়ে নিতে হবে। যেমন- $\sqrt[4]{-81}$ এর জন্য

$\ldots = 9 \rightarrow \frac{9}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \therefore \sqrt[4]{-81} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

$\ldots \rightarrow \sqrt{144} = 12 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \sqrt{6} \therefore \sqrt[4]{144} = \sqrt{6}(1 \pm i)$

$\ldots \rightarrow \sqrt{16} = 4 \rightarrow \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \sqrt{2} \therefore \sqrt[4]{-16} = +\sqrt{2}(1 \pm i)$

$\ldots \rightarrow \sqrt{169} = 13 \rightarrow \frac{13}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{13}{2}}$ or $\frac{\sqrt{26}}{2}$ **Ans.**

… $\pm 24i$ এই টাইপের বর্গমূল নির্ণয়:

… অবাস্তব অংশকে 2ab format এ নিয়ে যাই। $24i = 2 \times 4i \times 3$ এবং $\ldots = -7$ তাহলে উত্তর হবে $\pm(4i + 3)$

↓

… হবে কারণ অবাস্তব অংশের চিহ্ন +, আর − থাকলে − হবে।

… বড় সংখ্যাটি 4, i এর সহগ হয়েছে। + 7 থাকলে 3 অংকটি, i … হত)

Type-04 : শর্ত সাপেক্ষ প্রমাণ-

$\ldots x = \frac{a+ib}{a-ib}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2)x^2 + (a^2+b^2) = 2(a^2-b^2)x$

$\frac{x+1}{x-1} = \frac{a}{ib} \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{a^2}{-b^2}$

$\ldots(x^2-2x+1) = -b^2(x^2+2x+1)$

$\ldots(a^2+b^2)x^2 + (a^2+b^2) = 2(a^2-b^2)x$ **(Proved)**

$\ldots(2+i)x = 1$ হলে, $25x^4-95x^3+61x^2-3x+10$ এর মান নির্ণয় কর।

$\ldots x = 1 \Rightarrow 2x-1 = -ix \Rightarrow 4x^2-4x+1 = -x^2$

$\ldots 5x^2-4x+1 = 0$

$\ldots 25x^4-95x^3+61x^2-3x+10$

$= 5x^2(5x^2-4x+1)-15x(5x^2-4x+1)-4x^2+12x+10$

$= -(5x^2-4x+1) + x^2+8x+11 = x^2+8x+11$

$= \frac{4x-1}{5} + 8x + 11$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{5}(44x+54) = \frac{2}{5}(22x+27) = \frac{2}{5}\left(22\times\frac{1}{2+i}+27\right)$

$= \frac{2}{5}\left(\frac{22(2-i)}{5} + 27\right) = \frac{2}{25}(179 - 22i)$ **Ans.**

Ex-03 $x = -1 + i\sqrt{2}$ হলে দেখাও যে, $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9 = 12$

Sol^n: $(x+1) = i\sqrt{2} \Rightarrow (x+1)^2 = -2$

$\therefore x^2 + 2x + 3 = 0$

$L.H.S = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$

$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 6x - x^2 - 2x - 3 + 12$

$= x^2(x^2 + 2x + 3) + 2x(x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x + 3) + 12$

$= 12 = R.H.S$ **(Showed)**

Ex-04 $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{-------} + a_nx^n$ হলে দেখাও যে,

$(a_0 - a_2 + a_4 \text{----})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 \text{----})^2 = a_0 + a_1 + a_2 + \text{-----} + a_n$

Sol^n: $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \text{------} + a_nx^n$

$x = 1$ হলে, $(1+1)^n = 2^n = a_0 + a_1 + a_2 + \text{------} + a_n$ — (1)

$x = i$ হলে, $(1+i)^n = a_0 + ia_1 - a_2 - ia_3 + a_4 + \text{--------}$

$\Rightarrow (1+i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \text{-----}) + i(a_1 - a_3 + a_5 - \text{-----})$ — (2)

$x = -i$ হলে,

$(1-i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \text{-----}) - i(a_1 - a_3 + a_5 - \text{-----})$ — (3)

(2) × (3) হতে পাই,

$(1+i)^n.(1-i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \text{-----})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \text{----})^2$

$\Rightarrow (1^2 - i^2)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \text{-----})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \text{-----})^2$

$\Rightarrow 2^n = (a_0 - a_2 + a_4 \text{----})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 \text{----})^2$

$\therefore a_0 + a_1 + a_2 + \text{----} + a_n = (a_0 - a_2 + a_4 \text{----})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 \text{----})^2$

[(i) নং হতে] **(Showed)**

For practice:

01. $(1+i)x = 1$ হলে $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x + 2$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $2-i$

Type-05 : ω সম্পর্কিত-

Ex-01 যদি $(a\omega^2+b+c\omega)^3 + (a\omega+b+c\omega^2)^3 = 0$ হয় তবে দেখাও যে,

$a = \frac{1}{2}(b+c)$ বা $b = \frac{1}{2}(c+a)$ বা $c = \frac{1}{2}(a+b)$

Sol^n: ধরি, $x = a\omega^2 + b + c\omega$; $y = a\omega + b + c\omega^2$

$\therefore x + y = 2b - a - c,\ x + \omega y = (2a - b - c)\omega^2$

এবং $x + \omega^2 y = 2c - a - b$

এখন $x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$

$\Rightarrow (x+y)\{x^2 + (\omega + \omega^2)xy + y^2\} = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y) = 0$

$\Rightarrow (2b - a - c)(2a - b - c)(2c - a - b) = 0$

$\therefore 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$ বা $2a - b - c = 0 \Rightarrow a = \frac{b+c}{2}$

বা $2c - a - b = 0 \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$ **(Showed)**

Ex-02 $\log_e(1 - x + x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots..$ হলে দেখাও যে,

$a_3 + a_6 + a_9 + \ldots.. = \frac{2}{3}\log_e 2$

Sol^n: $x = 1, \omega, \omega^2$ বসাই, $\log_e 1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots..(i)$

$\log_e(1-\omega+\omega^2) = a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + a_5\omega^5 + a_6\omega^6 + \ldots....(ii)$

$\log_e(1-\omega^2+\omega^4) = a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 + a_5\omega^{10} + a_6\omega^{12} + \ldots..(iii)$

$(i) + (ii) + (iii) \Rightarrow$

$0 + \log_e(-2\omega) + \log_e(-2\omega^2) = a_1(1+\omega+\omega^2) + a_2(1+\omega+\omega^2)$

$+ a_3(1+1+1) + a_4(1+\omega+\omega^2) + a_5(1+\omega+\omega^2) + a_6(1+1+1) + \ldots + a_9(1+1+1) + \ldots$

$\Rightarrow 3(a_3 + a_6 + a_9 + \ldots\ldots..) = \log_e\{(-2\omega)(-2\omega^2)\} = \log_e 4$

$\therefore a_3 + a_6 + a_9 + \ldots.... = \frac{2}{3}\log_e 2$ **(Showed)**

Ex-03 দেখাও যে, $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16}) = 16$

Sol^n: $L.H.S = (1+\omega+\omega^2-2\omega)(1+\omega+\omega^2-2\omega^2)(1+\omega+\omega^2-2\omega)$
$(1+\omega+\omega^2-2\omega^2) = (-2\omega)\times(-2\omega^2)\times(-2\omega)\times(-2\omega^2)$
$= 16 = R.H.S$ **(Showed)**

Ex-04 দেখাও যে, $\sqrt{[-1-\sqrt{\{-1-\sqrt{(-1-----)}\}}]} = \omega$ বা ω^2

Sol^n: ধরি, $\sqrt{[-1-\sqrt{\{-1-\sqrt{(-1-----)}\}}]} = x$
$\Rightarrow -1-1\sqrt{\{-1-\sqrt{-1-----}\}} = x^2 \Rightarrow -1-x = x^2$
$\Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ $\therefore x = \omega$ বা ω^2 **(Showed)**

For practice:

01. এককের একটি ঘনমূল ω হলে দেখাও যে,
$(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2 = 6xy$
02. এককের একটি ঘনমূল ω হলে দেখাও যে,
$(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4 = 16$

Type-06 : সঞ্চারপথ নির্ণয় সংক্রান্ত-

Ex-01 $z = x+iy$ হয় তবে $|z-3| = 4$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

Sol^n: $|z-3| = 4 \Rightarrow |x+iy-3| = 4 \Rightarrow |(x-3)+iy| = 4$
$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 4 \Rightarrow (x-3)^2+y^2 = 4^2$
ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র (3,0) এবং ব্যাসার্ধ 4। **Ans.**

Ex-02 আর্গন্ড চিত্রে জটিল সংখ্যা z, iz, z + iz দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: $z = x+iy = (x,y)$ $\therefore iz = i(x+iy) = ix-y = -y+ix = (-y,x)$
$\therefore z+iz = x+iy+ix-y = x-y+i(x+y) = (x-y, x+y)$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -y & x & 1 \\ x-y & x+y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(y^2+x^2)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2}|z|^2$ বর্গ একক **Ans.**

Type-07 : বিবিধ সমস্যাবলি-

Ex-01 $z = x+iy$ ও $\arg\left(\frac{z-2}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-x-2 = 0$

Sol^n: $\arg\left(\frac{z-2}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg\left(\frac{x+iy-2}{x+iy+1}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \arg\{(x-2)+iy\} - \arg\{(x+1)+iy\} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x-2} - \tan^{-1}\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{\frac{y}{x-2}-\frac{y}{x+1}}{1+\frac{y}{x-2}\frac{y}{x+1}} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{y(x+1)-y(x-2)}{(x+1)(x-2)+y^2} = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$

$\therefore (x+1)(x-2)+y^2 = 0$ $\therefore x^2+y^2-x-2 = 0$ **(Proved)**

Ex-02 উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3+y^3+z^3-3xyz$

Sol^n: $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
এখন, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$
$= x^2+\omega^3y^2+\omega^3z^2+(\omega+\omega^2)xy+(\omega^2+\omega^4)yz+(\omega+\omega^2)zx$
$= x(x+\omega y+\omega^2z)+\omega^2y(x+\omega y+\omega^2z)+\omega z(x+\omega y+\omega^2z)$
$= (x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$

Ans. $(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$

Ex-04 $(3+4i)^{-\frac{1}{2}}+(3-4i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$ প্রমাণ কর।

Sol^n: ধরি, $z = (3+4i)^{-\frac{1}{2}}+(3-4i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$

$\therefore z^2 = \left\{(3+4i)^{-\frac{1}{2}}+(3-4i)^{-\frac{1}{2}}\right\}^2$ [বর্গ করতে হবে]

$\Rightarrow z^2 = (3+4i)^{-1}+(3-4i)^{-1}+\frac{2}{\sqrt{(3+4i)(3-4i)}}$

$\Rightarrow z^2 = \frac{1}{3+4i}+\frac{1}{3-4i}+\frac{2}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow z^2 = \frac{6}{25}+\frac{2}{5}$

$\Rightarrow z^2 = \frac{16}{25}$ $\therefore z = \frac{4}{5}$

Ex-05 (x,y) বাস্তব এবং $3+ix^2y$ ও x^2+y+4i পরস্পর অনু[illegible]
x,y নির্ণয় কর।

Sol^n: $3+x^2y$ এবং x^2+y+4i পরস্পর অনুবন্ধী হলে x^2+y [illegible]
এবং $x^2y = -4$ .... (ii)
সুতরাং x^2 এবং y দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণ
$t^2-(x^2+y)t+x^2y = 0$
$\Rightarrow t^2-3t-4 = 0$ $\therefore t = 4, -1$
যেহেতু $x^2 > 0$ সুতরাং $x^2 = 4$ এবং $y = -1$
অর্থাৎ $x = \pm 2$ এবং $y = -1$

Ex-06 যদি a ও b বাস্তব মানের জন্য $a^2+b^2 = 1$ হয় [illegible]
$\frac{1-ix}{1+ix} = a-ib$ এর একটি মূল বাস্তব হবে।

Sol^n: $\frac{1-ix}{1+ix} = a-ib$

$\Rightarrow ix = \frac{1-a+ib}{1+a-ib} \Rightarrow ix = \frac{(1-a+ib)(1+a+ib)}{(1+a-ib)(1+a+ib)}$

$\Rightarrow ix = \frac{(1+ib)^2-a^2}{(1+a)^2-i^2b^2} \Rightarrow ix = \frac{2ib}{2+2a}$ [$\because a^2+$ [illegible]

$\therefore x = \frac{b}{1+a}$ যা বাস্তব

Ex-07 $x+iy = \frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ হলে দেখাও যে, x^2+y^2 [illegible]

Sol^n: $x+iy = \frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$

$\Rightarrow x-2+iy = \frac{3}{2+\cos\theta+i\sin\theta}-2$

$\Rightarrow x-2+iy = -\frac{1+2\cos\theta+2i\sin\theta}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$

$\Rightarrow |x-2+iy| = \left|\frac{1+2\cos\theta+2i\sin\theta}{2+\cos\theta+i\sin\theta}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \frac{|1+2\cos\theta+2i\sin\theta|}{|2+\cos\theta+i\sin\theta|}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \frac{\sqrt{(1+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}}{\sqrt{(2+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \frac{1+4\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}{4+4\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x+4 = \frac{5+4\cos\theta}{5+4\cos\theta} = 1$

$\therefore x^2+y^2 = 4x-3$

...দেখাও যে, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

...$y = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow dy = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$

...$= i(\cos\theta + i\sin\theta)\, d\theta = iy d\theta \Rightarrow \frac{dy}{y} = i\, d\theta$

...$\int\frac{dy}{y} = \int i d\theta \Rightarrow \ln y = i\theta + C$, যখন θ=0, y=1 তখন C=0

...$= i\theta \Rightarrow y = e^{i\theta}$ ∴ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **(showed)**

...$\ln(-1+\sqrt{3}\, i)$-এর মান A + iB আকারে প্রকাশ কর।

...$\ln(-1+\sqrt{3}\, i) = \ln\left[\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\right] + i\left[2n\pi + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)\right]$

...$+ i\left(2n\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \ln 2 + i\,(3n+1)\frac{2\pi}{3}$, n ∈ Z **Ans.**

...-এর মান বের কর।

...$\ln(i) = \ln(\sqrt{0^2+1^2}) + i\left(2n\pi + \tan^{-1}\frac{1}{0}\right) = i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

...$= e^{i\ln(i)} = e^{i\left[i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]} = e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}}$, n ∈ Z **Ans.**

...practice:

... বাস্তব এবং $y^2x - 5i$ ও $4 + i(x^2+y^2)$ পরস্পর অনুবন্ধী হলে ... নির্ণয় কর। **Ans.** x = 1; y = ± 2

...$^2 + (1-2i)^3$ এর মডুলাস নির্ণয় কর। **Ans.** $\sqrt{3370}$

... এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $-2i^{n+1}$

...$(... + 5\sqrt{-1})$ হলে $2x^3 + 2x^2 - 7x + 72$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans: 4**

...$(... - i)$ -এর মান A + iB আকারে প্রকাশ কর। **Ans:** $\ln 2 + i\,(12n-5)\frac{\pi}{6}$, n ∈ Z

... -এর মান বের কর। **Ans:** $e^{\frac{(4n-1)\pi}{2}}$, n ∈ Z

...$(\cos\theta + i\sin\theta)$-এর মান A + iB আকারে প্রকাশ কর। **Ans:** $n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$, n ∈ Z

...ET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. ...$re^{i\theta} = \frac{3+2i}{2+3i} + \frac{1+5i}{1-2i}$, তবে r ও θ এর মান নির্ণয় কর। [17-18]

Solve $re^{i\theta} = \frac{3+2i}{2+3i} + \frac{1+5i}{1-2i} = \frac{(3+2i)(1-2i)+(1+5i)(2+3i)}{(2+3i)(1-2i)}$

$\Rightarrow re^{i\theta} = \frac{-6+9i}{8-i} = \frac{(-6+9i)(8+i)}{(8-i)(8+i)}$

$\Rightarrow re^{i\theta} = \frac{-57+66i}{65}$ [এখানে r = মডুলাস এবং θ = মুখ্য আর্গুমেন্ট]

$\therefore r = \left|\frac{-57+66i}{65}\right| = \frac{\sqrt{57^2+66^2}}{65} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

এবং $\theta = \pi - \tan^{-1}\frac{66}{57} = \pi - \tan^{-1}\frac{22}{19}$ **Ans.**

02. $\frac{1+2i}{1-3i}$ কে $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আকারে প্রকাশ কর। [16-17]

Solve $r = \left|\frac{1+2i}{1-3i}\right| = \frac{|1+2i|}{|1-3i|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \arg\left(\frac{1+2i}{1-3i}\right) = \arg(1+2i) - \arg(1-3i)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-3}{1}\right) = \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$

$= \pi - \tan^{-1}\frac{2+3}{1-2\times3} = \pi - \tan^{-1}1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore \frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **Ans.**

03. যদি $x_1 : x_2 = (a+ib) : (c+id)$ হয়, প্রমাণ কর যে, $(c^2+d^2)x_1^2 - 2(ab+bd)\, x_1x_2 + (a^2+b^2)x_2^2 = 0$ [04-05]

Solve $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a+ib}{c+id}$

$\Rightarrow cx_1 + id\, x_1 = ax_2 + ibx_2 \Rightarrow (x_1c - x_2a) = i(bx_2 - dx_1)$

$\Rightarrow (x_1c - x_2a)^2 = i^2(bx_2 - dx_1)^2$ $[i^2 = -1]$

$\Rightarrow x_1^2c^2 - 2x_1x_2ac + x_2^2a^2 = -b^2x_2^2 + 2bdx_1x_2 - d^2x_1^2$

$\Rightarrow (c^2+d^2)x_1^2 - 2(ac+bd)x_1x_2 + (a^2+b^2)x_2^2 = 0$ **(Proved)**

04. যদি $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt[3]{a-ib} = x - iy$ [03-04, CUET: 07-08; RUET : 07-08, 03-04]

Solve $\sqrt[3]{(a+ib)} = x + iy \Rightarrow a + ib = x^3 - iy^3 + 3x^2iy - 3xy^2$

$= (x^3 - 3y^2x) + i(3x^2y - y^3)$ ∴ $a = x^3 - 3xy^2$, $b = 3x^2y - y^3$

$\therefore a - ib = (x^3 - 3xy^2) - i(3x^2y - y^3)$

$= x^3 - 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 - (iy)^3 = (x - iy)^3$

$\therefore \sqrt[3]{a-ib} = x - iy$ **(Showed)**

05. যদি $x = 2 + \sqrt{-3}$ হয়, তবে $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$ এর মান নির্ণয় কর। [01-02]

Solve $x = 2 + i\sqrt{3} \Rightarrow (x-2) = i\sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2 = -3$

$\therefore x^2 - 4x + 7 = 0$

Now, $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$

$= (3x^4 - 12x^3 + 21x^2) - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 5$

$= 3x^2(x^2 - 4x + 7) - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 5$

$= 3x^2 \times 0 - 5x(x^2 - 4x + 7) + 5 = 5$ **Ans.**

06. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \sqrt{2}$

[13-14, 12-13, 99-00; RUET : 12-13; KUET : 08-09; 06-07]

Solve LHS $= \sqrt{i} + \sqrt{-i}$

$= \sqrt{(\sqrt{i} + \sqrt{-i})^2} = \sqrt{i + 2\sqrt{-i^2} + (-i)} = \sqrt{2} =$ RHS **(Proved)**

07. $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হলে, প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

[05-06;RUET:11-12,08-09,06-07;; KUET : 06-07]

Solve $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 - iy^3$

$\Rightarrow a + ib = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3).i$

$\therefore a = x(x^2 - 3y^2) \Rightarrow \frac{a}{x} = x^2 - 3y^2$

এবং $b = y(3x^2 - y^2) \Rightarrow \frac{b}{y} = 3x^2 - y^2$

$\therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4x^2 - 4y^2 \ \therefore 4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ **(Proved)**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\sqrt[6]{-64}$ এর মান নির্ণয় কর। **[03-04; CUET : 15-16]**

Solve ধরি, $x = \sqrt[6]{-64}$

$\Rightarrow x^6 + 64 = 0 \Rightarrow (x^3)^2 - (8i)^2 = 0 \Rightarrow (x^3 - 8i)(x^3 + 8i) = 0$

$\Rightarrow x^3 = 8i \Rightarrow \left(\frac{x}{-2i}\right)^3 = 1^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{-2i}\right) = 1, \omega, \omega^2$

$= 1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i) \ \therefore x = -2i, (i \pm \sqrt{3})$

আবার, $x^3 = -8i = 8i^3$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{2i}\right)^3 = 1^3 \Rightarrow \frac{x}{2i} = 1, \omega, \omega^2 = 1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}) = 2i, (-i \pm \sqrt{3})$

$\therefore x = \pm 2i, \pm i \pm \sqrt{3}$ **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. বর্গমূল নির্ণয় কর: $\cos\theta + i\sin\theta, i = \sqrt{-1}$ **[15-16]**

Solve ধরি, $x + iy = \sqrt{\cos\theta + i\sin\theta}$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \cos\theta + i\sin\theta$

এখন, $x^2 - y^2 = \cos\theta; 2xy = \sin\theta;$

$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \ \therefore x^2 + y^2 = 1$

$\therefore 2x^2 = 1 + \cos\theta \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) \ \therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos\theta}$

এবং $2y^2 = 1 - \cos\theta \ \therefore y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos\theta}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1 + \cos\theta} + i\sqrt{1 - \cos\theta}\right\} = \pm\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ **Ans.**

02. বর্গমূল নির্ণয় কর: $2 + i\sqrt{a^2 - 4}$ **[11-12]**

Solve $\sqrt{2 + i\sqrt{a^2 - 4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4 + 4i\sqrt{(a-2)(a+2)}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(\sqrt{a+2})(i\sqrt{a-2}) + (a+2) - (a-2)}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{a+2})^2 + 2\sqrt{a+2}\,i\sqrt{a-2} + (i\sqrt{a-2})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{a+2} + i\sqrt{a-2})^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a+2} + i\sqrt{a-2})$ **Ans.**

03. মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর: $-\sqrt{3} + i$ **[11-12]**

Solve মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{(-\sqrt{3})} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ **Ans.**

04. নিচের জটিল সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। $1 + \sqrt{3}i$

[06-07,10-11]

Solve $1 + i\sqrt{3}$

$\therefore$ মডুলাস, $r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$

এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

05. মান নির্ণয় কর: $\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}$ **[05-06]**

Solve ধরি, $x_1^3 = i$

$\Rightarrow x_1^3 + i^3 = 0$

$\Rightarrow (x_1 + i)(x_1^2 - ix_1 + i^2) = 0$

$\therefore x_1 = -i, \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}$

আবার, $x = \sqrt[3]{-i} \Rightarrow x^3 - i^3 = 0$

$\therefore (x - i)(x^2 + ix + i^2) = 0$

$\therefore x = i, \frac{-i \pm \sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i} = 0$

06. a) 4+3i জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

[04-05; RUET: 12-13]

Solve মডুলাস, $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

b) $r(1-r) = 1$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর $z_1^3 + z_2^3 = -2$ **[04-05]**

Solve দেওয়া আছে, $r(1 - r) = 1 \Rightarrow r - r^2 = 1$

$\Rightarrow r^2 - r + 1 = 0$ ....(i) $\qquad \therefore z_1 + z_2 = 1$... (ii)

এবং $z_1z_2 = 1$ .... (iii)

এখন, $z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1z_2(z_1 + z_2)$

$= 1 - 3 \times 1 \times 1 = -2 \ \therefore L.S = R.S$

07. a. মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর: $-4 - 3i$ **[03-04]**

Solve $-4 - 3i$

মডুলাস $= \sqrt{16 + 9} = 5$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-4}\right) = -\pi + \tan^{-1}\frac{3}{4}$

b. মান নির্ণয় কর: $\sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i +}}}$ ....অসীম পর্যন্ত **[03-04]**

Solve ধরি, $x = \sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i +}}}$ .....

$\Rightarrow x^2 = i + x$

$\Rightarrow x^2 - x - i = 0 \ \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4i}}{2}$

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে a^6 এর মান হবে- **[11-12]**

A. -1 B. i C. 1 D. $-i$

Ans D **Solve** $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}a = 1 + i$

$\Rightarrow 2a^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \ \therefore (a^2)^3 = i^3 \ \therefore a^6 = -i$

... ধনাত্মক সর্বনিম্ন অখণ্ড মান বের কর যার জন্য $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ [10-11]

B. 3 C. 6 D. 4

Ans D Solve $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ বা, $\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right]^{\frac{n}{2}} = 1$

$\left[\frac{2i}{-2i}\right]^{\frac{n}{2}} = 1 \Rightarrow (-1)^{\frac{n}{2}} = 1$

$\frac{n}{2}$ এর মান জোড় হতে হবে। তাহলে n এর সর্বনিম্ন ধনাত্মক মান = 4

... −7 + 24i এর বর্গমূল হবে: [09-10]

... (3+4i) B. ± (3+4i) C. ±(3−4i) D. ± (−3−4i)

Ans B Solve $-7 + 24i = -7 + 2.4.3i$

$= 3^2 + 2.3.4i + (4i)^2 = (3 + 4i)^2$

বর্গমূল = ± (3+ 4i)

... এর মান কত? [08-09]

A. $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ B. $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm 2i)$ C. $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(2\pm i)$ D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i)$

Ans A Solve $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81i^2} = \sqrt{\pm 9i} = \frac{\pm 3}{\sqrt{2}}\sqrt{1 \pm 2i + i^2}$

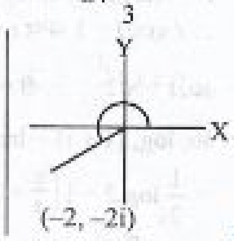
$= \pm\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{(1\pm i)^2} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

... −2 − 2i জটিল রাশিটির Argument নির্ণয় কর। [07-08]

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

Ans C Solve আর্গুমেন্ট: $\tan\theta = \frac{-2}{-2} = 1$

তৃতীয় কোয়ার্ডেন্টে বলে, $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$



... $-8-6\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল হবে- [07-08; RUET : 14-15]

A. ±(1 + 3i) B. ± (1 − 3i) C. 3 − i D. 3 + i

Ans B Solve $-8 - 6\sqrt{-1} = -8 - 6i$

$-8 - 6\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{-8-6i}$

$= \pm\sqrt{-9-2.3.i+1} = \pm\sqrt{1^2 - 2.3.i + (3i)^2} = \pm(1-3i)$

... i^{-49} এর মান- [06-07]

A. −1 B. i C. 1 D. −i

Ans D Solve $i^{-49} = \frac{1}{i^{49}} = \frac{1}{i.(i^2)^{24}} = \frac{1}{i(-1)^{24}} = \frac{1}{i} = \frac{-i^2}{i} = -i$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর? [17-18, 09-10]

A. $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$ B. ±(2 + 5i) C. ± (3+7i)

D. ±(9 + 11i) E. None of these

Ans A Solve $\frac{5+12i}{3-4i} = \frac{5+2.6i}{3-2.2i} = \frac{3^2+2.3.2i+(2i)^2}{2^2-2.2.i+i^2}$

$= \left(\frac{3+2i}{2-i}\right)^2 = \left\{\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right\}^2 = \left(\frac{4+7i}{5}\right)^2$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{4+7i}{5}$

02. − 625 এর চতুর্থ মূল কোনটি? [16-17]

A. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ B. $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(2i\pm i)$ C. $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(5\pm i)$

D. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3\pm 4i)$ E. $\pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

Ans E Solve $-625 = 625(\cos\pi + i\sin\pi)$

$\sqrt[4]{-625} = \pm\sqrt[4]{625}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)$

03. $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right|$ এর মান কোনটি? [13-14,11-12]

A. $\frac{\sqrt{34}}{5}$ B. $\frac{5\sqrt{65}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{9}$ D. $\frac{\sqrt{29}}{7}$ E. $\frac{\sqrt{39}}{11}$

Ans B Solve $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right| = \frac{|(2+i)^3|}{|2+3i|} = \frac{|2+i|^3}{|2+3i|}$

$= \frac{(\sqrt{2^2+1^2})^3}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{(\sqrt{5})^3}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{5}\sqrt{13}}{13} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$

04. $(2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i)$ -এর পোলার আকার হলো- [12-13]

A. $16\sqrt{3}e^{i\pi/2}$ B. $16\sqrt{3}e^{3i\pi/2}$ C. $16\sqrt{3}e^{i\pi/4}$

D. $16\sqrt{3}e^{3i\pi/4}$ E. $16\sqrt{3}e^{5i\pi/4}$

Ans A Solve $(2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i)$

$= -12 + 12\sqrt{3}\,i + 4\sqrt{3}\,i + 12 = 16\sqrt{3}\,i$

$= 16\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 16\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

05. $4-4\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল কোনটি? [10-11]

A. $\pm(2-\sqrt{-2})$

B. $\pm(4-\sqrt{-2})$

C. $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt{8}-2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]$

D. $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}} - (2-\sqrt{8})^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]$

E. $\pm\left[(\sqrt{6}+2)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt{6}-2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]$

Ans C Solve $4 - 4\sqrt{-1} = 4 - 4\sqrt{i^2} = 4 - 4i$

$r = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ ∴ a = 4

∴ বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{r+a} - i\sqrt{r-a}\right\}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{4\sqrt{2}+4} - i\sqrt{(4\sqrt{2}-4)}\right\}$

$= \pm\left\{\sqrt{\sqrt{8}+2} - i\sqrt{\sqrt{8}-2}\right\}$

06. $\sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{--}}}}$ এর মান কোনটি? [07-08]

A. 1 B. i C. $1 \pm i$

D. $-1 \pm i$ E. $\pm(1+\sqrt{2}\,i)$

Ans C Solve ধরি, $x = \sqrt{-2+2\sqrt{-2+2\sqrt{.....}}}$

$\Rightarrow x^2 = -2+2\sqrt{-2+2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x^2 = -2 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$\therefore x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4\times 2}}{2} = 1 \pm i$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $2i^2 + 6i^3 + 3i^{16} - 6i^{19} + 4i^{25}$ সমীকরণটি $x + iy$ পদ্ধতিতে লিখা হয়, তবে x ও y এর মান কত? [12-13]

A. 1, – 8 B. 1, 4

C. 1, 16 D. None

Ans B Solve $2i^2 + 6i^3 + 3i^{16} - 6i^{19} + 4i^{25}$

$= -2 - 6i + 3 + 6i + 4i = 1 + 4i = x + iy$

$\therefore x = 1, y = 4$

02. যদি $\sqrt{2p} = 1 + i$ হয়, তবে $p^6 + p^4 + p^2$ এর মান কত হবে? [12-13]

A. 1 B. –1

C. 0 D. None

Ans B Solve $\sqrt{2p} = 1 + i$

$\Rightarrow 2p = 2i$

$\Rightarrow p = i$

$\therefore p^6 + p^4 + p^2 = i^6 + i^4 + i^2$

$= -1 + 1 - 1 = -1$

03. যদি $a = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$ এবং $b = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right)$ হয়, তবে $a^4 + a^2b^2 + b^4$ এর মান কোনটি হবে? [11-12]

A. $-a+b = 0$ B. $a + b + 1 = 0$

C. $a - b + 1 = 0$ D. None of these

Ans B Solve $a^4 + a^2b^2 + b^4$ (Given, $a = \omega, b = \omega^2$)

$= \omega^4 + \omega^2\omega^4 + \omega^8$

$= \omega + 1 + \omega^2 = 0$

$\therefore a + 1 + b = 0$

04. i^{4n+3} এর মান হবে– [10-11]

A. i B. –i

C. –1 D. None

Ans B Solve $i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = -i$

05. যদি ω একটি কাল্পনিক মূল এবং $\omega^3 = 1$ হয়, তবে $(1+\omega-\omega^2)^3 - (1-\omega+\omega^2)^3$ মান হবে– [09-10]

A. $18\,\omega - 10\,\omega^2$ B. $16\,\omega^3$

C. 0 D. None of them

Ans C Solve $(1+\omega-\omega^2)^3 - (1-\omega+\omega^2)^3$

$= (-\omega^2-\omega^2)^3 - (-\omega-\omega)^3$

$(\because 1+\omega+\omega^2 = 0)$

$= (-8)\times 1 - (-8)\times 1 = 0$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $A = \dfrac{a+ia}{b-ic} + id$ সমীকরণে a, b, c ও d বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা শূন্যের চেয়ে বড়। $c > b$ হলে A এর আর্গুমেন্ট θ = ? [14-15]

A. $0 < \theta < 90°$ B. $90° < \theta < 180°$ C. $180° < \theta <$ ...

D. $270° < \theta < 260°$ E. $-90° < \theta < 0°$

Ans B Solve $A = \dfrac{a+ia}{b-ic} + id = \dfrac{a(1+i)(b+ic)}{(b-ic)(b+ic)} + id$

$= \dfrac{a(b-c)+i(b+c)}{b^2+c^2} + id = -\dfrac{a(c-b)}{b^2+c^2} + i\left(\dfrac{b+c}{b^2+c^2} + d\right)$

যেহেতু $c > b$ সুতরাং $-\dfrac{a(c-b)}{b^2+c^2} < 0$ এবং $\dfrac{b+c}{b^2+c^2} + d > 0$

$\therefore A = -\dfrac{a(c-b)}{b^2+c^2} + i\left(\dfrac{c+b}{b^2+c^2} + d\right)$ ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত

সুতরাং arg A = θ এর ব্যবধি $90° < \theta < 180°$।

02. $\log_e(1+i)$ এর সর্বাধিক সঠিক মান কোনটি? [14-15]

A. $\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{\pi}{4}i$ B. $2\log_e 2 + \frac{\pi}{4}i$ C. $\frac{1}{2}\log_e 2 - \frac{\pi}{4}$...

D. $\frac{1}{2}\log_e 2 + (2n + \frac{1}{4})\pi i$ where n is an integer

E. $\frac{1}{2}\log_e 2 + (n + \frac{1}{4})\pi i$ where n is an integer

Ans D Solve $\log_e(1+i) = u + iv$

$z = 1 + i = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2n\pi)}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1 + i$

$\therefore r\cos\theta = 1$ এবং $r\sin\theta = 1$

so, $r = \sqrt{2}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

so, $\log_e(1+i) = \ln r + i(\theta + 2n\pi)$

$= \frac{1}{2}\log_e 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + (2n + \frac{1}{4})\pi i.$

03. $8 + 4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [13-14]

A. $\pm(3-2i)$ B. $\pm(\sqrt{10}-\sqrt{2}i)$ C. $\pm(\sqrt{10}+$...

D. $\pm(3+2i)$ E. None

Ans C Solve $\sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 2\sqrt{10}.\sqrt{-2}+ ...}$

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)^2} = \pm(\sqrt{10}$...

04. $|x-1+iy| + |x+1+iy| = 4$ দ্বারা প্রকাশ করা যায় একটি বক্ররেখা...

A. $x^2 + y^2 = 7$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = x^2 +$...

D. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ E. None

Ans D Solve $|x-1+iy| + |x+1+iy| = 4$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} = 4$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4^2 + (x+1)^2 + y^2 - 2.4.\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\Rightarrow -4x - 16 = -8\sqrt{(x+1)^2+y^2} \Rightarrow (x+4)^2 = 4[(x+1)^2+y^2]$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$

$\Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

[illegible] $|x-iy|=5$ কার সমীকরণ? [11-12]

A. সরলরেখা B. অধিবৃত্ত C. পরাবৃত্ত

D. বৃত্ত E. উপবৃত্ত

Ans. D Solve $|x+iy|=5$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=5 \Rightarrow x^2+y^2=5^2$ বৃত্তের সমীকরণ।

[illegible] $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\ldots\ldots\infty}}}=?$ [11-12]

A. $-\sqrt{3}i$ B. $\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ C. $\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$

D. $\frac{1\pm\sqrt{11}}{2}$ E. None

Ans. C Solve $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\ldots\ldots\infty}}=x$

$\Rightarrow -3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\ldots\ldots\infty}}=x^2$

$\Rightarrow x^2+3=x$ বা, $x^2-x+3=0 \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$

[illegible] $\sqrt[3]{-i}$ এর মান কোনটি? [11-12]

A. $-i, \frac{1}{2}(i\pm\sqrt{3})$ B. $i, \frac{1}{2}(-i\pm\sqrt{3})$ C. $0, \frac{1}{2}(i\pm\sqrt{3})$

D. $0, \frac{1}{2}(-i\pm\sqrt{3})$ E. None

Ans. B Solve $\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{i^3}=x$

$\Rightarrow x^3=i^3 \therefore x=i, i\omega, i\omega^2=i, i\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)=i, \left(\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}\right)$

[illegible] $\sqrt[4]{-16}=?$ [10-11]

A. $\sqrt{2}$ B. $\pm(\sqrt{3}\pm i)$ C. $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

D. $\pm\sqrt{2}(1\pm i)$ E. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ans. D Solve $\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{(4i)^2}$

$=\sqrt{\pm 4i}=2\sqrt{\pm i}=2\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm i)^2}=\pm\sqrt{2}(1\pm i)$

[illegible] $=i$ হলে, $i+i^2+i^3+\ldots i^{23}=?$ [09-10]

A. [illegible] B. $-i$ C. -1

D. [illegible] E. 1

Ans. C Solve $i+i^2+i^3+i^4+\ldots\ldots+i^{23}$

$=i(1+i+i^2+\ldots\ldots i^{22})$

$=i\frac{(i)^{23}-1}{i-1}=i\frac{(-i-1)}{i-1}=\frac{-i^2-i}{i-1}=\frac{1-i}{-(1-i)}=-1$

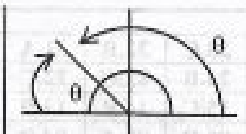
[illegible] এর আর্গুমেন্ট কত? [08-09]

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$

D. $-3\frac{\pi}{4}$ E. $\frac{5\pi}{4}$

Ans. B Solve $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)$

$=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$



SELF TEST: [Written]

01. α ও β একক এর কাল্পনিক ঘনমূল হলে দেখাও যে, $\alpha^4+\beta^4+\alpha^{-1}\beta^{-1}=0$

02. প্রমাণ কর যে, $\left[\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right)\right]^n+\left[\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right)\right]^n=2$ যখন n, 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং $=-1$ যখন n অন্য কোন পূর্ণ সংখ্যা হয়।

03. এককের কাল্পনিক ঘনমূল $1, \omega, \omega^2$ হলে $(x-1)^3+8=0$ এর মূল নির্ণয় কর। **Ans.** $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$

04. $|z-8|+|z+8|=20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

05. দেখাও যে, $\left|\frac{x-iy}{x+iy}\right|=1$

06. $x+y+z=0$ হয় এবং ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হয় তবে দেখাও যে, $(x+y\omega+z\omega^2)^3+(x+y\omega^2+z\omega)^3=27xyz$

07. $(1+x+x^2)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots..+p_{2n}x^{2n}$ হয় তবে দেখাও যে, $p_0+p_3+p_6+\ldots..=3^{n-1}$

08. $a^2+a+1=0$ হয় তবে দেখাও যে, $x^3-1=(x-1)(x-a)(x-a^2)$

09. x, y এর এরূপ বাস্তব মান নির্ণয় কর যে, $\frac{(1+i)x-2i}{3+i}+\frac{(2-3i)y+i}{3-i}=i$ **Ans.** $x=3, y=-1$

10. x, y বাস্তব, $z=x+iy$ এবং $\frac{z-i}{z-1}=ib$ হলে দেখাও যে, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

11. $\sqrt[4]{-169}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $\pm\frac{\sqrt{26}}{2}(1\pm i)$

12. $x+iy=\frac{2}{3+\cos\theta+i\sin\theta}$ হলে দেখাও যে, $2x^2+2y^2=3x-1$

SELF TEST: [MCQ]

01. ib এর আর্গুমেন্ট কত?

A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

02. $1+\omega^{19999}+\omega^{15557}=?$

A. 0 B. 1 C. -1 D. 2

03. $\frac{5+i}{3-2i}$ **এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কত?**

A. $\sqrt{3}$ ও $\frac{\pi}{4}$ B. $\sqrt{2}$ ও $\frac{\pi}{4}$

C. $\sqrt{5}$ ও $\frac{\pi}{3}$ D. $\sqrt{6}$ ও $\frac{\pi}{2}$

04. $1-\frac{i}{1-\frac{1}{1+i}}$ **এর আর্গুমেন্ট কত?**

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

05. i এর বর্গমূল কত?

A. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ B. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$
C. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(2-i)$

06. $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) = ?$

A. 10 B. 8 C. 7 D. 9

07. $i^2 = -1$ হলে $i^{3597} = ?$

A. $-i$ B. 1 C. -1 D. i

08. $i^2 = -1$ হলে $\sum_{n=1}^{400} i^n = ?$

A. 100 B. 50 C. 0 D. -100

09. $(\cos\theta + i\sin\theta)^{20}$ এর মান কোনটি?

A. $\cos 20\theta + i\sin 20\theta$ B. $\cos 20\theta - i\sin 20\theta$
C. $\sin 20\theta - i\cos 20\theta$ D. $\cos 20\theta + \sin 20\theta$

10. $x = 3 + 2i$; $y = 3 - 2i$ হলে $x^2 + xy + y^2 = ?$

A. 20 B. 21 C. 22 D. 23

11. $(1-i)^{-2} - (1+i)^{-2} = ?$

A. 1 B. -1 C. $-i$ D. i

12. $-1-\sqrt{3}\,i$ এর আর্গুমেন্ট কত?

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

13. $\frac{2+i}{2+3i} = A + iB$ হলে, $A^2 + B^2 = ?$

A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{13}{5}$ D. $\frac{6}{13}$

14. $\frac{1}{1+i}$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা–

A. $\frac{1}{2}(i-1)$ B. $\frac{1}{2}(1+i)$ C. $\frac{1}{2}(1-i)$ D. None

15. $[(1+\omega-\omega^2)(\omega+\omega^2-1)(\omega^2+1-\omega)]^2 = ?$

A. 8 B. -8 C. 64 D. -64

16. $\sqrt{-x}\,\sqrt{-y} = ?$

A. $\sqrt{xy}$ B. $-\sqrt{xy}$ C. $\sqrt{-xy}$ D. none

17. $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^6 = ?$

A. 721 B. 279
C. 729 D. 829

18. $\left(-1+\sqrt{-3}\right)^4 + \left(-1-\sqrt{-3}\right)^4$ এর মান কত?

A. -12 B. -16
C. -8 D. -20

19. $iz^3+2z^2+2z+1=0$ হলে, $|z| = ?$

A. 0 B. 2
C. 1 D. 4

20. A= 7i; B=4+9i; C=6+5i; D= 2+3i; ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক-

A. 600 B. 400 C. 300 D. 100

21. $x+iy = (u+iv)^n$; $n \in N$ $x^2+y^2 = ?$

A. $(\sqrt{u^2+v^2})^n$ B. $(u^2+v^2)^n$
C. $(u^2+v^2)^{n-1}$ D. None

22. $x = -1 + i$ হলে $x^3 + 3x^2 + 4x + 7$ এর মান-

A. $6 + i$ B. 8
C. 5 D. $9 + 2i$

23. $\frac{1}{\omega^{2009}} = ?$

A. ω^2 B. 1 C. ω D. all

24. $\sqrt{i} - \sqrt{-i} = ?$

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}\,i$
C. $-\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}\,i$

25. -729 এর ষষ্ঠ মূল কত?

A. $\pm 2\omega^2 i$ B. $\pm 3\omega^2$
C. $\pm 3\omega$ D. $\pm 3i\omega$

26. $Z = \sqrt{3} + i$ হলে $|\arg z| + |\arg \bar{z}|$ সমান–

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. 0

27. n যদি 3 এর গুণিতক হয়, তবে $1 + \omega^n + \omega^{2n} = ?$

A. 1 B. -1
C. 0 D. 3

28. $(1+i)^5 \times (1-i)^5$ এর মান–

A. -8 B. 8
C. 16 D. 32

29. b^3 এর তিনটি ঘনমূল হল–

A. b, b^2, b^3 B. $b, b\omega, b\omega^3$
C. $1, \omega, \omega^2$ D. $b, \pm bi$

30. $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^2 = ?$

A. i B. 2i C. $1 - i$ D. $1 - 2i$

31. z একটি জটিল সংখ্যা হলে $|z - (2 + 3i)| = 4$ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?

A. (2, 3) B. (–2, 3)
C. (2, 3) D. (–2, –3)

32. $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + \ldots\ldots$ ধারার প্রথম 100 পদের সমষ্টি কত?

A. i B. 0 C. $\frac{1}{i(1+i)}$ D. $\frac{1}{i}$

33. $a + ib = 0$ হলে, $a^7 + a^6b^6 + b^7 = ?$

A. 22 B. 37 C. 0 D. 1

34. If α is a complex number such that $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, then ...

A. α B. α^2
C. 0 D. 1

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	19. ⒶⒷⒸⒹ	28. Ⓐ
02. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	20. ⒶⒷⒸⒹ	29. Ⓐ
03. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	21. ⒶⒷⒸⒹ	30. Ⓐ
04. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	22. ⒶⒷⒸⒹ	31. Ⓐ
05. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	23. ⒶⒷⒸⒹ	32. Ⓐ
06. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ	24. ⒶⒷⒸⒹ	33. Ⓐ
07. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷⒸⒹ	34. Ⓐ
08. ⒶⒷⒸⒹ	17. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷⒸⒹ	
09. ⒶⒷⒸⒹ	18. ⒶⒷⒸⒹ	27. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

34.A	33.C	32.B	31.A	30.B	29.B	28.D	27.D
25.D	24.B	23.C	22.C	21.B	20.B	19.C	18.B
16.B	15.C	14.B	13.B	12.B	11.D	10.D	09.A
07.D	06.D	05.A	04.B	03.B	02.A	01.B	

অধ্যায় | পত্র

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ (Polynomials & Polynomial Equations)

...পদী এক প্রকারের বীজগাণিতীয় রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক ... থাকতে পারে। বহুপদীর বিভিন্ন পদগুলো এক বা একাধিক চলকের ...য় ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল দ্বারা গঠিত। ...র আদর্শ রূপ হচ্ছে $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ যেখানে ... a_2 .... a_n প্রভৃতি ধ্রুবক অর্থাৎ x বর্জিত নির্দিষ্ট সংখ্যা। x এর ... n সর্বদাই ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। লক্ষণীয় যে, $3x^3 + \frac{6}{x^2} + 3$ রাশিটি ...পদী নয় কারণ রাশিটি দ্বিতীয় পদে x এর ঘাত − 2।

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি (A+B)

...পদীর ঘাত: x^n বহুপদীর পদসমূহের মধ্যে x এর উচ্চতম ঘাতকে ...পদীর ঘাত বলে। উপরোক্ত বহুপদীতে $a_0 \neq 0$ হলে, এর ঘাত হবে n।

...$x^2 + \frac{5}{x} + 6$ রাশিটি বহুপদী নয়, কারণ এতে বিয়োগবোধক ঘাত আছে।

...ই চলক বিশিষ্ট বহুপদী: x ও y চলকবিশিষ্ট কোন বহুপদীর আদর্শ রূপ ...$ + by^2 + 2abxy + 2ax + 2by + c$ এবং এর কোন পদ cx^my^n হলে, ...র ঘাত হবে (m + n).

...পদী সমীকরণ: যদি বহুপদী $P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + ... + P_n = 0$ ... এবং ইহা x এর অনধিক n সংখ্যক মানের জন্য সিদ্ধ হয় তবে তাকে n ...র বহুপদী সমীকরণ বলে। এখানে P_0, P_1, P_2 .... P_n প্রভৃতি ধ্রুবক, P_0 ... এই সমীকরণকে n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ বলে। P_0 কে বলা হয় মুখ্য ...। n = 1, 2, 3 হলে, সমীকরণটিকে যথাক্রমে সরল (linear), দ্বিঘাত (Quadratic), ত্রিঘাত (Cubic) সমীকরণ নামে অভিহিত করা হয়।

Gauss এর উপপাদ্য: f (x) = 0 সমীকরণের কমপক্ষে একটি মূল আছে।

...সমীকরণের মূল: কোন বহুপদী সমীকরণ চলকের যেসব মানের জন্য সিদ্ধ ..., অর্থাৎ বহুপদীর মান শূন্য হয় ঐ মানগুলোকে বহুপদী সমীকরণের মূল (root) বা বীজ বলে।

...সমীকরণের মূল সংখ্যা: n ঘাতবিশিষ্ট কোন বহুপদী সমীকরণের n সংখ্যক ... থাকে।

...যদি সমীকরণটি n এর অধিক সংখ্যক মানের জন্য সিদ্ধ হয় তবে তাকে অভেদক বলে। যেমন, $x^2 - 2x + 1 - (x - 1)^2 = 0$ একটি অভেদক।

...সমূহের প্রতিসম ফাংশন: যে কোন দুটি রাশি স্থান বিনিময় করলে যদি ...শনের কোন পরিবর্তন না হয় তবে সে ফাংশনকে প্রতিসম ফাংশন বলে। ...পদী সমীকরণের মূলের প্রতিসম ফাংশনের মান মূল সহগ সম্পর্ক হতে ...জেই নির্ণয় করা যায়।

...সহগ সম্পর্ক: যদি বহুপদী সমীকরণ ... $= P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + ... + P_n = 0$ এর n সংখ্যক ...গুলো যথাক্রমে $a_1, a_2, a_3, ... a_n$ হয় তবে,

... সব মূলগুলোর যোগফল, অর্থাৎ $\sum a_1 = -\frac{P_1}{P_0}$

... মূলগুলোর দু'টি করে নিয়ে সম্ভাব্য সকল জোড়ার গুণফলের যোগফল, অর্থাৎ $\sum a_1 a_2 = (-1)^2 \frac{P_2}{P_0}$

... মূলগুলোর তিনটি করে নিয়ে সম্ভাব্য সকল জোড়ার গুণফলের যোগফল, অর্থাৎ $\sum a_1 a_2 a_3 = (-1)^3 \frac{P_3}{P_0}$

....

... সব মূলগুলোর গুণফল, অর্থাৎ $a_1 a_2 a_3 ..... a_n = (-1)^n \frac{P_n}{P_0}$

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান সূত্র:

এক চলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শ রূপ:

$ax^2 + bx + c = 0$ যেখানে $a \neq 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Rightarrow \left[x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2b}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2b}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

মূলদ-সহগ সম্পর্ক:

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির মূল দুটি α এবং β হলে,

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

আমরা জানি, মূল দুটি হচ্ছে $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

∴ মূল দুইটির সমষ্টি, $\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

এবং মূল দুইটির গুণফল, $\alpha\beta = \frac{(-b)^2 - \sqrt{b^2 - 4ac}^2}{4a^2}$

$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

❐ **দ্বিঘাত সমীকরণের মূল:** দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শ রূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূল দু'টি হল $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং এদেরকে α ও β দ্বারা সূচিত করা হলে,

(i) $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ (ii) $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(iii) $\alpha - \beta = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ (iv) $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

(v) $a\beta^2 + b\beta + c = 0$

❐ **দ্বিঘাত সমীকরণটির বৈশিষ্ট্য:**

01. a = 0 হলে, সমীকরণটি একঘাত হয়। দ্বিঘাত সূচিত করার শর্ত $a \neq 0$
02. b = 0 হলে, মূলদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয়। (i) c < 0 হলে, মূলদ্বয় বাস্তব (ii) c < 0 হলে, মূলদ্বয় কাল্পনিক।
03. c = 0 হলে, একটি মূল শূন্য।
04. a = 0 হলে, একটি মূল অসীম।
05. b = c = 0 হলে, উভয় মূলই শূন্য।
06. a = b = 0 হলে, উভয় মূলই অসীম।
07. a = c = 0 হলে, একটি মূল শূন্য, অপর মূলটি অসীম।
08. c = a হলে, সমীকরণটির একটি মূল অপরটির উল্টা।
09. a ও c ধনাত্মক এবং b ঋণাত্মক হলে সমীকরণটির দুটি মূলই যোগবোধক হয়।
10. a, b, c একই চিহ্ন বিশিষ্ট হলে সমীকরণটির দুটি মূলই বিয়োগবোধক হয়।

11. a ও b একই চিহ্ন বিশিষ্ট কিন্তু c বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হলে ধনাত্মক মূলের মান ঋণাত্মক মূল থেকে কম হবে।

12. b ও c একই চিহ্ন বিশিষ্ট কিন্তু a বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হলে ধনাত্মক মূলের মান ঋণাত্মক মূল থেকে বেশি হবে।

13. $a - b - c = 0$ হলে সমীকরণটি অভেদে পরিণত হবে।

□ **নিশ্চায়ক ও তার বৈশিষ্ট্য:**

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac$ একে D দ্বারা প্রকাশ করা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি D এর উপর নির্ভর করে।

01. $D = 0$ হলে, মূল দুটি বাস্তব, মূলদ ও সমান এবং মূলদ্বয় $-\frac{b}{2a}$

02. $D > 0$ হলে, মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হয়।

03. D পূর্ণ বর্গ হলে, মূলদ্বয় মূলদ ও অসমান হয়।

04. $D < 0$ হলে, মূলদ্বয় জটিল, অসমান ও পরস্পরের অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হয়।

□ **সমীকরণ গঠন:**

(i) একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, দ্বিঘাত সমীকরণটি

$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$

(ii) α, β, γ মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ-

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$

$\Rightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$

(iii) $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের

(a) একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত-

$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2$

(b) দুইটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

⇨ **ত্রিঘাত সমীকরণের মূল সহগ সম্পর্ক:**

মনে করি, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের মূল তিনটি α, β, γ

এখন, $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ —— (i)

আবার, α, β, γ মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ,

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ —— (ii)

(i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$

$$\Rightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$$

উভয় পক্ষের অনুরূপ সহগগুলির সমতা বিধান করে পাই,

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$ এবং $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$

⇨ **বহুপদী সমীকরণের বিশেষ মূল:** অমূলদ ও জটিল মূল যুগলরূপে আসে-

১. একটি মূল $a + ib$ হলে, অপর মূলটি $a - ib$ হবে।

২. একটি মূল $a + \sqrt{b}$ হলে, অপর মূলটি $a - \sqrt{b}$ হবে।

৩. মূলগুলো সমান্তর ধারা গঠন করলে মূলগুলো-

i) ত্রিঘাতের ক্ষেত্রে $a - b, a, a + b$

ii) চতুর্থ ঘাতের ক্ষেত্রে $a - 3b, a - b, a + b, a + 3b$

৪. মূলগুলো গুণোত্তর ধারা গঠন করলে মূলগুলো-

i) ত্রিঘাতের ক্ষেত্রে $ar^{-1}, a, ar.....$

ii) চতুর্থ ঘাতের ক্ষেত্রে $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

* একটি দ্বিঘাত রাশির পূর্ণবর্গ হওয়ার শর্ত এবং অনুরূপ দ্বিঘাত [illegible] মূলদ্বয় পরস্পর সমান হওয়ার শর্ত একই।

* দুটি দ্বিঘাত রাশির সাধারণ উৎপাদক থাকার শর্ত তাদের অনুরূপ [illegible] সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল থাকার শর্তের অনুরূপ।

⇨ **সমীকরণ নির্ণয়ের Short Technique:** $f(x) = 0$ সমীকরণের [illegible] α, β, γ ..... হলে

Technique 01: $-\alpha, -\beta, -\gamma....$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(-x) = 0$

Technique 02: $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ ..... মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Technique 03: $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{\gamma}$ .... মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ [illegible]

Technique 04: $k\alpha, k\beta, k\gamma$...মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f\left(\frac{x}{k}\right) = 0$

Technique 05: $\alpha + h, \beta + h, \gamma + h....$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(x -$ [illegible]

Technique 06: $\alpha - h, \beta - h, \gamma - h....$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $f(x +$ [illegible]

Technique 07: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে [illegible] বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, $c^2x^2 - (b^2 - 2ca)x + a^2 = 0$

Technique 08: $(\alpha - 1), (\beta - 1)$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,

$ax^2 + (2a + b) + a + b + c = 0$

Technique 09: $(\alpha + \frac{1}{\beta}), (\beta + \frac{1}{\alpha})$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,

$acx^2 + b(a + c)x + (a + c)^2 = 0$

Technique 10: $-\alpha, -\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ $ax^2 - bx + c = 0$

Technique 11: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β [illegible] $n\beta$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ, $ax^2 + nbx + n^2c = 0$

Technique 12: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β [illegible] মূলবিশিষ্ট, সমীকরণ $an^2x^2 + bnx + c = 0$

□ **সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান (দ্বিঘাত রাশির):**

$ax^2 + bx + c$ এর সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান $c - \frac{b^2}{4a}$

► $a > 0$ হলে, মান সর্বনিম্ন হবে।

► $a < 0$ হলে, মান সর্বোচ্চ হবে।

► সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের ক্ষেত্রে $x = -\frac{b}{2a}$

Note: a) $\sum\alpha^2 = \left(\sum\alpha\right)^2 - 2\sum\alpha\beta$

b) $\sum\alpha^3 = \left(\sum\alpha\right)^3 - 3\left(\alpha\beta\gamma - \sum\alpha\sum\alpha\beta\right)$

c) $\sum\alpha^2\beta = \sum\alpha\sum\alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma$

d) $\sum\alpha^2\beta^2 = \left(\sum\alpha\beta\right)^2 - 2\alpha\beta\gamma\sum\alpha$

...করতে হবে:

$x^2 - bx + c = 0$ ও $x^2 - cx + b = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণদ্বয়ের মূল দুইটির ...র্থক্য একটি ধ্রুব হওয়ার শর্ত $b + c + 4 = 0$

$x^2 - px + q = 0$ ও $x^2 - qx + p = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ মূল থাকার শর্ত $p + q + 1 = 0$

$x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের পার্থক্য 1 হলে- $b^2 - 4c - 1 = 0$ হয়।

$ax^2 + bx + 1 = 0$ এবং $bx^2 + ax + 1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে $a+b = -1$ হয়।

...ত সমীকরণের একটি মূল,

$a - ib$ হলে, সমীকরণটি $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$

$\frac{c}{a-ib}$ " " $(a^2 + b^2)x^2 - 2cax + c^2 = 0$

$a-\sqrt{b}$ " " $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$

$\frac{c}{a-\sqrt{b}}$ " " $(a^2 - b)x^2 - 2cax + c^2 = 0$

বিভিন্ন সমীকরণে মূলের সাথে সহগের সম্পর্ক

$ax^2 + bx + c = 0$ এর জন্য α ও β মূল হলে $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, α, β ও γ মূল হলে $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\sum\alpha = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\sum\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, মূলগুলো α, β, γ, δ হলে-

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \sum\alpha = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = -\frac{d}{a}$, $\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

Calculator Type

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের মান নির্ণয়:

For MS

[Mode] (3 time) [1] (EQN) [←↑↓→] (ডান দিকে) [2] (Degree)

Screen এ দেখাতে হবে	Press করবে
a?	Press x^2 এর সহগ [=]
b?	Press x এর সহগ [=]
c?	ধ্রুবপদ [=]
x_1 = একটি মান	[=]
x_2 = অন্য একটি মান	

For ES:

[Mode] [3] ($3{:}ax^2 + bx + c = 0$) Then x^2 এর সহগ [=] x এর সহগ [=] ধ্রুবপদ [=] আবার [=]

উদাহরণ: $2x^2 - 3x + 1 = 0$ সমীকরণের সমাধান।

... [=] [–] [3] [=] [1] [=] Sreen এর দেখাবে $x_1 = 1, x_2 = ½$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ এর সমাধান

For MS

[Mode] (3 time) [1] (EQN) [←↑↓→] (ডান দিকে) [3] (Degree)

Screen এ দেখাতে হবে	Press করবে
a ?	x^3 এর সহগ [=]
b ?	x^2 এর সহগ [=]
c ?	x এর সহগ [=]
d ?	ধ্রুবপদ [=]
x_1 = একটি মান	[=]
x_2 = ২য় মান	[=]
x_3 = ৩য় মান	[=]

For ES

Mode EQN 4($ax^3 + 2x^2 + cx + d = 0$) Then x^3 এর সহগ [=] x^2 এর সহগ [=] x এর সহগ [=] ধ্রুবপদ [=] আবার [=]

দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় বা দুটি সমীকরণের সমাধান করে x, y নির্ণয়। প্রথমে প্রদত্ত রেখাদ্বয়কে $a_1x + b_1y = c_1$, $3a_2x + b_2y = c_2$ (ডান দিকে ধ্রুবক) আকারে দিতে হবে। এরপর

For MS

[Mode] (3 time) [1] (EQN) [2]

Screen এ দেখাতে হবে	Press করবে
a_1 ?	১ম সমীকরণের x এর সহগ [=]
b_1 ?	১ম সমীকরণের y এর সহগ [=]
c_1 ?	১ম সমীকরণের ধ্রুবপদ [=]
a_2 ?	২য় সমীকরণের সহগ [=]
b_2 ?	২য় সমীকরণের সহগ [=]
c_2 ?	২য় সমীকরণের ধ্রুবপদ [=]
x = একটি মান	[=]
y = একটি মান	[=]

For ES:

[Mode] [5] [1] ($1\ a_nx + b_ny = c_n$)

Press এর ১ম সমীকরণের x এর সহগ [=] Press ১ম সমীকরণের y এর সহগ [=] Press ১ম সমীকরণের ধ্রুবপদ [=] Press ২য় সমীকরণের x এর সহগ [=] Press ২য় সমীকরণের y এর সহগ [=] Press ২য় সমীকরণের ধ্রুবপদ [=]

Screen এ দেখাতে হবে	Press করবে
x এর মান	[=]
y এর মান	

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ (A)

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: দ্বিঘাত সমীকরণের মূল এ প্রকৃতি বিষয়ক অংক

Ex-01 যদি a, b, c মূলদ হয় এবং $a+b+c=0$ তবে দেখাও যে, $(b+c+a)x^2+(c+a-b)x+(a+b-c)=0$ সমীকরণের মূলগুলো মূলদ হবে।

নিশ্চায়ক $=(c+a-b)^2-4(a+b-c)(b+c-a)$
$=4b^2-16ac$ [$\because a+b+c$] $=4[(a+c)^2-4ac]$
$=[2(a-c)^2]$ যা একটি পূর্ণ বর্গ।

সুতরাং সমীকরনের মূলগুলো মূলদ। **(Showed)**

Ex-02 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে দেখাও যে, $b=\frac{1}{2}(a+c)$

Sol^n: মূলদ্বয় সমান বলে নিশ্চায়ক $=0$

$\Rightarrow (c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$
$\Rightarrow (a-c)^2-4(b-c)(a-b)=0$
$\Rightarrow \{(a-b)+(b-c)\}^2-4(b-c)(a-b)=0$
$\Rightarrow (a-b-b+c)^2=0$ $[\because (x+y)^2-4xy=(x-y)^2]$
$\Rightarrow a+c-2b=0$
$\therefore b=\frac{1}{2}(a+c)$ **(Showed)**

Ex-03 $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে দেখাও যে, a, b, c বিপরীত প্রগমনে থাকবে।

Sol^n: $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ সমীকরণের

নিশ্চায়ক $=b^2(c-a)^2-4ac(b-c)(a-b)$
$=b^2(a-c)^2-4ac(b-c)(a-b)$
$=\{a(b-c)+c(a-b)\}^2-4.a(b-c).c(a-b)$
$=[a(b-c)-c(a-b)]^2$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে নিশ্চায়ক $=0$

$\Rightarrow [a(b-c)-c(a-b)]^2=0$
$\Rightarrow a(b-c)=c(a-b)$
$\Rightarrow ab-ac=ac-bc$
$\Rightarrow ab+bc=2ac$
$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ $\therefore$ a, b, c বিপরীত প্রগমনে থাকবে। **(Showed)**

Ex-04 যদি $a^2x^2+6abx+ac+8b^2=0$ সমীকরণের মূল দুইটি সমান হয়, তবে দেখাও যে, $ac(x+1)^2=4b^2x$ সমীকরণের মূল দুইটিও সমান।

Sol^n: $a^2x^2+6abx+ac+ab^2=0$, সমীকরণের মূল দুইটি সমান।

$\therefore$ নিশ্চায়ক $=0$
$\Rightarrow (6ab)^2-4a^2(ac+8b^2)=0$
$\Rightarrow 36a^2b^2-4a^3c-32a^2b^2=0$
$\Rightarrow 4a^2b^2-4a^3c=0 \Rightarrow 4a^2(b^2-ac)=0$
$\Rightarrow b^2-ac=0$ $[\because a\neq 0]$
$\Rightarrow b^2=ac$

আবার, $ac(x+1)^2=4b^2x$
$\Rightarrow ac(x^2+2x+1)-4b^2x=0$
$\Rightarrow acx^2+2acx+ac-4b^2x=0$
$\Rightarrow acx^2+(2ac-4b^2)x+ac=0$

এই সমীকরণের নিশ্চায়ক $=(2ac-4b^2)^2-4ac.ac$
$=(2ac-4.ac)^2-4a^2c^2$ $[\because b^2=ac]$
$=(-2ac)^2-4a^2c^2$
$=4a^2c^2-4a^2c^2=0$

$\therefore ac(x+1)^2=4b^2x$ সমীকরণের মূল দুইটিও সমান। (Sho...

For practice:

01. $(a^2-bc)x^2+2(b^2-ca)+c^2-ab$ সমীকরণটির মূলদ্ব... দেখাও যে,
(i) $b=0$ অথবা $a^3+b^3+c^3=3abc$
(ii) $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$
02. $(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+(c^2+d^2)=0$ সমীকরণের মূ... হলে দেখাও যে, $a:b=c:d$
03. দেখাও যে, $(h^2-a^2)x^2-2hkx+k^2-b^2$ রাশিটি একটি পূর্ণ ... $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ হয়।
04. $(a^2+b^2)+2(ac+bd)x+c^2+d^2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ... যে, তারা সমান হবে এবং তাদের মান নির্ণয় কর। Ans. ...
05. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত r হলে, ... $\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$
06. $bx^2+cx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত α ও β হলে ... $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{c}{b}}=0$
07. যদি $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ ... বর্গ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $a=b=c$
08. k এর মান কত হলে $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$ সমীকরণটির মূলগুলো বাস্তব ও সমান হবে। Ans: k ...
09. k এর মান কত হলে $(k^2-3)x^2+3kx+(3k+1)=0$ ... মূলদ্বয় পরস্পর উল্টা হবে? Ans: k ...

Type-02: সমীকরণ গঠন বিষয়ক

Ex-01 $5x^2+3x+7=0$ সমীকরনের মূলগুলো α, β হলে $-\alpha, -\beta$ ... সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $5(-x)^2+3(-x)+7=0$ | $x=-\alpha$
$\Rightarrow 5x^2-3x+7=0$ **Ans.** | $\Rightarrow \alpha=-x$

N.B $\rightarrow$ x = প্রদত্ত মূল ধরে α এর মান বের করে নিয়ে x এর ... α-এর মান বসাইতে হয়।
যেমন, $x=-\alpha, \Rightarrow \alpha=-x$

Ex-02 $2x^3-x^2+3x-1=0$ এর মূলত্রয় a, b, c। যে সমীকরণের ... $\frac{1}{2b+1},\frac{1}{2c+1},\frac{1}{2a+1}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $x=\frac{1}{2b+1}\Rightarrow b=\frac{1-x}{2x}$

b, $2x^3-x^2+3x-1=0$ সমীকরণের মূল হওয়ায় $2b^3-b^2+3b-$...

$\therefore 2\left(\frac{1-x}{2x}\right)^3-\left(\frac{1-x}{2x}\right)^2+3\left(\frac{1-x}{2x}\right)-1=0$
$\therefore 12x^3-11x^2+4x-1=0$

$x^2 + bx + c = 0$ এর মূল দুটি α, β হলে $\alpha + \frac{1}{\beta}$ ও $\beta + \frac{1}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a} \times \frac{a}{c}\right) = -\frac{b(a+c)}{ac}$

মূলদ্বয়ের গুনফল $= \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$= \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{c}{a} + 2 + \frac{a}{c} = \frac{(c+a)^2}{ac}$

নির্ণেয় সমীকরণ, x^2 – (মূল দুটির যোগফল) x + মূল দুটি গুনফল = 0

$x^2 + \frac{b(a+c)}{ac}x + \frac{(c+a)^2}{ac} = 0$

$acx^2 + b(a+c)x + (c+a)^2 = 0$ **Ans.**

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি (α, β) হয় তাহলে- $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ সমীকরনের মূল দুটি α, β এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - 2bx + 4a = 0 \Rightarrow \frac{c}{a}x^2 - 2.\frac{b}{a}x + 4 = 0$

$\alpha\beta x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 4 = 0$

$(\alpha x + 2)(\beta x + 2) = 0 \quad \therefore x = -\frac{2}{\alpha}$ ও $-\frac{2}{\beta}$ **Ans.**

$cx^2 + 2bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে b, c বাস্তব এবং $c^2 > 2b^2$ ... এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল $\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$।

প্রদত্ত সমীকরণ হতে, $\alpha + \beta = \frac{-2b}{c}$; $\alpha\beta = 1$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{4b^2}{c^2} - 2 = \frac{2}{c^2}(2b^2 - c^2)$

$c^2 > 2b^2$ সেহেতু $\alpha^2 + \beta^2$ ঋণাত্মক।

$\alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ একটি জটিল রাশি।

প্রদত্ত সমীকরণটির সহগগুলো বাস্তব, সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণের অপর মূল $\alpha + \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= (\alpha+\beta) + \sqrt{\alpha^2+\beta^2} + (\alpha+\beta) - \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2(\alpha+\beta)$

মূলদ্বয়ের গুনফল $= \{(\alpha+\beta) + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\}\{(\alpha+\beta) - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\}$

$= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha^2+\beta^2) = 2\alpha\beta$

নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 2(\alpha+\beta)x + 2\alpha\beta = 0$

$x^2 - 2\left(\frac{-2b}{c}\right)x + 2 = 0 \quad \therefore cx^2 + 4bx + 2c = 0$ **Ans.**

$x^2 - bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 - cx + b = 0$ এর মূলদ্বয় γ, δ হলে এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলদ্বয় $\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}$ এবং $\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}$.

সমীকরণদ্বয় হতে, $\alpha + \beta = b, \alpha\beta = c$

$\gamma + \delta = c, \gamma\delta = b$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি,

$\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{bc}{bc} = 1$

আবার মূলদ্বয়ের গুনফল $= \left(\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\delta}\right)\left(\frac{1}{\alpha\delta} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)$

$= \frac{(\beta\delta + \alpha\gamma)(\beta\gamma + \alpha\delta)}{(\alpha\beta\gamma\delta)^2} = \frac{\gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2)}{(bc)^2}$

$= \frac{b[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta] + c[(\gamma+\delta)^2 - 2\gamma\delta]}{b^2c^2}$

$= x^2 - x + \frac{b(b-2c) + c(c^2 - 2b)}{b^2c^2} = 0$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $b^2c^2x(x-1) + b^3 + c^3 - 4bc = 0$ **Ans.**

Ex-07 $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয় α, β হলে $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখানে, $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$

$= 1 + (\alpha+\beta) + \alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha^2\beta^2$

$= 1 + (\alpha+\beta) + \alpha\beta + (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha\beta(\alpha+\beta) + (\alpha\beta)^2$

$= 1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} + \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c^2}{a^2}$

$= 1 - \frac{b}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{bc}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$

$= \frac{1}{a^2}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ **Ans.**

For practice:

01. যদি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α, β হয় তাহলে $(\alpha-\beta)^2$ ও $(\alpha+\beta)^2$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x^2 - 2(p^2 - 2q)x + p^4 - 4p^2q = 0$

02. $2x^2 - 8x + 7 = 0$ সমীকরণের মূল দুটি α ও β হলে $\alpha^2 + \beta$ এবং $\beta^2 + \alpha$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। **Ans.** $4x^2 - 52x + 15 = 0$

03. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূল দুইটি $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির সমষ্টি এবং অন্তরফলের পরমমান হবে।
Ans. $x^2 - 2x(a + b) + 4ab = 0$

04. যদি $x^2 + ax + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0$ সমীকরণের মূল দুটি যথাক্রমে α, β হয় তবে প্রমাণ কর যে, $x^2 + (a \pm b)x \pm ab = 0$ সমীকরণের মূল দুটি $(\alpha + \beta)$ ও $(\alpha - \beta)$ হবে।

05. $x^3 - x + 1 = 0$ এর মূল α, β, γ হলে $\frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\beta}, \frac{1}{1-\gamma}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans:** $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$

06. এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যেন এর প্রত্যেকটি মূল $x^2 + 3x - 7 = 0$ এর প্রতিটি মূল অপেক্ষা এক বেশি। **Ans:** $x^2 + x - 9 = 0$

07. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2 + 10px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha + q, \beta + q$ হলে p,q এর মান নির্ণয় কর।
Ans: (p,q) = (5,0), (–4, –9/2)

08. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরনের মূল দুইটি α, β হলে $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ এর মূল দুটি (α, β) এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
Ans: $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$

09. $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $cx^2 + bx + a = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $c + a = \pm b$

Type-03: শর্ত সাপেক্ষে বিভিন্ন ধরণের প্রমাণ

Ex-01 $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q}$ সমীকরনের মূল দুইটির অন্তর r হলে p কে q এবং r এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

Sol^n: $\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}=\frac{1}{q} \Rightarrow x^2-px+pq=0$

ধরি, মূল দুটি α ও β $\therefore \alpha+\beta=p$ ও $\alpha\beta=pq$.

প্রশ্নমতে, $|\alpha-\beta|=r$

$\Rightarrow |\alpha-\beta|^2=r^2 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=r^2$

$\Rightarrow p^2-4pq=r^2 \Rightarrow p^2-4pq+(2q)^2=r^2+4q^2$

$\Rightarrow (p-2q)^2=r^2+4q^2 \Rightarrow p-2q=\pm\sqrt{r^2+4q^2}$

$\therefore p=2q\pm\sqrt{r^2+4q^2}$ **Ans.**

Ex-02 $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β এবং $Ax^2+Bx+C=0$ সমীকরনের মূলদ্বয় $\alpha+\delta$ ও $\beta+\delta$ হলে প্রমান কর যে,

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}$$

Sol^n: ধরি, দ্বিতীয় সমীকরনের মূলগুলো α_1 ও β_1

$\therefore \alpha_1=\alpha+\delta$ এবং $\beta_1=\beta+\delta$

$\therefore \alpha_1-\beta_1=\alpha-\beta$

$\Rightarrow (\alpha_1-\beta_1)^2=(\alpha-\beta)^2$

$\Rightarrow (\alpha_1+\beta_1)^2-4\alpha_1\beta_1=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\Rightarrow \left(-\frac{2B}{A}\right)^2-4.\frac{C}{A}=\left(-\frac{2b}{a}\right)^2-4.\frac{c}{a}$

$\Rightarrow \frac{B^2-4AC}{A^2}=\frac{b^2-4ac}{a^2}$ **(Proved)**

Ex-03 $x^3+3px+q=0$ এর উৎপাদক $(x-k)^2$ হলে দেখাও যে, $4p^3+q^2=0$

Sol^n: ধরি, মূল তিনটি k,k,α [$(x-k)^2$ উৎপাদক হওয়ায় দুটি মূল অবশ্যই k]

$\therefore k+k+\alpha=0$

$\therefore \alpha=-2k$ ----------------(1)

আবার $k^2\alpha=-q \Rightarrow k^2\times(-2k)=-q. \therefore k^3=\frac{q}{2}$

এখন, $k^3+3pk+q=0 \Rightarrow \frac{q}{2}+3pk+q=0$

$\Rightarrow 3pk=-\frac{3q}{2} \Rightarrow p^3k^3=-\frac{q^3}{8} \Rightarrow p^3\times\frac{q}{2}=-\frac{q^3}{8}$

$\therefore 4p^3+q^2=0$ **(Showed)**

Ex-04 $x^2-x-1=0$ এর একটি মূল α হলে দেখাও যে অপর মূলটি $\alpha^3-3\alpha$ হবে।

Sol^n: $\alpha^2-\alpha-1=0$ -------- (i) $\therefore \alpha^2-\alpha=1$

আবার, ধরি মূলগুলো α, β $\therefore \alpha+\beta=1$

$\Rightarrow \beta=1-\alpha$ ------ (ii)

(i) নং কে α দ্বারা গুন করে, $\alpha^3-\alpha^2-\alpha=0$

$\Rightarrow \alpha^3=\alpha^2+\alpha \Rightarrow \alpha^3-3\alpha=\alpha^2+\alpha-3\alpha=\alpha^2-2\alpha$

$\Rightarrow \alpha^3-3\alpha=1-\alpha$ [$\because \alpha^2-\alpha=1$]

$\therefore \alpha^3-3\alpha=\beta$ [(ii) হতে] **(Showed)**

Ex-05 $x^3+ax+b=0$ সমীকরনের একটি মূল অপর দুইটি মূলের অন্তরের দ্বিগুণ হলে দেখাও যে একটি মূল $\frac{13b}{3a}$

Sol^n: মূলত্রয় $\alpha, \beta, 2(\alpha-\beta)$

$\therefore \alpha+\beta+2(\alpha-\beta)=0 \quad \therefore \beta=3\alpha$ --------(i)

আবার, $\alpha\beta+2\alpha(\alpha-\beta)+2\beta(\alpha-\beta)=a$

$\Rightarrow \alpha\beta+2(\alpha^2-\beta^2)=a \Rightarrow \alpha.3\alpha+2(\alpha^2-9\alpha^2)=a$

$\therefore -13\alpha^2=a$ ------- (ii)

আবার, $\alpha\beta.2(\alpha-\beta)=-b \quad \therefore 12\alpha^3=b$ -------------- (iii)

(ii) ও (iii) নং হতে $\frac{12}{13}\alpha=-\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \alpha=\frac{-13b}{12a} \qquad \therefore \beta=3\alpha=-\frac{13b}{4a}$

$\therefore 2(\alpha-\beta)=2\left(\frac{-13b}{12a}+\frac{13b}{4a}\right)=\frac{13b}{3a}$ **(Showed)**

Ex-06 $b^3+a^2c+ac^2=3abc$ হলে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সম্পর্ক নির্ণয় কর।

Sol^n: মূলদ্বয় α, β হলে, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

এখন, $b^3+a^2c+ac^2=3abc \Rightarrow \frac{b^3}{a^3}+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{3bc}{a^2}$

$\Rightarrow -(\alpha+\beta)^3+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2=-3(\alpha+\beta).\alpha\beta$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-\alpha\beta-\alpha^2\beta^2=0$

$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3-\alpha\beta-\alpha^2\beta^2=0$

$\Rightarrow \alpha(\alpha^2-\beta)-\beta^2(\alpha^2-\beta)=0 \Rightarrow (\alpha^2-\beta)(\alpha-\beta^2)=0$

$\therefore \alpha^2=\beta$ অথবা $\alpha=\beta^2$ । এটিই মূলদ্বয়ের মধ্যকার সম্পর্ক।

Ex-07 $5x^2+(2\lambda+1)x+\lambda-2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β যদি $2\alpha+5\beta=1$ শর্ত সিদ্ধ করে তাহলে λ এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: $5x^2+(2\lambda+1)x+\lambda-2=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{1}{5}(2\lambda+1) \therefore 5\alpha+5\beta=-(2\lambda+1)$ -------(i)

প্রদত্ত শর্ত $2\alpha+5\beta=1$-----(ii)

(i) – (ii) $\rightarrow 3\alpha=-2(\lambda+1) \therefore \alpha=-\frac{2}{3}(\lambda+1)$ -----(iii)

(ii) নং হতে, $\beta=\frac{1-2\alpha}{5}$ আবার, $\alpha\beta=\frac{\lambda-2}{5} \Rightarrow \frac{\alpha(1-2\alpha)}{5}=\frac{\lambda-2}{5}$

$\Rightarrow \alpha-2\alpha^2=\lambda-2 \Rightarrow -\frac{2}{3}(\lambda+1)-2.\frac{4}{9}(\lambda+1)^2=\lambda-2$

$\Rightarrow -6(\lambda+1)-8(\lambda^2+2\lambda+1)-9\lambda+18=0$

$\Rightarrow 8\lambda^2+31\lambda-4=0 \Rightarrow (\lambda+4)(8\lambda-1)=0$

$\therefore \lambda=-4, \frac{1}{8}$

Ex-08 যে শর্ত সাপেক্ষে $x^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় $x^2+qx+r=0$ এর মূলদ্বয়ের প্রত্যেকের $\frac{3}{4}$ গুন হবে তা নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, $x^2+qx+r=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β

$\therefore \alpha+\beta=-q; \alpha\beta=r$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x^2+bx+c=0$ এর মূলদ্বয় $\frac{3}{4}\alpha$ এবং $\frac{3}{4}\beta$

$\therefore \frac{3}{4}(\alpha+\beta)=-b \Rightarrow \frac{-3}{4}q=-b \therefore 3q=4b$

আবার, $\frac{3}{4}\alpha\times\frac{3}{4}\beta=c \Rightarrow \frac{9}{16}\alpha\beta=c$

$\Rightarrow \frac{9}{16}r=c \therefore 9r=16c$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $4b=3q$ এবং $9r=16c$

...$x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অণুপাত এবং $x^2 + px + q = 0$ ...সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত পরস্পর সমান হলে প্রমান কর যে, $b^2q = p^2c$

...$x^2+bx+c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

...$\alpha+\beta = -b \Rightarrow \alpha\beta = c$

...$x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ ও δ

...$\gamma+\delta = -p \Rightarrow \gamma\delta = q$

...মতে, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$

$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(\gamma+\delta)^2}{(\gamma-\delta)^2}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{b^2-4c} = \frac{p^2}{p^2-4q}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{-4c} = \frac{p^2}{-4q} \therefore b^2q = p^2c$ **(Proved)**

For practice:

...$x^2 - bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটির অন্তর একক হলে প্রমান কর যে, ...$-4c^2 = (1+2c)^2$

...$x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হলে প্রমাণ কর ...$p^2 - 4q - 1 = 0$

...$\frac{p}{x-p} + \frac{q}{x-q} = k$ এর মূলগুলোর সংখ্যামান সমান কিন্তু চিহ্ন ...বিপরীত। দেখাও যে, $k = -1$ বা $p + q = 0$

...$x^3 - px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের দুইটি মূল সমষ্টি তৃতীয় মূলের সমান ...হলে দেখাও যে, $p^3 + 8r = 4pq.$

...$x^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল α হলে, দেখাও যে অপর মূলটি ...-3α হবে।

...$x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে কোন শর্তে ...$+1 = 0$ হবে ? **Ans:** $c^2 + ac + b + 1 = 0$

...$x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল $x^2 - p_1x + q_1 = 0$ সমীকরণের একটি ...মূলের দ্বিগুণ হলে প্রমাণ কর যে, $(4q - q_1)^2 = 2(2p_1q - pq_1)(2p - q_1)$

...$ax^2+bx+c=0$ সমীকরনের মূল দুইটির অনুপাত $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ ...সমীকরণের মূল দুইটির অনুপাতের সমান হয় তবে দেখাও যে,

...$= \frac{ac}{a_1c_1}$.

...$x^2 - px + q = 0$ সমীকরনের মূল দুইটির অনুপাত $m{:}n$ হয় তবে দেখাও ...$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{q}{p}} = 0$.

...$x^2 - px + q = 0$ সমীকরনের মূল দুটি α ও β হয় তাহলে ...$(p\alpha + q)^{-2} + (p\beta + q)^{-2}$ কে p, q এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

...$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরনের একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হয় ...তবে প্রমাণ কর যে,

...$a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$

...$(a - b)^3 = a(c - b)^3$

...$ax^2 + bx + c = 0$ এর একটি মূল $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এর একটি মূলের ...সমান হলে প্রমাণ কর যে,

...$(ac_1 - a_1c)^2 = (bc_1 - ab_1)(b_1c - a_1b)$

...$x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের একটি মূল অন্যটির বর্গের সমান হয় তবে ...দেখাও যে, $p^3 - q(3p - 1) + q^2 = 0$

...$x^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও $p\alpha + q$ হলে দেখাও যে, ...$(pb - q) = c(p+1)^2$

15. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে নিম্নলিখিত রাশিগুলোর মান নির্ণয় কর।

a) $(a\alpha^2 + b)^{-1} + (a\beta^2 + b)^{-1}$ **Ans.** $\frac{b^2 - 2ac + 2ab}{ac^2 + b^3 - 2abc + ab^2}$

b) $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$ **Ans.** $\frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$

16. $3x^2 - 4x + 5 = 0$ এর একটি মূল α হলে দেখাও যে, $9x^2 + 28x + 100 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $2\alpha^2$ হবে।

Type-04: সাধারণ মূল সংক্রান্ত সমস্যাবলি

Ex-01 যদি $ax^2+bx+c = 0$ এর একটি মূল $cx^2 + bx + a = 0$ এর একটি মূলের দ্বিগুণ হয় তবে দেখাও যে $2a = c$ অথবা $(2a + c)^2 = 2b^2$

Sol^n: ধরি, $cx^2 + bx + a = 0$ এর মূল α

$ax^2 + bx + c = 0$ এর মূল 2α

$\therefore 4a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$

$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$

বজ্রগুনন সূত্রানুসারে $\frac{\alpha^2}{2ab - bc} = \frac{\alpha}{c^2 - 4a^2} = \frac{1}{4ab - 2bc}$

$\therefore \alpha = \frac{b(2a-c)}{(c+2a)(c-2a)}; \alpha = \frac{(c+2a)(c-2a)}{2b(2a-c)}$

$\therefore \frac{b(2a-c)}{(c+2a)(c-2a)} = \frac{(c+2a)(c-2a)}{2b(2a-c)}$

$\Rightarrow 2b^2(2a-c)^2 = (c+2a)^2(c-2a)^2$

$\Rightarrow (c-2a)^2 [2b^2 - (c+2a)^2] = 0$

$\therefore c = 2a$ অথবা $2b^2 = (c+2a)^2$ **(Showed)**

Ex-02 $x^2 - px + q = 0$ ও $x^2 - ax + b = 0$, সমীকরণ দুটির সাধারণ মূল থাকে এবং দ্বিতীয় সমীকরণের মূল দুটি সমান হয় তবে প্রমান কর যে, $b + q = \frac{1}{2}ap$

Sol^n: ধরি, সাধারণ মূল α।

$\therefore \alpha^2 - p\alpha + q = 0$------------(i)

$\alpha^2 - a\alpha + b = 0$ -------------(ii)

আবার দ্বিতীয় সমীকরণের দুইটি মূল সমান সুতরাং অপর মূলটিও α হবে।

এখন $\alpha + \alpha = a$

$\therefore \alpha = \frac{a}{2}$

দ্বিতীয় সমীকরণের নিশ্চায়ক = 0

$\therefore (-a)^2 - 4b = 0 \therefore a^2 = 4b$

(i) হতে, $\frac{a^2}{4} - p.\frac{a}{2} + q = 0$ [$\alpha = \frac{a}{2}$ বসিয়ে]

$\Rightarrow \frac{4b}{4} - \frac{pa}{2} + q = 0 \therefore b + q = \frac{1}{2}ap$ **(Proved)**

Ex-03 যদি $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ রাশি দুটির একটি সাধারণ মূল থাকে তাহলে প্রমাণ কর যে, $p + q + 1 = 0$

Sol^n: ধরি, সাধারণ মূল α

$\therefore p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0 \quad \therefore q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$

বজ্রগুনন সূত্রানুসারে, $\frac{\alpha^2}{q-p} = \frac{\alpha}{q-p} = \frac{1}{p^2-q^2}$

$\therefore \alpha = 1$ এবং $\alpha = \frac{-1}{p+q}$ অর্থাৎ $\frac{-1}{p+q} = 1$

$\therefore p + q + 1 = 0$ **(Proved)**

For practice:

01. যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরনের মূলগুলোর মধ্যে একটি ধ্রুবকের পার্থক্য থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$

02. $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, তাদের অপর দুটি মূল $x^2+x+pq = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হবে।

03. যদি $x^2 + bx + c = 0$ এবং $x^2 + mx + n = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে তাহলে দেখাও যে, এ মূলটি $\frac{bn - cm}{m - b}$ এর বর্গমূলের সমান হবে।

04. $x^2 - bx + c = 0$ সমীকরনের মূল দুইটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে, $2x^2-4(1+c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরনের মূল দুইটি কাল্পনিক হবে।

05. $x^2 + kx - 6k = 0$ এবং $x^2 - 2x - k = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল আছে। k এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** 0,3,8

06. $p+q+r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2+px + qr = 0$, $x^2 + qx - rp = 0$ এবং $x^2 + rx + pq = 0$ সমীকরণগুচ্ছের একটি করে সাধারণ মূল আছে।

07. $x^2 + ax + 12 = 0$, $x^2 + bx + 15 = 0$; $x^2 + (a + b)x + 36 = 0$ সমীকরণগুচ্ছের একটি সাধারণ মূল থাকলে a, b এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $a = -7, b = -8$

08. $x^2 - ax + b = 0$ ও $x^2 - bx + a = 0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকলে দেখাও যে, $a + b + 1 = 0$ এবং দেখাও যে, অপর মূলদ্বয় $x^2 - x + ab = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

Type-05: বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয়

Ex-01 দেখাও যে, x এর একই মানের জন্য $x^2 - 6x + 45$ ন্যূনতম এবং $19 - x^2 + 6x$ বৃহত্তম হবে। সংশ্লিষ্ট ন্যূনতম ও বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $19 - x^2 + 6x = 19 - (x^2 - 6x)$
$= 19 - (x^2 - 2.x.3 + 9) + 9 = 28 - (x - 3)^2$

x = 3 হলে এর মান বৃহত্তম হবে।

$\therefore$ বৃহত্তম মান = 28.

আবার, $x^2 - 6x + 45 = x^2 - 2.x.3 + 9 + 36 = (x - 3)^2 + 36$

$\therefore$ x = 3 হলে এর মান ন্যূনতম হবে।

$\therefore$ ন্যূনতম মান = 36 **Ans.**

Type-06

Ex-01 x বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}$ এর মান 2 এবং $\frac{2}{3}$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

Solⁿ: $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1} = p$

$\Rightarrow (1-p)x^2 + (-2+p)x + (2-p) = 0$

যেহেতু x এর মান বাস্তব সেহেতু,

$(-2+p)^2 - 4(1-p)(2-p) \geq 0$

$\Rightarrow (p - 2)(p - 2 + 4 - 4p) \geq 0$

$\Rightarrow (p - 2)(-3p + 2) \geq 0$

$\Rightarrow (p - 2)(3p - 2) \leq 0$

$\Rightarrow 3(p-2)(p-2/3) \leq 0$

$\therefore \frac{2}{3} \leq p \leq 2$

$\therefore \frac{2}{3} \leq \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1} \leq 2$ **(Proved)**

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ (B)

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: শর্তানুযায়ী সমীকরণের মূল নির্ণয়

Ex-01 $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমনে হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

Solⁿ: ধরি, মূলগুলো $\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta$

$\therefore \alpha-\beta+\alpha+\alpha+\beta = 9 \Rightarrow \alpha = 3$

আবার $(\alpha - \beta)\alpha + \alpha(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 26$

$\Rightarrow 3\alpha^2-\beta^2 = 26 \;\therefore \beta = \pm 1 \;[\because \alpha = 3]$

Ans: $\alpha = 3, \beta = 1$ হলে, মূলগুলো 2, 3, 4

একইভাবে $\alpha = 3; \beta = -1$ হলে মূলগুলো 4,3,2.

সুতরাং মূলত্রয় 2, 3, 4

Ex-02 কি শর্তে $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনে থাকবে?

Solⁿ: মনে করি, মূলত্রয় $\frac{\alpha}{k}, \alpha, \alpha k$.

$\therefore \frac{\alpha}{k}.\alpha.\alpha k = -\frac{d}{a} \Rightarrow \alpha^3 = -\frac{d}{a}$ ....(i)

আবার, $\frac{\alpha}{k} + \alpha + \alpha k = -\frac{3b}{a}$

$\therefore \alpha\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right) = -\frac{3b}{a}$ ....(ii)

আবার, $\frac{\alpha}{k}.\alpha + \frac{\alpha}{k}.\alpha k + \alpha.\alpha k = \frac{3c}{a}$

$\therefore \alpha^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right) = \frac{3c}{a}$ ....(iii)

(ii) ও (iii) নং হতে, $\alpha = -\frac{c}{b}$ ....(iv)

(i) ও (iv) নং হতে, $\left(-\frac{c}{b}\right)^3 = -\frac{d}{a}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত, $ac^3 = db^3$

Ex-03 $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

Solⁿ: ধরি, মূলগুলো, $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$

$\therefore$ মূলগুলোর গুনফল, $\alpha^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

এখন মূলগুলোর যোগফল, $\frac{\alpha}{r} + \alpha + \alpha r = \frac{21}{4}$

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{r^2 + r + 1}{r} = \frac{7}{2} \;\therefore r = \frac{1}{2}$ অথবা 2

$\therefore \frac{\alpha}{r} = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$ এবং $\alpha r = \frac{3}{4}$ বা $\frac{\alpha}{r} = \frac{3}{4}$ বা $\alpha = \frac{3}{2}$ এবং αr ...

$\therefore$ মূলগুলো $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3$

...practice:

... সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ ...টি সমাধান কর। **Ans** : $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

... $-26x^2 + 52x - 24 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত ... সমীকরণটি সমাধান কর। **Ans:** $\frac{2}{3}, 2, 6.$

... $5x^2 + 17x - 13 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল 1 হলে অপর মূল দুইটি ... কর। **Ans:** $2+3i, 2-3i$

... মূলদ্বয়ের অনুপাত 3:4 হলে $2x^3 - x^2 - 22x - 24 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

Ans : $-\frac{3}{2}, -2, 4$

Type-02: প্রতিসম মূলবিশিষ্ট রাশির মান নির্ণয়

... $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল α, β, γ হলে

... $\sum\alpha^3$ (ii) $\sum\alpha^3\beta$ (iii) $\sum\alpha(\beta-\gamma)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

... $\sum\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

... $\alpha + \beta + \gamma = -a$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$, $\alpha\beta\gamma = -c$

$\sum\alpha^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$

$= (\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)] + 3\alpha\beta\gamma$

$= -a(a^2 - 3b) - 3c = 3ab - a^3 - 3c$ **Ans.**

$\sum\alpha^3\beta = \alpha^3\beta + \beta^3\gamma + \gamma^3\beta + \alpha\beta^3 + \beta\gamma^3 + \gamma\beta^3$

$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

$= [(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)](\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$- \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

$= b(a^2 - 2b) - ac$ **Ans.**

$\sum\alpha(\beta-\gamma)^2 = \alpha(\beta-\gamma)^2 + \beta(\gamma-\alpha)^2 + \gamma(\alpha-\beta)^2$

$= \Sigma\alpha^2\beta - 6\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 9\alpha\beta\gamma$

$= -ab + 9c$ **Ans.**

$\sum\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \Sigma\left[\frac{\alpha}{\frac{-c}{\alpha\gamma}} + \frac{\beta}{\frac{-c}{\beta\gamma}}\right]$ $[\because \alpha\beta\gamma = -c]$

$= \frac{-1}{c}\sum\gamma(\alpha^2 + \beta^2) = \left[\frac{-1}{c}(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma\right]$

$= \frac{-1}{c}[(-a)b + 3c] = \frac{1}{c}(ab - 3c)$ **Ans.**

...practice:

... $+ r = 0$ সমীকরনের মূলগুলো α, β, γ হলে $\Sigma(\alpha-\beta)^2$ এর মান ... কর। **Ans** : $-6q$

... $= 0$ সমীকরণের মূলগুলো a,b,c হলে, $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right)$ এর ... কর। **Ans** : $\frac{-1}{r}\left\{(q-1)^2 + r^2\right\}$

... $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলগুলো α, β, γ হলে-

... $\sum\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$ b) $\sum(\beta+\gamma)^{-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

Ans. $\frac{1}{c}(ab - 3c)$; $\frac{a^2 + b}{c - ab.}$

... $- r = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, c হলে দেখাও যে, ... $= \frac{3r - qa}{a}$.

Type-03: অনুবন্ধী মূল সংক্রান্ত

Ex-01 $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x - 20 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $(1 + 2i)$ হলে, অন্য মূলগুলি নির্ণয় কর।

যেহেতু, জটিল মূল জোড়ায় জোড়ায় থাকে। অতএব $(1-2i)$ সমীকরণটির আর একটি মূল। যে সমীকরণের মূল দুইটি $(1 + 2i)$ এবং $(1 - 2i)$ সেই সমীকরণটি $x^2 - 2x + 5 = 0$.

কেননা মূল দুইটির সমষ্টি 2 এবং গুণফল $(1 - 4i^2) = 5$

এখন, $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x - 20$

$= x^2(x^2 - 2x + 5) - 3x^3 + 2x^2 - 7x - 20$

$= x(x^2 - 2x + 5) - 3x(x^2 - 2x + 5) - 4(x^2 - 2x + 5)$

$= (x^2 - 2x + 5)(x^2 - 3x - 4)$

সুতরাং প্রদত্ত চতুর্ঘাত সমীকরণটির অন্য দুইটি মূল হবে $x^2 - 3x - 4 = 0$ সমীকরণের এর মূল।

$\therefore x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 4, -1$ $\therefore$ মূলগুলো $(1 \pm 2i), 4, -1$ **Ans.**

For practice:

1. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল $\sqrt{-1}$; সমীকরণটি সমাধান কর।

   Ans: $+\sqrt{-1}, -2 \pm \sqrt{-1}$

2. $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল $(3 + \sqrt{2})$। সমীকরণটি সমাধান কর।

   Ans: $3 \pm \sqrt{-2}, 2, 1$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. দুজন ছাত্রকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে বলা হল। একজন ছাত্র সমীকরণের x এর সহগটি ভুল লিখে 2 এবং 6 এই বীজ দুটি পেল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে 2 এবং –9 এই বীজ দুটি পেল। নির্ভুল সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় কর। [16-17]

Solve ধরি, সঠিক সমীকরণ, $ax^2 + bx + c = 0$

১ম ছাত্রের জন্য

$ax^2 + b_1x + c = 0$, $x = 2, 6$ ....(i)

২য় ছাত্রের জন্য

$ax^2 + bx + c_2 = 0$, $x = 2, -9$ ....(ii)

১ম ছাত্রের জন্য $(x - 2)(x - 6) = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$\therefore a = 1, c = 12$

২য় ছাত্রের জন্য

$(x - 2)(x + 9) = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0$

$\therefore b = 7, a = 1$

$\therefore$ সঠিক সমীকরণ, $x^2 + 7x + 12 = 0$

$\therefore x = -4, -3$ $\therefore$ সঠিক মূলদ্বয় –4, –3 **Ans.**

02. $x^3 - px^2 - 14x - 24 = 0$ **[15-16]**
$x^2 - qx + 6 = 0$
$x^2 - 2x + r = 0$
১ম সমীকরণের মূলগুলো ২য় ও ৩য় সমীকরণের মূলগুলোর সমান।
$p + q + r = ?$

Solve ধরি, α, β, γ হল $x^3 - px^2 - 14x - 24 = 0$ এর তিনটি মূল প্রশ্নমতে এই তিনটি মূলের মধ্যে একটি মূল $x^2 - qx + 6 = 0$ এবং $x^2 - 2x + r = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল হবে।
ধরি, $x^2 - qx + 6 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β
$\therefore x^2 - 2x + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, γ
তাহলে, $\alpha + \beta = q$ .... (i); $\alpha\beta = 6$ .... (ii)
এবং $\alpha + \gamma = 2$ .... (iii); $\alpha\gamma = r$ .... (iv)
আবার, $\alpha + \beta + \gamma = p$ .... (v)
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -14$ .... (vi)
$\alpha\beta\gamma = 24$ .... (vii)
(ii) ও (vii) হতে পাই, $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta} = \frac{24}{6} = 4 \therefore \gamma = 4$
(i), (vi) ও (ii) হতে পাই,
$6 + (\alpha + \beta)\gamma = -14 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-20}{\gamma} = \frac{-20}{4} = -5 \Rightarrow q = -5$
(iii) হতে পাই, $\alpha + \gamma = 2 \Rightarrow \alpha = 2 - \gamma = -2$
আবার, $\alpha\beta = 6 \Rightarrow \beta = \frac{6}{\alpha} = \frac{6}{-2} = -3 \quad \therefore r = \alpha\gamma = (-2)(4) = -8$
$p = \alpha + \beta + \gamma = -2 - 3 + 4 = -1 \therefore p + q + r = -1 - 5 - 8 = -14$ **Ans.**

03. যদি $x^3 - px^2 - qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b, c হয় তবে $a^3 + b^3 + c^3$ এর মান নির্ণয় কর। [14-15]

Solve $x^3 - px^2 - qx - r = 0$ মূলত্রয় a, b, c হলে
$a + b + c = p, ab + bc + ca = -q, abc = r$
এখন, $a^3 + b^3 + c^3$
$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$
$= (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)\} + 3abc$
$= p(p^2 + 3q) + 3r = p^3 + 3pq + 3r$ **Ans.**

04. 'a' এর বাস্তব মান কত হলে $x^3 + 3ax^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমনে থাকবে? সমীকরণটির মূলগুলোও নির্ণয় কর। [14-15]

Solve $x^3 + 3ax^2 + x + 1 = 0$
∴ মূলগুলো সমান্তর প্রগমন ∴ মূলগুলো ধরি, $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$
এখন, $\alpha - d + \alpha + \alpha - d = -3a$
$\Rightarrow 3\alpha = -3a \Rightarrow \alpha = -a.$
$\alpha = -a$, প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই
$-a^3 + 3a^3 - a + 1 = 0 \Rightarrow 2a^3 = a - 1$ শর্ত
আবার, $2a^3 - a + 1 = 0 \Rightarrow 2a^3 + 2a^2 - 2a^2 + a + 1 = 0$
$\Rightarrow 2a^2(a + 1) - 2a(a + 1) + (a + 1) = 0$
$\Rightarrow (a + 1)(2a^2 - 2a + 1) = 0 \quad \Rightarrow a = -1, 2a^2 - 2a + 1 = 0$
$\therefore a = -1$ এবং $a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1}{2}(1 \pm i)$
$\Rightarrow -\alpha = -1$
$\therefore \alpha = 1 \quad \Rightarrow -\alpha = \frac{1}{2}(1 \pm i) \therefore \alpha = \frac{1}{2}(-1 \pm i)$ যা গ্রহণযোগ্য নহে
আবার, $\alpha(\alpha + d) + \alpha(\alpha - d) + (\alpha - d)(\alpha + d) = 1$
$\Rightarrow \alpha(\alpha + d + \alpha - d) + \alpha^2 - d^2 = 1$
$\Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha^2 - d^2 = 1 \Rightarrow d^2 = 3\alpha^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$
∴ মূলগুলো, $1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}$ **Ans.**

05. যদি $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + qx + 8p = 0$ এবং $4x^3 + 16x^2$... সমীকরণগুলোর একটি সাধারণ মূল থাকে এবং $4x^3 + 16x^2$... সমীকরণের অন্য দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, p এবং q ... নির্ণয় কর। [13-14]

Solve ধরি সাধারণ মূলটি a
$\therefore a^2 + ap + q = 0$ .... (i) ও $a^2 + aq + 8p = 0$ ...
এবং ধরি, $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ সমীকরণের মূলত্রয় a, b, ...
$\therefore a + b - b = \frac{-16}{4} = -4 \therefore a = -4$
$\therefore$ (i) ও (ii) $\Rightarrow 16 - 4p + q = 0$ .... (iii)
$16 - 4q + 8p = 0$ .... (iv)
(iii) ও (iv) সমাধান করে পাই, $p = 10$ ও $q = 24$

06. $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে, $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং ... দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। [05-06]

Solve $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = \frac{5}{2}$
এখন, $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3}$
$= \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{-27 + 90}{125} = \frac{63}{125}$
এবং $\frac{1}{\alpha^3} \times \frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{(\alpha\beta)^3} = \frac{8}{125}$
∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{63x}{125} + \frac{8}{125} = 0 \Rightarrow 125x^2 - 63x + 8$ ...

07. k এর মান কত হলে, $(k^2 - 3)x^2 + 3kx + (3k + 1) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপর মূলটির উল্টো হবে? অতঃপর সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় কর। [04-05; KUET : 14-15]

Solve মূলদ্বয় α এবং $\frac{1}{\alpha}$
∴ মূলদ্বয়ের গুণফল $\Rightarrow \frac{3k + 1}{k^2 - 3} = 1 \quad (\because \alpha \times \frac{1}{\alpha} = 1)$
$\therefore k^2 - 3k - 4 = 0 \quad \therefore k = 4, -1$
$\therefore k = -1$ হলে, সমীকরণটি $-2x - 3x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x$ ...
এর নিশ্চায়ক, $D = 3^2 - 4.2.2 = -7$ যা ঋণাত্মক।
∴ মূলদ্বয় জটিল অনুবন্ধী
আবার, $k = 4$ হলে, $13x^2 + 12x + 13 = 0$
এর নিশ্চায়ক, $D = 12^2 - 4.13.13 = -532$ যা ঋণাত্মক
∴ বাকী মূলদ্বয় অবাস্তব/ অনুবন্ধী জটিল
4, −1, এবং বাকী মূলদ্বয় অনুবন্ধী জটিল।

08. $27x^2 + 6x - (p + 2) = 0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান ... p এর মান বের কর। [03-04; CUET : 08-09]

Solve ধরি মূলদ্বয় α এবং α^2
∴ শর্তমতে $\alpha + \alpha^2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$
$\Rightarrow 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$
এবং $\alpha \cdot \alpha^2 = \alpha^3 = -\frac{P + 2}{27} \Rightarrow P = -27\alpha^3 - 2$
যখন $\alpha = -\frac{1}{3}$ তখন $P = -27\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2 = -1$
যখন $\alpha = -\frac{2}{3}$ তখন $P = -27\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 = 6$

...$x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি ... মূল থাকে, তবে $2x^2 + (p+q-2)x = (p+q-2)^2$ সমীকরণের ... নির্ণয় কর। [02-03]

Solve সাধারণ মূলটি α হলে,

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ .... (i) এবং $\alpha^2 + q\alpha + p = 0$ .... (ii)

... করে, $\alpha(p - q) - (p - q) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ $[\because p \neq q]$

... মান বসিয়ে, $p + q + 1 = 0 \Rightarrow p + q = -1$

..., $2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q - 2)^2$

...টি দাড়ায়, $2x^2 + (-1 - 2)x = (-1 - 2)^2$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$

$\Rightarrow 2x(x - 3) + 3(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(2x + 3) = 0$

... 3 এবং $\frac{-3}{2}$ **Ans.**

... α ও β অসমান অথচ $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ হয়, তবে α/β ... β/α মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [00-01]

Solve Here, $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ .... (i) এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ ..... (ii)

Now, (i) – (ii) $\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 5(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 5$ $[\because \alpha \neq \beta]$ .... (iii)

Again, (i) + (ii) $\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) - 6$

$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 5(\alpha + \beta) - 6$ [(iii) থেকে]

$\Rightarrow 25 - 2\alpha\beta = 5 \times 5 - 6 \Rightarrow \alpha\beta = 3$

নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 0$

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - \{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - (25-6)x + 3 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 19x + 3 = 0$ **Ans.**

... কর : $2x^2+x+5=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β এবং $2x^2-3x+2b = 0$ ... মূলদ্বয় $(\alpha + 1), (\beta + 1)$ হলে, b-এর মান নির্ণয় কর। [98-99]

Solve ১ম সমীকরণ হতে,

$\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$ ... (i) এবং $\alpha\beta = \frac{5}{2}$ ... (ii)

... সমীকরণ হতে, $\Rightarrow (\alpha+1)(\beta+1) = b$

$\Rightarrow b = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 3$ **Ans.**

... $px^2 + 2x + 1 = 0$ ও $x^2 + 2x + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি ... মূল থাকে, তবে p এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর। [96-97]

Solve ধরি, সাধারণ মূলটি α

$p\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ ... (i) এবং $\alpha^2 + 2\alpha + p = 0$ ... (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow \alpha^2(p - 1) - 1(p - 1) = 0$

$\Rightarrow (\alpha^2 - 1)(p - 1) = 0 \therefore p = 1, \therefore \alpha = \pm 1$

... $\alpha = 1, p = -3$ এবং $\alpha = -1, p = 1$

... 1 হলে, সমীকরণদ্বয় অভিন্ন হবে। $\therefore p \neq 1 \therefore p = -3$ **Ans.**

... $= ax^2 + bx$ ফাংশনের মান শূন্য হলে মূল কি কি? শর্তসহ ... $ax^2 + bx = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলসমূহের শ্রেণী উল্লেখ কর। [97-98]

Solve $f(x) = ax^2 + bx$ ফাংশনের মান শূন্য হলে $ax^2 + bx = 0$

$\Rightarrow x = 0, -\frac{b}{a}$ $\therefore$ মূলদ্বয় 0 এবং $-\frac{b}{a}$

... $ax^2 + bx = 0$ সমীকরণের একটি মূল সর্বদা শূন্য (0) এবং অপর মূলটি ... মূলদ হবে যদি এবং কেবল যদি a, b, c প্রত্যেকেই মূলদ হয়।

... (i) অপর মূলটি ধনাত্মক হবে যদি a এবং b বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

... (ii) অপর মূলটি ঋণাত্মক হবে যদি a এবং b একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

... $a \neq 0$ এবং $b = 0$ হলে উভয় মূল শূন্য হবে।

... $a = 0$ হলে একটি মূল শূন্য এবং অপর মূলটি অসীম হবে। **Ans.**

14. চতুর্থ ঘাতবিশিষ্ট একটি সমীকরণ গঠন কর যার দুটি মূল যথাক্রমে 2, 3 এবং বাকী দুটি মূল $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণের মূল। [02-03]

Solve 2, 3 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থ ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ, $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 4x + 5) = 0$

$\Rightarrow x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x^3 - 20x^2 - 25x + 6x^2 + 24x + 30 = 0$

$\Rightarrow x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 30 = 0$ **Ans**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয়, তবে α^2 ও β^2 মূল সম্বলিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। α ও β এর মান নির্ণয় কর। [06-07]

Solve $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে

$\alpha + \beta = -2b$ .... (i)

$\alpha\beta = c$ .... (ii)

$\therefore \alpha^2, \beta^2$ মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}x + (\alpha\beta)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - (4b^2 - 2c)x + c^2 = 0$

$\therefore x^2 - 2(2b^2 - c)x + c^2 = 0$

আবার $x^2 + 2bx + c = 0$ (ধরি $\alpha > \beta$)

$\Rightarrow (x + b)^2 = b^2 - c \Rightarrow x + b = \pm\sqrt{b^2 - c}$

$\therefore x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$ $\therefore \alpha = -b + \sqrt{b^2 - c}$

এবং $\beta = -b - \sqrt{b^2 - c^2}$ **Ans.**

02. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে, $2x^2 - 4(1 + c)x + b^2 + 2c^2 + 2 = 0$ সমীকরণটির মূল দুটি কাল্পনিক হবে। [05-06]

Solve $D_1 = b^2 - 4c > 0$

$D_2 = 4^2(1 + c)^2 - 4(b^2 + 2c^2 + 2).2$

$= 16 + 32c + 16c^2 - 8b^2 - 16c^2 - 16$

$= 32c - 8b^2 = -8(b^2 - 4c) < 0$

$\therefore$ ১ম সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে ২য় সমীকরণের মূল দুইটি কাল্পনিক হবে। **(Showed)**

03. $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে এরূপ একটি অথও সহগবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার মূল $\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}, \frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ হবে। [04-05]

Solve এখানে $\alpha + \beta = \frac{5}{7}$ এবং $\alpha\beta = -\frac{3}{7}$

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right) + \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$

$= \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = 4\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) = 4\frac{\frac{5}{7}}{-\frac{3}{7}} = -\frac{20}{3}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right)\left(\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{(\beta + 3\alpha)(3\beta + \alpha)}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{3\beta^2 + \alpha\beta + 9\alpha\beta + 3\alpha^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{3(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{3 \times \frac{25}{49} + 4\left(-\frac{3}{7}\right)}{\frac{9}{49}} = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 + \frac{20}{3}x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 20x - 3 = 0$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $x^2 + px + 8 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 এবং $x^2 + px + n = 0$ সমীকরণের মূল দুটি পরস্পর সমান। n এর মান কত? [13-14; BUET : 09-10; CUET: 11-12]

Solve $x^2 + px + 8 = 0$ ......(i)

$x^2 + px + n = 0$ ......(ii)

(i) সমীকরণের একটি মূল 4 ও অপর মূল α.

$4 + \alpha = -p$ ......(iii)

$4\alpha = 8 \quad \therefore \alpha = 2$

α এর মান (iii) এ বসালে,

$4 + 2 = -p \quad \therefore p = -6$

(ii) এর ক্ষেত্রে $x^2 - 6x + n = 0$ এর মূল β হলে,

$2\beta = 6 \therefore \beta = 3$

এবং $\beta.\beta = \beta^2 = n \therefore n = 3^2 = 9$ **Ans.**

02. নিম্নের সমীকরণের যে কোন দুটি মূলের যোগফল শূন্য হলে সমীকরণটির অপর দুইটি মূলের মান নির্ণয় করঃ $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$ [09-10]

Solve ধরি α, β, r প্রদত্ত সমীকরণের মূল চতুষ্টয় α, – α, β, γ

$\therefore \alpha - \alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{8} \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{1}{4}$

আবার, $\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = -\frac{6}{8} \Rightarrow -\alpha^2(\beta + \gamma) = -\frac{3}{4}$

$\alpha^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha^2 = 3$

এবং $-\alpha^2\beta\gamma = \frac{9}{8} \Rightarrow -3\beta\gamma = \frac{9}{8} \Rightarrow \beta\gamma = -\frac{3}{8}$

$\therefore \beta + \gamma = \frac{1}{4}$ এবং $\beta\gamma = -\frac{3}{8}$

∴ β, γ দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণ,

$x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (4x - 3)(2x + 1) = 0, \quad \therefore x = \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$ **Ans.**

03. যদি $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ রাশি দুটি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হয় তবে দেখাও যে, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$ সমীকরণের মূল দুটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ [07-08]

Solve এখানে $\alpha + \sqrt{\beta} + \alpha - \sqrt{\beta} = -p \Rightarrow \alpha = -\frac{p}{2}$

আবার, $(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta}) = q$

$\Rightarrow \alpha^2 - \beta = q \Rightarrow \frac{p^2}{4} - \beta = q \Rightarrow \beta = \frac{p^2 - 4q}{4}$

আবার, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{2}{\alpha} = -\frac{4}{p}$

এবং $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$

$= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta} = \frac{4}{p^2} - \frac{4}{p^2 - 4q} = \frac{-16q}{p^2(p^2 - 4q)}$

∴ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - \left(\frac{-4}{p}\right)x - \frac{16q}{p^2(p^2 - 4q)} = 0$

$\Rightarrow (p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$ **(Showed)**

04. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত r হয়, [illegible] কর যে, $ac(1 + r)^2 = b^2r$ [05-06]

Solve ধরি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, rα

$\therefore \alpha + r\alpha = -\frac{b}{a}; \alpha(1 + r) = -\frac{b}{a}$ .... (i)

$\alpha.r\alpha = \frac{c}{a}; \alpha^2r = \frac{c}{a}$ .... (ii)

$(i)^2 \div (ii)$

$\frac{\alpha^2(1 + r)^2}{\alpha^2r} = \frac{b^2}{a^2} \div \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{(1 + r)^2}{r} = \frac{b^2}{ac} \therefore ac(1 + r)^2 = b^2r$

05. $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণ[illegible] সাধারণ মূল থাকলে প্রমাণ কর যে, $p + q + 1 = 0$ [03-04; RUET : 09-10]

Solve ধরি সাধারণ মূল α

$\therefore p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0$ .... (i)

এবং $q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0$ .... (ii)

$(i) - (ii) \Rightarrow$

$\alpha^2(p - q) + \alpha(q - p) = 0 \Rightarrow (p - q)(\alpha^2 - \alpha) = 0$

কিন্তু $\alpha \neq 0$ এবং $p \neq q \therefore \alpha = 1$

(i) নং এ α = 1 বসালে $p + q + 1 = 0 \quad \therefore \alpha = 1$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরনের মূলদ্বয় α ও β হলে $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$ এর মান নির্ণয় কর। [15-16]

Solve এখানে, α ও β, $ax^2 + bx + c = 0$ এর দুটি মূল

$\therefore \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow a\alpha + b = -\frac{c}{\alpha}$

অনুরূপভাবে, $a\beta + b = \frac{-c}{\beta}$

আবার, $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2} = \left(\frac{-c}{\alpha}\right)^{-2} + \left(\frac{-c}{\beta}\right)^{-2}$

$= \frac{\alpha^2}{c^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{c^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{c^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}}{c^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2c^2}$

02. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α এবং β হয়, [illegible] $ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$-এর মূল দুইটি α, β-এর [illegible] কর। [12-13]

Solve $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে,

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow ac(x^2 + 1) - (b^2 - 2ac)x = 0$

$\Rightarrow x^2ac - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

$\Rightarrow x^2.\frac{c}{a} - \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ [a^2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow x^2\alpha\beta - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2\alpha\beta - \alpha^2x - \beta^2x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x\alpha(x\beta - \alpha) - \beta(x\beta - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (x\beta - \alpha)(x\alpha - \beta) = 0$

$\therefore x = \frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$

$+ qx + r = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β। $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। [11-12]

Solve $\alpha+\beta=-\frac{q}{p}$ $\quad \alpha\beta=\frac{r}{p}$ এখন $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3.\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\frac{r^3}{p^3}}=\frac{-\frac{q^3}{p^3}+3.\frac{r}{p}\frac{q}{p}}{\frac{r^3}{p^3}}$$

$=\frac{-q^3+3pqr}{r^3}$ এবং $\frac{1}{\alpha^3}.\frac{1}{\beta^3}=\frac{p^3}{r^3}$

$\frac{1}{\alpha^3}$ ও $\frac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2-\frac{(3pqr-q^3)x}{r^3}+\frac{p^3}{r^3}=0$

$r^3x^2-(3pqr-q^3)x+p^3=0$ **Ans.**

$+ bx + c = 0$ এর একটি মূল অপরটির n গুণ হলে দেখাও যে, $= ac(1+n)^2$ [10-11]

Solve ধরি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের, মূলদ্বয় α এবং $n\alpha$

$\alpha+n\alpha=\frac{-b}{a}\Rightarrow\alpha(1+n)=-\frac{-b}{a}$

$\alpha=-\frac{-b}{(1+n)a}$ আবার, $\alpha.n\alpha=\frac{c}{a}\Rightarrow n\alpha^2=\frac{c}{a}$

$n\left(\frac{b}{a(1+n)}\right)^2=\frac{c}{a}$ $\quad\left[\because\alpha=-\frac{b}{(1+n)a}\right]$

$nb^2=\frac{ca^2(1+n)^2}{a}=ca(1+n)^2$ **(Showed)**

$px^2+qx+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m:n হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=0$ [08-09]

Solve ধরি, মূলদ্বয় α,β $\therefore\alpha+\beta=-\frac{q}{p}$ এবং $\alpha\beta=\frac{q}{p}$

প্রশ্নমতে, $\frac{m}{n}=\frac{\alpha}{\beta}\therefore\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{q}{p}}$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=\left(\frac{-\frac{q}{p}}{\sqrt{\frac{q}{p}}}\right)+\sqrt{\frac{q}{p}}=-\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=0$$

L.S = R.S **(Proved)**

$+ bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে,

প্রমাণ কর যে, $(a\alpha+b)^{-2}+(a\beta+b)^{-2}=\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$ [07-08]

Solve $ax^2+bx+c=0$

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

এখন, $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

$(a\alpha+b)=-a\beta$

$(a\alpha+b)^{-2}=(a\beta)^{-2}$ ... (i)

অনুরূপভাবে, $(a\beta+b)^{-2}=(a\alpha)^{-2}$ .... (ii)

$$L.S=(a\alpha+b)^{-2}+(a\beta+b)^{-2}=\frac{1}{(a\beta)^2}+\frac{1}{(a\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2(\alpha\beta)^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{a^2(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{a^2\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ca}{a^2c^2}=R.S$$

(Proved)

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $(k-4)x^2-2(k+2)x-1=0;\ (k\neq0)$ সমীকরণের মূল দুটি সমান হলে, k এর মান হবে– [13-14]

A. –5   B. 5
C. 0   D. 1

Ans A Solve ধরি, প্রদত্ত সমীকরণের দুটি মূল সমান হলে ধরি মূল α,α

$\therefore 2\alpha=\frac{2(k+2)}{k-4}$

$\Rightarrow\alpha=\frac{k+2}{k-4}$

আবার, $\alpha^2=\frac{-1}{k-4}\Rightarrow\frac{(k+2)^2}{(k-4)^2}=\frac{-1}{k-4}$

$\Rightarrow\frac{k^2+4k+4}{(k-4)}=-1$

$\Rightarrow k^2+4k+4=-k+4$

$\Rightarrow k^2+5k=0\Rightarrow k(k+5)=0$

কিন্তু $k\neq0$ $\therefore k+5=0\therefore k=-5$

02. k এর মান কত হলে, $(k+1)x^2+2(k+3)x+2k+3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে? [12-13,08-09]

A. 3, 2   B. 3, –2
C. –3, 2   D. –3, –2

Ans B Solve রাশিটি পূর্ণ বর্গ হলে, এর নিশ্চায়ক শূন্য হবে।

$\therefore\{2(k+3)\}^2-4\times(k+1)\times(2k+3)=0$

$\Rightarrow4k^2+24k+36-8k^2-20k-12=0$

$\Rightarrow-4k^2+4k+24=0$

$\Rightarrow4k^2-4k-24=0$

$\Rightarrow k^2-k-6=0$

$\Rightarrow k^2-3k+2k-6=0$

$\Rightarrow(k-3)(k+2)=0$

$\therefore k=3,-2$

03. k-এর মান কত হলে, $(3k+1)x^2+(11+k)x+9=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে? [11-12]

A. $k>1$ B. $k<85$
C. $k\geq85$ D. $1<k<85$

Ans D Solve মূলদ্বয় জটিল হলে, নিশ্চায়ক <0

$\Rightarrow(11+k)^2-4(3k+1)\times9<0$

$\Rightarrow k^2-86k+85<0$

$\Rightarrow(k-85)(k-1)<0$

$\therefore1<k<85$

05. x^2-2x+5 এর ন্যূনতম মান হবে: [09-10]

A. 3   B. $\frac{11}{4}$
C. 4   D. 5

Ans C Solve $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ $\therefore$ ন্যূনতম মান = 4

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $6x^3 - x + 13 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum(\alpha - \beta)^2$ এর মান কত? [17-18]

A. $\frac{-1}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. 1 D. -1 E. $\frac{2}{3}$

Ans C Solve $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{1}{6}$ এবং $\alpha\beta\gamma = -\frac{13}{6}$

এখন $\sum(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$

$= 2\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} = 2\left(0 + 3 \times \frac{1}{6}\right) = 1$

02. যদি $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $x^2 - 2x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে k এর মান কত? [16-17]

A. $\pm\frac{2}{5}$ B. $\pm\frac{1}{5}$ C. $\pm\frac{3}{5}$ D. $\pm\frac{2}{7}$ E. $\pm\frac{2}{3}$

Ans E Solve ধরি, $x^2 - 2x + 9 = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha, \alpha r$ এবং $x^2 + kx + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় $\beta, \beta r$ $\therefore \alpha.\alpha r = 9 \Rightarrow \alpha^2 r = 9$

এবং $\beta^2 r = 1$ $\therefore \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 9 \Rightarrow \alpha/\beta = \pm 3$

আবার, $\alpha + \alpha r = 2 \Rightarrow \alpha(1 + r) = 2$ এবং $\beta + \beta r = -k \Rightarrow \beta(1 + r) = -k$

$\therefore \frac{\alpha(1 + r)}{\beta(1 + r)} = -\frac{2}{k} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-2}{k} = \pm 3 \therefore k = \pm\frac{2}{3}$

03. $2x^3 + 3x^2 + 6x - 65 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\frac{5}{2}$ হলে, অপর মূলগুলো হলো- [15-16]

A. $2 \pm 3i$ B. $4 \pm 3i$ C. $3 \pm 2i$ D. $-2 \pm 3i$ E. $-4 \pm 3i$

Ans D Solve $2x^3 + 3x^2 + 6x - 65 = 0$

$\Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 8x^2 - 20x + 26x - 65 = 0$

$\Rightarrow x^2(2x - 5) + 4x(2x - 5) + 13(2x - 5) = 0$

$\Rightarrow (2x - 5)(x^2 + 4x + 13) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 13 = 0$

$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 2 \times 3i}{2} = -2 \pm 3i$

04. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর বিপরীত মূলগুলো দ্বারা গঠিত সমীকরণ হলো- [13-14]

A. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ B. $x^3 + qx^2 + rx + p = 0$
C. $rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$ D. $rx^3 + qx^2 + px - 1 = 0$
E. $rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

Ans E Solve $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ মূল α, β, γ হলে
$\alpha + \beta + \gamma = p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = r$ এই সমীকরণের বিপরীত মূলগুলো যথাক্রমে, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ হলে, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{q}{r}$

$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\gamma + \alpha + \beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{p}{r}$ এবং $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{r}$

এখন, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ হবে,

$\Rightarrow x^3 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right).x - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 0$

$\Rightarrow x^3 - \frac{q}{r}x^2 + \frac{p}{r}x - \frac{1}{r} = 0 \therefore rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

অথবা, $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x}\right)^3 - p.\left(\frac{1}{x}\right)^2 + q.\left(\frac{1}{x}\right) - r = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x^3} - \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x} - r = 0 \Rightarrow 1 - px + qx^2 - rx^3 = 0$

$\therefore rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$

05. যদি $\alpha - \beta = 8$ ও $\alpha^3 - \beta^3 = 152$ হয়, তবে α ও β মূল ... সমীকরণটি হলো- [12-13]

A. $x^2 - 8x - 12 = 0$ B. $x^2 + 2x - 15 = 0$
C. $x^2 + 12x + 15 = 0$ D. $x^2 + 15x - 2 ...$
E. $x^2 + 12x + 8 = 0$

Ans B Solve $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{152 - 8^3}{3 \times 8} = -15$

$\alpha + \beta = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha B} = \sqrt{8^2 + 4(-15)} = \pm 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 \pm 2x - 15 = 0$

06. যদি $\alpha + \beta = 3$ ও $\alpha^3 + \beta^3 = 7$ হয়, তবে, α ও β যে সমীকরণের ... হলো- [11-12]

A. $x^2 - 3x + 7 = 0$ B. $9x^2 - 27x + 20 = 0$
C. $9x^2 - 20x + 27 = 0$ D. $3x^2 - 21x + 20 = 0$
E. $3x^2 - 21x + 21 = 0$

Ans B Solve $\alpha^3 + \beta^3 = 7$

$\Rightarrow (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 7$

$\Rightarrow 3^3 - 3\alpha\beta \times 3 = 7 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{20}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) $x +$ মূলদ্বয়ের ...

$\therefore x^2 - 3x + \frac{20}{9} = 0 \quad \therefore 9x^2 - 27x + 20 = 0$

07. $27x^3 - 63x^2 + 42x - 8 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো কোনটি? ...

A. $\frac{1}{27}, \frac{-2}{3}, -12$ B. $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, 2$ C. $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, ...$
D. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ E. $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{3}$

Ans D Solve $27x^3 - 63x^2 + 42x - 8 = 0$

এখানে, $8 = 2 \times 2 \times 2$

এবং $27 = 3 \times 3 \times 3$

মূলত্রয়ের গুণফল $= \frac{8}{27}$

যেহেতু সমীকরনের রাশিগুলোর চিহ্ন পর্যায়ক্রমিকভাবে (+), (–) ... করেছে। সুতরাং সবগুলো মূল ধনাত্মক। সুতরাং সম্ভাব্য মূলত্রয় হতে ...
$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ অথবা $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ অথবা $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$ অথবা $\left(1, ...\right)$
$\left(1, \frac{4}{3}, \frac{2}{9}\right)$ অথবা $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{8}{9}\right)$ ইত্যাদি।

মূলগুলোর সর্বোচ্চ মান হতে পারে $= \sqrt{\left(\frac{63}{27}\right)^2 - 2\frac{42}{27}} = 1.52...$

সুতরাং একমাত্র সম্ভাব্য মূলত্রয় $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ হওয়া সম্ভব।

08. p এর মান কত হলে $(p-1)x^2 + 2(p+2)x + (p-3)$ রাশিটি একটি ... হবে? [09-10]

A. $\frac{8}{7}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{8}$
D. $\frac{7}{8}$ E. 8

Ans B Solve $4(p + 2)^2 - 4(p - 3)(p - 1) = 0$

$\Rightarrow p^2 + 4p + 4 - p^2 + 4p - 3 = 0$

$\Rightarrow 8p + 1 = 0 \quad \therefore p = -\frac{1}{8}$

... $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হয়, তবে $\frac{q}{q-\alpha}$ ও $\frac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [07-08]

... $x^2 - 2px + 3 = 0$ B. $x^2 - 5px + 2q = 0$
... $x^2 - qx + p = 0$ D. $x^2 - 3px + 2p = 0$
... $x^2 - px + q = 0$

Ans E Solve $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে

... $p\alpha + q = 0 \Rightarrow -\alpha(p-\alpha) + q = 0$

... $= \frac{q}{p-\alpha}$ অনুরূপভাবে $\beta = \frac{q}{p-\beta}$

... $\frac{q}{p-\alpha}$ এবং $\frac{q}{p-\beta}$ মূলদ্বয় বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ হবে

... $px + q = 0$

... $bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুটি সমান হবে যদি- [05-06]

... $b^2 > 4ac$ B. $b^2 < 4ac$
... $b^2 = 4ac$ D. $b = 0$ **Ans. C**

... দ্বিঘাত সমীকরণ $x^2 - 11x + a = 0$ ও $x^2 - 14x + 2a = 0$ এর ...টি সাধারণ মূল থাকে তবে 'a' মানসমূহ হবে- [08-09; RUET:11-12]

... 0, 24 B. 0, – 24 C. 1, –1
... –2, 1 E. None

Ans A Solve সাধারণ মূল α হলে,

... $\alpha^2 - 11\alpha + a = 0$
... $\alpha^2 - 14\alpha + 2a = 0$

... $3\alpha = a$

... $\alpha = \frac{a}{3}$ $\therefore \frac{a^2}{9} - \frac{11a}{3} + a = 0$

... $a^2 - 33a + 9a = 0$

... $a(a - 24) = 0 \therefore a = 0, 24$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... $2x^2 + 6x + 5 = 0$ সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর- [13-14]

... Complex & Unequal B. Complex & equal
... Real & unequal D. None

Ans A Solve $2x^2 + 6x + 5 = 0$

...নিশ্চায়ক, $D = (6)^2 - 4.2.5 = 36 - 40 = -4 < 0$

... $D < 0$ তাই মূলদ্বয় অবাস্তব, অসমান।

... $x^3 + px + q = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হয়, তবে $\Sigma\alpha^2\beta^2$ এর মান নির্ণয় কর। [12-13]

... $p^2 - 2pq$ B. $-2pq$ C. p^2 D. None

Ans C Solve

... $px + q = 0$	$\therefore \Sigma\alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = y$ (ধরি)
... $\alpha + \beta + \gamma = 0$	Now, $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2$
... $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$	$= (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) + 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$
... $\alpha\beta\gamma = -q$	$\Rightarrow p^2 = y + 2 \times (-q) \times 0 \therefore y = p^2$

...এর মান কত হলে $(m^2-3)x^2 + 3mx + (3m + 1) = 0$ সমীকরণটির ...মূলগুলো পরস্পর উল্টো হবে? [10-11]

... 4 or –1 B. –4 or +1
... $\frac{3}{4}$ or +1 D. None

Ans A Solve প্রশ্নমতে, $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{3m+1}{m^2-3}$

$\Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$
$\therefore m = 4, -1$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. সমীকরণ $\frac{1}{x-\sqrt{3}k} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\sqrt{3}k} = 0$ এর সমাধান- [13-14]

A. $0, \pm\sqrt{3}k$ B. $0, \pm k$ C. $\pm k$
D. $\pm\frac{k}{\sqrt{3}}$ E. None

Ans C Solve $\frac{1}{x-\sqrt{3}k} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\sqrt{3}k} = 0$

$\Rightarrow \frac{x(x+\sqrt{3}k) + x^2 - 3k^2 + x(x-\sqrt{3}k)}{x(x-\sqrt{3}k)(x+\sqrt{3}k)} = 0$

$\Rightarrow x^2 + \sqrt{3}xk + x^2 - 3k^2 + x^2 - \sqrt{3}xk = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 3k^2 = 0 \therefore x^2 = k^2 \therefore x = \pm k$

02. $(4-k)x^2 + 2(k+2)x + 8k + 1 = 0$-এর মূলদ্বয় সমান হবে, যদি- [12-13]

A. k = 0 or k = 4 B. k = 4 or k = 3 C. k = 3
D. k = 0 or k = 3 E. None

Ans D Solve মূলদ্বয় সমান হবে যদি নিশ্চায়ক শূন্য হয়।

$\therefore$ নিশ্চায়ক: $\{2(k+2)\}^2 - 4(4-k)(8k+1) = 0$

$\Rightarrow 4k^2 + 16k + 16 - 4(32k + 4 - 8k^2 - k) = 0$

$\Rightarrow 4k^2 + 16k + 16 + 32k^2 - 16 - 124k = 0$

$\Rightarrow 36k^2 - 108k = 0 \Rightarrow 36k(k-3) = 0 \therefore k = 0$ বা $k = 3$

03. যদি $ax^2+2cx+b = 0$ এবং $ax^2+2bx+c = 0$, $(b \neq c)$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ মূল থাকে, তবে a+4b+4c এর মান কত? [09-10]

A. 0 B. –1 C. –3
D. 1 E. None

Ans A Solve

$ax^2 + 2cx + b = 0$
$ax^2 + 2bx + c = 0$
(–) (–) (–)

$2x(c-b) + (b-c) = 0 \Rightarrow (b-c)(2x-1) = 0$ $[\because b \neq c]$

$\therefore x = \frac{1}{2} \therefore a\frac{1}{4} + 2c\frac{1}{2} + b = 0 \Rightarrow a + 4b + 4c = 0$

04. সমীকরণ $x^4 + a^2x^2 + a^4 = 0$ এর মূলগুলি (a বাস্তব) (The roots of equation $x^4 + a^2x^2 + x^4 = 0$ are (a real))– [09-10]

A. বাস্তব B. জটিল
C. কাল্পনিক D. জটিল (Complex) ও কাল্পনিক
E. কোনটিই নয়

Ans B Solve ধরি, $x^2 = y$

$\therefore y^2 + a^2y + a^4 = 0 \Rightarrow y^2 + 2a^2y - a^2y + a^4 = 0$

$\Rightarrow (y + a^2)^2 = a^2y \Rightarrow y + a^2 = \pm a\sqrt{y} \Rightarrow x^2 + a^2 = \pm ax$

$\Rightarrow x^2 \pm ax + a^2 = 0$

নিশ্চায়ক $= a^2 - 4 \times 1 \times a^2 = -3a^2 < 0 \therefore$ মূলগুলো জটিল।

05. $(x+\alpha)(x-\beta) + (x-\beta)(x+\gamma) + (x+\gamma)(x+\alpha) = 0$ সমীকরণের মূলগুলির যোগফল শূন্য হবে, যদি- [09-10]

A. $\alpha+\beta+\gamma$ B. $\alpha = \beta+\gamma$ C. $\beta = \alpha+\gamma$
D. $\gamma = \alpha+\beta$ E) কোনটিই নয়

Ans C Solve

$x^2-(-\alpha+\beta)x - \alpha\beta + x^2 + (\gamma-\beta)x - \gamma\beta + x^2 + (\gamma+\alpha)x + \gamma\alpha = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + (\alpha-\beta+\gamma-\beta+\alpha+\gamma)x - \alpha\beta - \beta\gamma + r\alpha = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + \{2(\alpha+\gamma) - 2\beta\}x - \alpha\beta - \beta\gamma - r\alpha = 0$

প্রশ্নমতে, $\frac{2(\alpha+\gamma) - 2\beta}{3} = 0 \therefore \alpha + \gamma = \beta$

SELF TEST: [Written (A)]

1. নিচের সমীকরণগুলোর মূলের প্রকৃতি নিশ্চায়কের সাহায্যে নির্ণয় কর।
   i. $x^2 - 5x - 2$ **Ans:** অমূলদ ও বাস্তব
   ii. $x^2 + 2(a + b)x + 2a^2b^2 = 0$; a, b বাস্তব **Ans:** অসমান ও জটিল
2. $(b + c - a)x^2 + (c + a - b)x + (a + b + c) = 0$ সমীকরনের মূল গুলো মূলদ হওয়ার শর্ত নির্ণয় কর। **Ans:** $a + b + c = 0$ এবং a,b,c মূলদ।
3. $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$ সমীকরনের মূলদ্বয় পরস্পর সমান হলে প্রমান কর যে, $b = \frac{1}{2}(a + c)$
4. $4x^2 + 2x - 1 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\cos\alpha$ হলে, দেখাও যে অপরটি $\cos3\alpha$ হবে।
5. $(2 + 3i)x^2 - bx + (3 - i) = 0$ সমীকরণের একটি মূল $(2 - i)$ হলে অপর মূল এবং b এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{1}{65}(17 - 19i)$ & $\frac{21}{5}(2 + i)$
6. $x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয় $\alpha\beta$ হলে p ও q এর মান নির্ণয় কর যখন $2x^2 + 10px + q = 0$ এর মূলদ্বয় $(\alpha + 4)$ ও $(\beta - 4)$।
   Ans: $p = -2; q = -48$

SELF TEST: [Written (B)]

1. $x^3 - 5x^2 - 16x - 80 = 0$ সমীকরনের মূলগুলো নির্ণয় কর যখন দুইটির যোগফল 0 হয়। **Ans:** 4, –4, 5
3. $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$ যদি দুটি মূলের গুণফল 1 হয় তবে মূলগুলি বের কর। **Ans:** (5, 1/5, 1)
4. $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ সমীকরনটির মূলগুলি সমান্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত হলে, সমীকরণটি সমাধান কর। **Ans:** (–1/2, 2, 9/2)
5. $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b, c হলে $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** 69
6. $x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $(1 + \sqrt{3})$। সমীকরণটি সমাধান কর। **Ans:** $1 \pm \sqrt{3}$, 5

SELF TEST: MCQ

01. $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো a, b, c হলে $(b + c)(c + a)(a + b)$ এর মান কত?
    A. 2r B. r C. –r D. r^2
02. $3x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে $\Sigma\alpha^2\beta = ?$
    A. 1 B. 2 C. –1 D. –2
03. $(b + c)x^2 - (a + b + c)x + a = 0$ সমীকরণটির মূলগুলো–
    A. বাস্তব B. অবাস্তব C. মূলদ D. None
04. $3x^2 - kx + 4 = 0$ সমীকরণটির একটি মূল অপরটির তিনগুন হলে k এর মান নির্ণয় কর।
    A. ± 8 B. ± 7 C. ± 6 D. ± 5
05. $x^2 - px + q = 0$ সমীকরনের মূল দুইটির ত্রিঘাতের যোগফল–
    A. $q^3 - 3pq$ B. $p^3 - q^3$ C. $p^3 - 3pq$ D. $p^3 - 3q$
06. $3x^2 - 6x + 4 = 0$ এর দুইটি α ও β হলে $\frac{\alpha - 1}{\beta + 1} + \frac{\beta - 1}{\alpha + 1} = ?$
    A. $-\frac{2}{13}$ B. $\frac{2}{13}$ C. $\frac{3}{13}$ D. $-\frac{13}{2}$
07. $x^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β এবং $x^2 + kbx + k^2c = 0$ এর মূলদ্বয় γ, δ হয় তবে $\alpha\gamma + \beta\delta$ ও $\alpha\delta + \beta\gamma$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ–
    A. $x^2 - kb^2x + 2k^2c(b^2 - 2b) = 0$
    B. $x^2 - kb^2x + 2k^2c(b^2 - 2c) = 0$
    C. $x^2 - kc^2x + 2k^2c(b^2 - 2c) = 0$
    D. $x^2 - kb^2x + 2k^2b(b^2 - 2c) = 0$
08. মূলদ সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল
    A. $x^2 - 5x + 7 = 0$ B. $x^2 - 4x + 7 = 0$
    C. $x^2 - 3x + 7 = 0$ D. $x^2 - 4x + 8 = 0$
09. $x^2 + px + q = 0$ সমীকরনের মূল দুইটির পার্থক্য 1 হলে নিচের কোনটি
    A. $p^2 + 4q^2 = (1 + 2q)^2$ B. $q^2 + 4p^2 = (1 + 2q)^2$
    C. $p^2 + q^2 = (1 + 2q)^2$ D. $p^2 + 4q^2 = (1 + q)^2$
10. $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাত 4:5 হলে নিচের কোনটি
    A. $12a^2 = 49ac$ B. $20b^2 = 81ac$
    C. $20c^2 = 81ab$ D. $20b^2 = 80ac$
11. যদি $5x^2 + 13x + k = 0$ একটি মূল অপরটির বিপরীত হয় তবে k এর
    A. 0 B. –3 C. 5 D. –5
12. যদি α, β $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হয় তবে $\alpha^3 +$
    A. $\frac{3abc + b^3}{a^3}$ B. $\frac{a^3 + b^3}{3abc}$ C. $\frac{3abc - b^3}{a^3}$ D. $\frac{-(3abc}{a^3}$
13. যদি $x^2 - ax + b = 0$ এবং $x^2 + bx - a = 0$ সমীকরণ সাধারণ বীজ থাকে তবে–
    A. a = b B. a + b = 1 C. a + b = 0 D. a –
14. a এর মান কত হলে $ax^2 + 3x + 4 = 0$ সমীকরনের মূলগুলো জটি
    A. $a = \frac{9}{16}$ B. $a < \frac{9}{16}$ C. $a > \frac{9}{16}$ D. $a \geq$
15. বাস্তব সহগ বিশিষ্ট এরূপ সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি মূল
    A. $9x^2 - 8x + 8 = 0$ B. $8x^2 + 9x + 8 = 0$ C. $8x^2 - 9x + 8 = 0$
16. একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যার মূলগুলো $x^2 + 7x + 12 = 0$ সমী প্রত্যেক মূল অপেক্ষা $\frac{1}{2}$ কম-
    A. $4x^2 + 32x + 62 = 0$ B. $3x^2 + 16x + 36 = 0$
    C. $4x^2 + 32x + 63 = 0$ D. None
17. কি শর্তে $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের দুইটি মূলের সমষ্টি
    A. pq = r B. pq + r = 0 C. $\frac{pq}{r} = 2$ D. None
18. k এর মান কত হলে $(k-1)x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ সমীকরণের মূল সমান হবে?
    A. 2,10 B. 12,10 C. 2,1 D. None
19. $x^2 - x + 1 = \lambda(x^2 + x + 1)$ সমীকরণের দুটি মূল বাস্তব ও অসমান মানের সীমা-
    A. $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ B. $\left[\frac{1}{3}, 3\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, 3\right]$ D. $\left]\frac{1}{3}\right.$
20. $\alpha^2 = 3\alpha - 1$; $\beta^2 = 3\beta - 1$ $[\alpha \neq \beta]$ হলে $\frac{\alpha}{\beta}$ ও $\frac{\beta}{\alpha}$ সমীকরণ নির্ণয় কর-
    A. $x^2 + 7x + 1 = 0$ B. $x^2 - 7x + 2 = 0$ C. $x^2 - 7x + 1 = 0$ D. x^2

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16.
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17.
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18.
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19.
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20.

Answer

20.C	19.A	18.A	17.A	16.C	15.C	14.C	13.D	12.C
10.B	09.A	08.B	07.B	06.A	05.C	04.A	03.C	02.A

...ে অধ্যায়	দ্বিপদী বিস্তৃতি (Binomial Expansions)
...তীয় পত্র	

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

...পদী উপপাদ্য সমস্যাগুলো বুয়েট ভর্তি পরীক্ষার জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

...পদী উপপাদ্য (Binomial Theorem): যে বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে একটি দ্বিপদ রাশির যে কোন শক্তি বা মূলকে একটি ধারায় প্রকাশ করা যায় ...কে দ্বিপদী উপপাদ্য বলা হয়।

...কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়।

$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + ... + {}^nC_ra^{n-r}x^r + ... + x^n.$

$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + ...$

$+ \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r + ... + x^n$; $n \in N$

... $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $(n+1)$

... r এর মান কখনও বিয়োগবোধক পূর্ণ সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ হতে পারে না।

...রণ পদ: $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদকে সাধারণ পদ বলা হয়। ...কে T_{r+1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে

$T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}x^r = \frac{n(n-1)....(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r$

... N হলে $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ বা পদসমূহ নির্ণয়:

...জোড় সংখ্যা হলে মধ্যপদ হবে $(\frac{n}{2}+1)$ তম পদ

...বিজোড় সংখ্যা হলে মধ্যপদ হবে $(\frac{n+1}{2})$ এবং $(\frac{n+1}{2}+1)$ তম পদ

...: $(x^4 - \frac{1}{x^3})^{11}$ এর বিস্তৃতিতে

...পদ দুটি হচ্ছে $(\frac{11+1}{2}) = 6$

... $(\frac{11+1}{2}+1) = 7$ তম পদদ্বয়।

... $T_{5+1} = {}^{11}C_5(x^4)^6(-\frac{1}{x^3})^5 = -{}^{11}C_5x^9.$

... $T_{6+1} = {}^{11}C_6(x^4)^5(-\frac{1}{x^3})^6 = {}^{11}C_6x^2.$

... ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ হয় তবে-

$...^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}x^r + ... \infty$

...টি বৈধ হবে যদি $-1 < x < 1$ হয়।

...তে পদের সংখ্যা অনন্ত হবে।

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

... < 1 বা $-1 < x < 1$

$...^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^r + ... \infty$

$...^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^r x^r + ... \infty$

$...^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (r+1)x^r + ... \infty$

$...^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ... + (-1)^r(r+1)x^r + ... \infty$

$...^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ... + \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r + ... \infty$

- $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + ... + \frac{(-1)^r}{2}(r+1)(r+2)x^r + ... \infty$
- $(1-x)^{-n}$ বিস্তৃতির প্রতিটি পদই ধনাত্মক।
- $(1-x)^{-n}$ হলে সাধারণ পদ $t_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2).......(n+r-1)}{r!}x^r$
- $(1-x)^n$ হলে $T_{r+1} = \frac{(-1)^r n(n-1)(n-2).......(n-r+1)}{r!}x^r$
- $(1+x)^{-n}$ হলে $T_{r+1} = \frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)........(n+r-1)}{r!}x^r$

➤ দ্বিপদী রাশির সহগ সমূহের গুণাবলি: $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সহগগুলো যথাক্রমে ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3, ...{}^nC_r$ কে কোন সময় $C_0, C_1, C_2, C_3, ... C_n$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তাই $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ ... ... (A)

(i) $C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_n = 2^n$

(ii) $C_0 + C_2 + C_4 + ... = C_1 + C_3 + C_5 .... = 2^{n-1}.$

(iii) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n)!\,n!}$

(iv) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + ... C_nC_0 = \frac{(2n)!}{n!n!}$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: x-বর্জিত পদ নির্ণয়

Shortcut Technique: [For M.C.Q]

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদের মান বের করতে হবে। দ্বিপদীটি $(ax^p + bx^q)^n$ বিবেচনা কর। $(r+1)$ তম পদে x^m বিদ্যমান থাকলে

$r = \frac{np-m}{p-q}$ এবং সহগ ${}^nC_r\,a^{n-r}b^r$।

Ex-01 $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{18}$ এর বিস্তৃতি হতে x বর্জিত পদ বের কর।

Sol^n: $(r+1)$ তম পদ $= {}^{18}C_r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-r}(-x)^r = {}^{18}C_rx^{3r-36}(-1)^r$

ইহা x বর্জিত পদ হলে $3r - 36 = 0 \Rightarrow r = 12$

$\therefore$ x বর্জিত পদ $= {}^{18}C_{12} = {}^{18}C_6 = 18564$ **Ans.**

For practice:

01. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি বের কর। **Ans. 240**

Type-02: x^n এর সহগ নির্ণয়

➤ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদের মান $= {}^nC_ra^{n-r}x^r$

$= \frac{\text{r সংখ্যক n সহ পূর্ববর্তী ক্রমিক পদের গুণফল}}{r!} \times (\text{১ম পদ})^{n-r} \times (\text{শেষ পদ})^r$

➤ $(a+x)^n$ বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ ও r তম পদের অনুপাত

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r} \times \frac{x}{a}$

Ex-01 $(1-x)^8(1+x)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

Sol^n: $(1-x)(1-x^2)^7$

$= (1-x)\{1 - {}^7C_1x^2 + {}^7C_2(x^2)^2 + {}^7C_3(x^2)^3 + {}^7C_4(x^2)^4 ......\}$

$\therefore x^7$ এর সহগ $= {}^7C_3 = 35$ **Ans.**

Ex-02 $\dfrac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ কত হবে?

Sol^n: $\dfrac{x}{(1-4x)(1-5x)} = \dfrac{1}{1-5x} - \dfrac{1}{1-4x} = (1-5x)^{-1} - (1-4x)^{-1}$

$= (1+5x+5^2x^2+.....+5^nx^n+...)-(1+4x+4^2x^2+...+4^nx^n+...)$

$\therefore x^n$-এর সহগ $= 5^n - 4^n$ **Ans.**

For practice:

01. $(2x^{1/2} - y^{1/3})^{20}$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতিতে 19তম পদটি নির্ণয় কর। **Ans.** $760\ xy^6$

02. $\dfrac{1}{1-5x+6x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^6 এর সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** 2059

Type-03: মধ্যপদ নির্ণয়

Ex-01 $\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{a}\right)^{2n+1}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ বের কর এবং মান নির্ণয় কর।

Sol^n: (2n+1) বিজোড় সুতরাং মধ্যপদ হবে $\left(\dfrac{2n+1+1}{2}\right)$ ও $\left(\dfrac{2n+1+3}{2}\right)$ বা (n+1) ও (n + 2) তম

$\therefore$ (n+1) তম পদ $= {}^{2n+1}C_n\left(\dfrac{a}{x}\right)^{n+1}\left(\dfrac{x}{a}\right)^n = {}^{2n+1}C_n \cdot \dfrac{a}{x}$

এবং (n+2) তম পদ $= {}^{2n+1}C_{n+1}\left(\dfrac{a}{x}\right)^n\left(\dfrac{x}{a}\right)^{n+1} = {}^{2n+1}C_{n+1} \cdot \dfrac{x}{a}$ **Ans.**

Ex-02 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^7$ এর বিস্তৃতি থেকে মধ্যপদ নির্ণয় কর।

Sol^n: এখানে মোট পদের সংখ্যা = n + 1 = 7 + 1 = 8

$\therefore$ ১ম মধ্যপদ $= \left(\dfrac{n-1}{2}+1\right)$ তম পদ

$= \left(\dfrac{7-1}{2}+1\right)$ তম পদ = (3 + 1) তম পদ

$= {}^7C_3\,(x^2)^{7-3}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^3 = 35 \times x^8 \times \dfrac{1}{x^9} = \dfrac{35}{x}$

এবং দ্বিতীয় মধ্যপদ $= \left(\dfrac{n+1}{2}+1\right)$ তম পদ

$= \left(\dfrac{7+1}{2}+1\right)$ তম পদ = (4 + 1) তম পদ

$= {}^7C_4\,(x^2)^{7-4}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^4 = 35\,x^6\,\dfrac{1}{x^{12}} = \dfrac{35}{x^6}$ **Ans.**

For practice:

01. $(1+2x+x^2)^n$ এর বিস্তৃতিতে মধ্য পদ বের কর এবং এর মান নির্ণয় কর।

Ans. মধ্য পদ (n + 1) এবং মান $= \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\,x^n$

Type-04: ক্রমিক পদের সহগ অনুপাত সংক্রান্ত অংক

➤ $(1+ax)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ দুটি পরস্পর সমান হলে, $a = \dfrac{r+1}{n-r}$

➤ $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে r এবং (r + 1) তম পদ পরস্পর সমান হলে চলরাশি $x = \dfrac{r}{n-(r-1)}$

➤ $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে l তম পদ এবং m তম পদের সহগ পরস্পর সমান হলে $l + m = n + 2$

➤ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) ও r তম পদ দুটির অনুপাত

$\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{n-r+1}{r} \times \dfrac{x}{a}$ এবং

(r + 2); (r + 1) তম পদ দুইটির অনুপাত হবে $\dfrac{T_{r+2}}{T_{r+1}} = \dfrac{n-r}{r+1}\dfrac{x}{a}$

Ex-01 $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক পদের অনুপাত 1:7:42 ... এর মান নির্ণয় কর।

Sol^n: তিনটি ক্রমিক পদ $T_{r+1}, T_{r+2}, T_{r+3}$ হলে-

$\therefore T_{r+1} = {}^nC_r \cdot x^r,\ T_{r+2} = {}^nC_{r+1} \cdot x^{r+1}$

এবং $T_{r+3} = {}^nC_{r+2} \cdot x^{r+2}$

$\therefore \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow n - 8r = 7$ —— (i)

$\therefore \dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r+2}} = \dfrac{7}{42} \Rightarrow n - 7r = 13$ —— (ii)

(i) ও (ii) নং হতে r = 6 এবং n = 55

Ex-02 x এর মান কত হলে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে x, x^2, x^3 এর ... সমান্তর প্রগমনে থাকবে?

Sol^n: $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ___$

x, x^2, x^3 সম্বলিত পদগুলির সহগ যথাক্রমে,

$n, \dfrac{n(n-1)}{2!}, \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

যদি এরা সমান্তর প্রগমনে থাকে তবে,

$2 \times \dfrac{n(n-1)}{2!} = n + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$\Rightarrow n(n-1) = n + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\Rightarrow 6n(n-1) = 6n + n(n-1)(n-2)$

$\Rightarrow n[(n-1)(n-2) + 6 - 6(n-1)] = 0 \Rightarrow n(n^2 - 9n + 14)$...

$\Rightarrow n(n-2)(n-7) = 0 \Rightarrow n = 0, 2, 7$ কিন্তু $n \neq 0, 2$

$\therefore n = 7$ একমাত্র গ্রহণযোগ্য মান

For practice:

01. $(3+x)^{15}$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1} এর সহগ দুইটি সমান ... r এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** ...

Type-05: জোড় ও বিজোড় পদের সমষ্টি

i. $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে জোড় পদের সমষ্টি $= \dfrac{(a+x)^n - (a-x)^n}{2}$

ii. $(a-x)^n$ এর বিস্তৃতিতে বিজোড় পদের সমষ্টি $= \dfrac{(a+x)^n + (a-x)^n}{2}$

iii. বিজোড় পদগুলোর সমষ্টি + জোড় পদগুলোর সমষ্টি $= (a+x)^n$

iv. বিজোড় পদগুলোর সমষ্টি– জোড় পদগুলোর সমষ্টি $= (a-x)^n$

Ex-01 $(2x+3y)^5$ কে বিস্তৃত কর। দেখাও যে, x = 3/2 এবং y = ... বিস্তৃতির বিজোড় পদগুলোর যোগফল জোড় পদসমূহের যোগফল ... এক বেশি।

Sol^n: $(2x+3y)^5 = (2x)^5 + {}^5C_1(2x)^4.3y + {}^5C_2(2x)^3.(3y)^2 + {}^5C_3(2x)^2.(3y)^3 + {}^5C_4(2x).(3y)^4 + (3y)^5$

$= 32x^5 + 240\,x^4y + 720\,x^3y^2 + 1080\,x^2y^3 + 810\,xy^4 + 243y^5$

$= S_O + S_E$ [ধরি বিজোড় পদসমূহের যোগফল S_O এবং জোড় পদসমূহের যোগফল S_E]

$\therefore (2x-3y)^5 = S_O - S_E$

এখন, $S_O - S_E = \left(2.\dfrac{3}{2} - 3.\dfrac{2}{3}\right)^5 = 1 \therefore S_O = 1 + S_E$ **(Showed)**

... একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $\left(x^p - \frac{1}{x^p}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতির শেষ হতে ...(n+1) তম পদ নির্ণয় কর।

... হতে (n+1) তম পদ = ১ম হতে [মোট পদ সংখ্যা − {(n+1) − 1}] তম

... হতে (2n+1−n−1+1) তম = ১ম হতে (n+1) তম পদ $= (-1)^n \frac{2n!}{(n!)^2}$

Ans:

For practice:

... $(1 + x)^n$-এর বিস্তৃতিতে বিজোড় পদগুলোর সমষ্টি S_1 এবং জোড় ...গুলোর সমষ্টি S_2 হলে দেখাও যে, $(1 - x^2)^n = S_1^2 - S_2^2$

Type-06: বহুপদী ধারার পদসংখ্যা নির্ণয়

$(x_1 + x_2 + \text{-------} + x_r)^n$ -এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা $= {}^{n+r-1}C_n$

... $(x+y+z)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে পদের সংখ্যা কত?

... $(x+y)^{10} + {}^{10}C_1(x+y)^9 . z + \ldots\ldots + z^{10}$

...পদের সংখ্যা ${}^{10+3-1}C_2 = {}^{12}C_2 = 66$ **Ans.**

Type-07: ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশির বিস্তার

... $x > 1$ হলে $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদ পর্যন্ত বের কর।

... $\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{x}\left[1 + \frac{-1}{2}.\frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}.\frac{1}{x^4} + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}.\frac{1}{x^6} + \ldots\ldots\infty\right]$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{x^5} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{x^7} + \ldots\ldots\infty$ **Ans.**

Type-08: নির্দিষ্ট পদ বা পদের সহগ নির্ণয়

... $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদের সহগ নির্ণয় কর।

...$T_{r+1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-2)^r$

$= (-1)^{2r}\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r r!}2^r$

$= \frac{1.2.3.4.5.6\ldots.(2r-1).2r}{(2.4.6\ldots\ldots2r)r!} = \frac{2r!}{2^r r!.r!} = \frac{2r!}{2^r.(r!)^2}$ **Ans.**

... $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ নির্ণয় কর।

...$(1+x)(1-x)^{-3}$
$= (1-x)^{-3} + x(1-x)^{-3}$

| $(1-x)^{-3}$ বিস্তৃতির সাধারণ পদ $= \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r$.

... x^{10} এর সহগ $= \frac{1}{2}\times(10+1)(10+2) + \frac{1}{2}\times(9+1)(9+2)$

$= 66 + 55 = 121$ **Ans.**

... $x(1-x)^{-3}$ এর ক্ষেত্রে x গুণ থাকায় সাধারণ পদ x^{r+1} হচ্ছে। এখন $r+1 = 10$ $\Rightarrow r = 9$ $\therefore$ সাধারণ পদে $r = 9$ বসালে x^{10} এর সহগ পাওয়া যাবে।

Ex-03 দেখাও যে, $(1-9x+20x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $5^{n+1} - 4^{n+1}$

Sol^n: $\frac{1}{(1-4x)(1-5x)} = \frac{5}{1-5x} - \frac{4}{1-4x}$

$= 5(1-5x)^{-1} - 4(1-4x)^{-1}$

$= 5(1 + 5x + 5^2x^2 + \ldots + 5^nx^n + \ldots) - 4(1 + 4x + 4^2x^2 + \ldots + 4^nx^n + \ldots)$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= 5^{n+1} - 4^{n+1}$ **(Showed)**

For practice:

01. দেখাও যে, $(1-4x)^{-1/2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $\frac{2r!}{(r!)^2}$

02. $\frac{x}{(1-3x)(1-4x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ বের কর। **Ans.** $4^n - 3^n$

Type-09: অনন্ত ধারার সমষ্টি নির্ণয়

Ex-01 $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \ldots\ldots\infty$ ধারার যোগফল নির্ণয় কর।

Sol^n: $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

$= 1 + \frac{\frac{3}{2}}{2} + \frac{\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{2^2\lfloor 2} + \frac{\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}}{2^3\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots\infty$

$= 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\infty$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$ **Ans.**

For practice:

01. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2!2^4} + \frac{1.3.5}{3!2^6} + \ldots\ldots\ldots\infty$ **Ans.** $\sqrt{2}$

02. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \ldots\ldots\ldots\infty$ **Ans.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}$

Type-10: একটি ধারা হতে অন্য ধারায় রূপান্তর

Ex-01 $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots\ldots\infty$ হয় তাহলে x কে y এর শক্তির ঊর্ধ্বক্রম ধারায় তৃতীয় পদ পর্যন্ত প্রকাশ কর।

Sol^n: $1+y = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots\ldots\infty$

$\Rightarrow 1+y = (1-x)^{-3} \Rightarrow 1-x = (1+y)^{-1/3}$

$\Rightarrow 1-x = 1 - \frac{1}{3}y + \frac{\frac{1}{3}.\frac{4}{3}}{2!}y^2 - \frac{\frac{1}{3}.\frac{4}{3}.\frac{7}{3}}{3!}y^3 + \ldots\ldots$

$\therefore x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3^2 2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3 3!}y^3 - \ldots\ldots\infty$ **Ans.**

For practice:

01. $y = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$ হলে, দেখাও যে, $x = y + y^2 + y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

Type-11: বিবিধ সমস্যাবলি

01. $(a \pm x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে সংখ্যাসূচক বৃহত্তম পদ নির্ণয়ের জন্য $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \left|\frac{n-r+1}{r}\frac{x}{a}\right|$ সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

02. $(a \pm x)^{-n}$ -এর বিস্তৃতিতে সংখ্যাসূচক বৃহত্তম পদ নির্ণয়ের জন্য $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \left|\frac{n+r-1}{r}\frac{x}{a}\right|$ সূত্র ব্যবহার করতে হবে।

Ex-01 $x = \frac{1}{3}$ হলে $(1+2x)^{\frac{21}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে সংখ্যামান বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{\frac{21}{2} - r + 1}{r} \cdot \frac{2x}{1} = \frac{\frac{23}{2} - r}{r}\left(2 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{23 - 2r}{3r}$

এখন $T_r < T_{r+1}$ হলে $3r < 23 - 2r \Rightarrow r < \frac{23}{5} \Rightarrow r < 4\frac{3}{5}$

এবং $T_r > T_{r+1}$ হলে $r > 4\frac{3}{5}$ যেহেতু $r \in N$ সুতরাং যখন $r < 4\frac{3}{5}$ তখন

.........$T_3 < T_4 < T_5$ এবং যখন $r > 4\frac{3}{5}$ তখন $T_5 > T_6 > T_7$ ....

সুতরাং এই দুই অসমতা থেকে বুঝা যায় T_5 বা 5^{th} পদ বৃহত্তম পদ।

এবং এই পদের মান $= \frac{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-1\right)\left(\frac{21}{2}-2\right)\left(\frac{21}{2}-3\right)}{\lfloor 4}\left(\frac{2}{3}\right)^4$

$= \frac{11305}{216}$ **Ans.**

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. অসীম ধারাটির যোগফল নির্ণয় কর: $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + ...\infty$

[17-18, 13-14; RUET: 04-05]

Sol^n $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + ...\infty$

$= 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{4^2(1.2)}2^2 + \frac{\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}}{4^3(1.2.3)}2^3 + ...\infty$

$= 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + ...\infty$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\therefore 1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + ...\infty = 2\sqrt{2}$ **Ans.**

02. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদের মান নির্ণয় কর। [17-18]

Sol^n $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6 = \left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right\}^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

এখানে $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$-এর বিস্তারে মধ্যপদই হলো ধ্রুবক পদ।

$\therefore$ ধ্রুবক পদের মান = মধ্যপদের মান

$= {}^{12}C_6(-1)^6 = 924$ **Ans.**

03. $\left(2x^2 + \frac{P}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ সমান হ... ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [16-17; 00-01; RUET: 10-11]

Solve $(r+1)$ তম পদ,

${}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{P}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r 2^{10-r} P^r x^{20-5r}$

x^5 থাকলে, $20 - 5r = 5 \Rightarrow 5r = 15 \Rightarrow r = 3$

x^{15} থাকলে, $20 - 5r = 15 \Rightarrow 5r = 5 \Rightarrow r = 1$

$\therefore$ শর্তমতে, ${}^{10}C_3 2^7 P^{10-7} = {}^{10}C_1 2^9 P^{10-9}$

$\Rightarrow P^2 = \frac{{}^{10}C_1 \times 2^2}{{}^{10}C_3} \Rightarrow P^2 = \frac{1}{3} \therefore P = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [যেহেতু $P > 0$]

04. ধারার সমষ্টি নির্ণয় কর: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{9} + ...$

Solve $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\frac{3}{6}\frac{5}{9} + ...\infty$

$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{3^2\lfloor 2}2^2 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3^3\lfloor 3}2^3 + ...\infty$

$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\lfloor 1}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{\lfloor 3}...$

$= \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

05. $(1 - x + x^2)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ নির্ণয় কর। [15-16]

Solve $(1 - x + x^2)^7 = \{(1 - x) + x^2\}^7$

$= (1 - x)^7 + {}^7C_1(1 - x)^6 x^2 + ...$

$\therefore x^2$-এর সহগ $= {}^7C_2 + {}^7C_1 = {}^8C_2 = 28$

$= (1 + x)^n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

06. $(x + a)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি সংখ্যা যথাক্রমে 729, 72... 30375 হলে, a এর মান নির্ণয় কর। [12-13]

Solve $(x + a)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 + ...$

$x^n = 729$ ...... (i)

$\frac{n}{1!}x^{n-1}a = 7290$ .... (ii)

$\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 = 30375$ .... (iii)

(ii) এ, $nx^n \cdot \frac{a}{x} = 7290 \Rightarrow n(729)\cdot\frac{a}{x} = 7290$ [$\because x^n = 72$...

$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{10}{n}$ ...... (iv)

(iii) এ, $\frac{n(n-1)}{2!}x^n \cdot \frac{a^2}{x^2} = 30375$

$\Rightarrow \frac{n^2 - n}{2}(729)\left(\frac{10}{n}\right)^2 = 30375 \Rightarrow \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow 6n^2 - 6n = 5n^2 \Rightarrow n^2 = 6n \quad \therefore n = 6$

(i) $\Rightarrow x^6 = 729 = 3^6 \quad \therefore x = 3$

(iv) $\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{10}{6} \therefore a = 5$

…কোন মানের জন্য $\left(2x^2+\frac{3}{x}\right)^{19}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম এবং (r + 2) তম পদের সহগ পরস্পর সমান হবে? [08-09]

Solve (r + 1) তম পদ $= {}^{19}C_r\,(2x^2)^{19-r}.\left(\frac{3}{x}\right)^r$

(r + 2) তম পদ $= {}^{19}C_{r+1}\,(2x^2)^{19-(r+1)}\left(\frac{3}{x}\right)^{r+1}$

শর্তমতে, ${}^{19}C_r\,(2)^{19-r}.(3)^r = {}^{19}C_{r+1}\,(2)^{18-r}.(3)^{r+1}$

$\Rightarrow \frac{2}{19-r}=\frac{3}{r+1}$ $\therefore r=11$ **Ans.**

যদি $y = x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \infty$ হয়, তাহলে দেখাও যে,
$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots\ldots \infty$ [07-08]

Solve $y = x + x^2 + x^3 + x^3 + \ldots\infty$

$\Rightarrow 1+y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\infty$

$\Rightarrow 1+y=(1-x)^{-1} \Rightarrow 1-x=(1+y)^{-1} \Rightarrow x=1-(1+y)^{-1}$

$\Rightarrow x=1-(1-y+y^2-y^3+y^4-\ldots\infty)$

$\therefore x = y-y^2+y^3-y^4+\ldots\infty$ **(Showed)**

n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে এবং $\left(3+\frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 ও x^8 এর সহগ দুটি সমান হলে, n এর মান নির্ণয় কর। [06-07]

Solve $(3+\frac{x}{2})^n$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ,

$T_{r+1} = {}^nC_r\,3^{n-r}\,(x)^r\,2^{-r}$ $\therefore x^7$ এর সহগ $= {}^nC_7.3^{n-7}.2^{-7}$

এবং x^8 এর সহগ $= {}^nC_8.3^{n-8}.2^{-8}$

শর্তমতে, ${}^nC_7.3^{n-7}.2^{-7} = {}^nC_8.3^{n-8}.2^{-8}$

$\Rightarrow \frac{n!}{7!(n-7)!}\times 3\times 2=\frac{n!}{8!(n-8)!} \Rightarrow \frac{6}{n-7}=\frac{1}{8}$ $\therefore n = 55$ **Ans.**

যদি $-\frac{8}{3}<x<\frac{8}{3}$ হয়, তবে $(8-3x)^{-\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। [04-05]

Solve $(8-3x)^{\frac{-1}{3}}=8^{\frac{-1}{3}}\left(1-\frac{3x}{8}\right)^{\frac{-1}{3}}$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}.\frac{3x}{8}+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{-3x}{8}\right)^2 + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{-3x}{8}\right)^3+\ldots\infty\right]$$

$$\therefore x^3 \text{ এর সহগ} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}\times\left(-\frac{3}{8}\right)^3\right]=\frac{7}{1536}$$ **Ans.**

$|x|<\frac{1}{3}$ হলে, $(1-5x+6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। [03-04]

Solve $(1-5x+6x^2)^{-1}=(1-3x)^{-1}(1-2x)^{-1}$

$=\frac{1}{(1-3x)(1-2x)}=\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}$

$=3(1-3x)^{-1}-2(1-2x)^{-1}$

$=3\{1+3x+(3x)^2+\ldots\ldots+(3x)^n\ldots\infty\}$
$-2\{1+2x+(2x)^2+\ldots\ldots+(2x)^n\ldots\infty\}$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= 3^{n+1}-2^{n+1}$ **Ans.**

12. যদি $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots \infty$ হয় তবে দেখাও যে,
$x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\ldots\ldots$ [01-02]

Solve $1+y=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$

$\Rightarrow 1+y=(1-x)^{-2}$

$\Rightarrow 1-x=(1+y)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow 1-x=1+\left(-\frac{1}{2}\right)y+\left\{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\right\}y^2 - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3+\ldots$$

$\Rightarrow 1-x=1-\frac{y}{2}+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\ldots\ldots\infty$

$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\ldots\ldots\infty$ **(Showed)**

13. $|x|>1$ হলে, $(1-x)^{-1}$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। [98-99]

Solve $(1-x)^{-1}=\frac{1}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}$

$=-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots\infty\right)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}-\ldots\infty$ **Ans.**

14. $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে কোন পদে x^9 থাকবে কিনা নির্ণয় কর। [96-97]

Solve $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{20}$-এর বিস্তারে

$T_{r+1}={}^{20}C_r\,(2x^2)^{20-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}^{20}C_r\,2^{20-r}\,x^{40-3r}\,(-1)^r$

এই পদে x^9 থাকবে যদি এবং কেবল যদি $40-3r=9$ হয়

$\Rightarrow 3r=31$ হয়

$\Rightarrow r=\frac{31}{3}$ হয়

যেহেতু r ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা সুতরাং $r\neq\frac{31}{3}$ অর্থাৎ x^9 যুক্ত পদ থাকা সম্ভব নয়। **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $(1 + x)(a - bx)^{12}$-এর বিস্তৃতিতে x^8-এর সহগ 0 হয়, তবে $\frac{a}{b}$ অনুপাতের মান নির্ণয় কর। [05-06,13-14; RUET : 14-15]

Solve $(1+x)(a-bx)^{12}$

$=(1+x)(a^{12}+\ldots\ldots+{}^{12}C_7\,a^{12-7}\,(-bx)^7+{}^{12}C_8\,a^{12-8}\,(-bx)^8+\ldots\ldots)$

$\therefore x^8$ এর সহগ $= {}^{12}C_7\,a^5(-b)^7+{}^{12}C_8\,a^4\,(-b)^8=0$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{{}^{12}C_8}{{}^{12}C_7}$ $\therefore \frac{a}{b}=\frac{5}{8}$ **Ans.**

02. (a) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি নির্ণয় কর। [04-05]

Solve মধ্যপদ $=\frac{10+2}{2}=6$

$\therefore$ মধ্যপদটির মান $= {}^{10}C_5\left(\frac{x}{y}\right)^5\left(\frac{y}{x}\right)^5=252$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটির মান নির্ণয় কর। [08-09]

Solve $T_{r+1} = {}^{10}C_r 2^{10-r}.x^{20-5r}.(-1)^r$ ∴ x বর্জিত পদের জন্য r = 4

∴ x বর্জিত পদটির মান $= {}^{10}C_4.2^{10-4}(-1)^4 = {}^{10}C_4 \times 2^6 = 13440$ Ans.

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. a এর কোন মানের জন্য $(1 + ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হবে? [12-13]

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{5}{16}$

Ans B Solve $(1 + ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ

$T_{r+1} = {}^8C_r.x^r.a^r$

x^3 ও x^4 এর ক্ষেত্রে যথাক্রমে r = 3 ও 4

শর্তমতে, ${}^8C_4.a^4 = {}^8C_3.a^3 \Rightarrow a = \frac{{}^8C_3}{{}^8C_4} = \frac{4}{5}$

02. $\frac{1}{(1-x)(3-x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ হবে- [11-12]

A. $\frac{1}{2}\left[1+3^{-11}\right]$ B. $\frac{1}{2}\left[1-3^{-11}\right]$ C. $\frac{1}{2}\left[1-3^{10}\right]$ D. $\frac{1}{2}\left[1+3^{10}\right]$

Ans B Solve $\frac{1}{(1-x)(3-x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3-x}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(1-x)^{-1} - \frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(1-x)^{-1} - \frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(1+x+x^2+....+x^{10}+...) - \frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+....+\frac{x^{10}}{3^{10}}+...\right)\right]$

∴ x^{10} এর সহগ $= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3^{10}}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3^{11}}\right]$

03. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতি থেকে মধ্য পদটির মান বের কর। [10-11]

A. 17820 B. 18702 C. 13780 D. 12870

Ans D Solve মধ্যপদ $\left(\frac{16}{2}+1\right) = 9^{th}$ পদ।

$T_{8+1} = {}^{16}C_8 x^8.\left(-\frac{1}{x}\right)^8 = {}^{16}C_8 \times x^8.(-1)^8.x^{-8} = 12870$

04. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর সম্প্রসারণে x বর্জিত পদটির মান কত?

[09-10; CUET : 12-13]

A. 832 B. 924 C. 492 D. 294

Ans B Solve

$(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2})^6 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{12}$

এর সম্প্রসারণে r + 1 তমপদ $= {}^{12}C_r x^{12-r}(-1)^r(x)^{-r}$

$= {}^{12}C_r x^{12-2r}(-1)^r$

এই পদটি x বর্জিত হলে, 12 – 2r = 0 ∴ r = 6

∴ (6 + 1) বা 7ম পদটি x বর্জিত ও এর মান $= {}^{12}C_6 \times (-1)^6 = ...$

অথবা, $r = \frac{np-m}{p+q} = \frac{12 \times 1}{1+1} = 6$

05. k এর কোন মানের জন্য $\left(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ 405 হবে? [07-08]

A. 0, 2 B. – 3, 2 C. 2, 3 D. 3, –3

Ans D Solve $(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে (r + 1) তম পদ

$= {}^{10}C_r(\sqrt{x})^{10-r}(-k)^r.x^{-2r} = {}^{10}C_r.x^{5-\frac{r}{2}-2r}.(-k)^r$

$= {}^{10}C_r.x^{5-\frac{5r}{2}}.(-k)^r$ ∴ এই পদটি x বর্জিত হলে, $5 - \frac{5}{2}r = 0$

∴ (2 + 1) = 3 তম পদটি x বর্জিত এবং এর মান

$= {}^{10}C_2.(-k)^2 = 405$ ∴ k = ± 3

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + ...$এর মান কোনটি? [17-18]

A. –3ln2 B. ln7 C. 5ln3
D. 2ln2 E. 3ln5

Ans D Solve $1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + ... =$

$= 1 + \left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + ...$

$= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} .... \infty\right) = 2\ln 2$

Note: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - .... \infty$

[ব্যবধি: $-1 < x \le 1$]

02. $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত? [16-17]

A. 1100 B. 1120 C. 1200 D. 1220 E. 1320

Ans B Solve ধরি, $\left(x + \frac{2}{x}\right)^8$ এর (r + 1) তম পদ হলো x বর্জিত

∴ $T_{r+1} = {}^8C_r x^{8-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = {}^8C_r x^{8-r-r} 2^r$

∴ পদটি x বর্জিত হলে 8 – 2r = 0 ⇒ r = 4, ∴ 5^{th} পদটি x বর্জিত

∴ 5^{th} পদটির মান ${}^8C_4 2^4 = 1120$

03. যদি $z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - .....\infty$ এবং $y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...$ হয় তাহলে x এর মান কত? [16-17]

A. $(1 + e^z)$ B. $(1 + e^{-z})$ C. $ln(1 + 3z)$
D. $ln\left(\frac{1}{1+5z}\right)$ E. $ln\left(\frac{1}{1-e^z}\right)$

Ans E Solve $z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} ....\infty = \ln(1-y)$

$y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\infty = e^{-x}$

∴ $z = \ln(1 - e^{-x}) \Rightarrow e^z = 1 - e^{-x}$

$\Rightarrow e^{-x} = 1 - e^z \Rightarrow -x = \ln(1 - e^z)$

∴ $x = \ln\left(\frac{1}{1-e^z}\right)$

$(a+\sqrt{1-a^2})^6 + (a-\sqrt{1-a^2})^6$ এর মান কোনটি? [14-15]
A. $2+24a^2-24a^4$ B. $5-7a+a^2$ C. $9-8a+a^4$
D. $7+15a^2-a^4$ E. $11-9a+8a^2$

Ans A Solve $(a+\sqrt{1-a^2})^6+(a-\sqrt{1-a^2})^6$
$=[(a+\sqrt{1-a^2})^2]^3+[(a-\sqrt{1-a^2})^2]^3$
$=(a^2+2a\sqrt{1-a^2}+1-a^2)^3+(a^2-2a\sqrt{1-a^2}+1-a^2)^3$
$=(1+2a\sqrt{1-a^2})^3+(1-2a\sqrt{1-a^2})^3$
$=2.1^3+2.3.1(2a\sqrt{1-a^2})^2$ [$\because (a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6ab^2$]
$=2+24a^2-24a^4$

x এর ক্রমবর্ধমান শক্তিতে $\log_e(1-3x+2x^2)^{-1}$ এর বিস্তারে x^n-এর সহগ হলো- [12-13]
A. $\frac{1+2^n}{n}$ B. $\frac{3^n-11}{2}$ C. $\frac{\sum 3^r-11}{2}$ D. $\frac{\sum n-5}{6}$ E. $\frac{11n-9}{2}$

Ans A Solve $\log_e\left(\frac{1}{(1-x)(1-2x)}\right)$
$=\log_e 1-[\log_e(1-x)+\log_e(1-2x)]$
$=0-\left[\left(-x-\frac{x^2}{3}\ldots\frac{x^n}{n}\ldots\right)+\left(-2x-\frac{2^2x^2}{2}\ldots\ldots-\frac{2^nx^n}{n}\right)\ldots\right]$
$\therefore x^n$ এর সহগ $=\frac{1}{n}+\frac{2^n}{n}=\frac{1+2^n}{n}$

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

$(1+x^2)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{4r} এর সহগ বের কর। [15-16]
A. $2(r+1)$ B. $(2r-1)(r-1)$
C. $(r+1)(2r-1)$ D. $(2r+1)(r+1)$

Ans D Solve $(1+x^2)^{-3}$-এর বিস্তৃতিতে $x^{4r}=(x^2)^{2r}$-এর সহগ
$=\frac{-3(-3-1)(-3-2)\ldots\ldots(-3-2r+1)}{(2r)!}$
$=(-1)^{2r}\frac{3.4.5\ldots\ldots(2r+2)}{(2r)!}=\frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots(2r+2)}{2(2r)!}$
$=\frac{(2r+2)(2r+1)2r!}{2(2r)!}=(r+1)(2r+1)$

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে তিনটি ধারাবাহিক এর সহগত্রয় যথাক্রমে 28, 56 এবং 70 হলে, n এর মান নির্ণয় কর। [12-13]
A. 2 B. 8 C. 5 D. None

Ans B Solve
${}^nC_r=28$ $\therefore \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}}=\frac{r+1}{n-r}=\frac{28}{56}\ldots$ (i)
${}^nC_{r+1}=56$
${}^nC_{r+2}=70$ $\therefore \frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_{r+2}}=\frac{r+2}{n-r-1}=\frac{56}{70}\ldots$ (ii)
Solve (i) and (ii) or Form Pascal's triangle n = 8

$\frac{1+2x}{(1-2x)^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ কত? [11-12]
A. $21504x^{10}$ B. 21054 C. 21540 D. None of these

Ans D Solve $(1+2x)(1-2x)^{-2}=(1-2x)^{-2}+2x(1-2x)^{-2}$
$(1-2x)^{-2}$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তমপদ $=(r+1)(2x)^r=(r+1)2^rx^r$
x^{10} এর সহগ $=(10+1)2^{10}+(9+1)2^9\times 2=21504$

$(1+3x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে 5 তম ও 6 তম পদ সমান হলে x এর মান কত? [10-11]
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{8}{28}$ D. None

Ans D Solve $\frac{n-r+1}{r}\times\frac{3x}{1}=1\Rightarrow\frac{10-5+1}{5}\times 3x=1\therefore x=\frac{5}{18}$

$(a+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হয়, তবে 'a' এর মান কত? [09-10]
A. ±4 B. 4 C. –4 D. None of them

Ans D Solve প্রশ্নমতে, ${}^5C_3\,a^{5-3}(2)^3=320\ \therefore a=\pm 2$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\left(3x^2-\frac{1}{3x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কোনটি? [13-14]
A. $\frac{10}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $-\frac{10}{3}$
D. $-\frac{1}{3}$ E. None

Ans C Solve $r=\frac{5\times 2-1}{2+1}=3$
$\therefore$ x-এর সহগ $={}^5C_3\times 3^2\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{10}{3}$

02. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}, |x|<1$ এই বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ হল- [11-12]
A. 4n B. 5n C. 3n
D. 2n E. None

Ans A Solve $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}=(1+x)^2(1-x)^{-2}$
$=(1+2x+x^2)(1+2x+3x^2+\ldots\ldots+(n+1)x^n\ldots\ldots\infty)$
$=(x^2+2x+1)\{1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$
$+(n+1)x^n\}+\ldots\ldots\infty)$
$\therefore x^n$ এর সহগ $=(n-1)+2n+(n+1)=4n$

SELF TEST [WRITTEN]

01. $(1+x)^{24}$ এর বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক পদ নির্ণয় কর যাদের সহগের অনুপাত 4 : 1। Ans. 6th ও 5th অথবা 20th ও 21th পদ

02. $(1+x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 ও 22 তম পদ দুইটি সমান হলে, x এর মান নির্ণয় কর। Ans. $\frac{7}{8}$

03. p ও q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $(1+x)^p\left(1+\frac{1}{x}\right)^p$ এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদটির মান বের কর। Ans. $\frac{(p+q)!}{p!q!}$

04. $(a+3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি পদ b, $\frac{21}{2}x$ ও $\frac{189}{4}bx^2$ হয় তাহলে a,b ও n এর মান বের কর। Ans. a = 2; n = 7; b = 2^7

05. $\left(x+2+\frac{1}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় কর। Ans. ${}^{2n}C_n$

06. $(7a+qx)^5$ এর বিস্তৃতিতে বিজোড় ও জোড় পদসমূহের সমষ্টি S_O ও S_E হলে প্রমাণ কর যে-
(i) a = 5/7 ; x = 1/2 হলে $S_O-S_E=243$
(ii) a = 3/7 ; x = –1/2 হলে $S_O-S_E=3125$

07. $(1+x)^3(1-x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ নির্ণয় কর। Ans: – 6

08. $(1+x+x^2)^n$ এর বিস্তৃতিতে সহগ গুলো যথাক্রমে a_0, a_1, a_2 হলে দেখাও যে,
(i) $a_0+a_2-a_4+\ldots\ldots=\frac{1}{2}(3^n+1)$
(ii) $a_1+a_3+a_5+\ldots\ldots=\frac{1}{2}(3^n-1)$

09. $(1+a)^n$ এর বিস্তৃতিতে a^{r-1}, a^r, a^{r+1} এর সহগগুলো সমান্তর ধারায় হলে, দেখাও যে, $n^2 - r(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$

10. $\frac{1}{\sqrt[3]{8-3x}}$ কে x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

Ans. $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}x^2+\frac{7}{1536}x^3+.....$

11. $\frac{2x+1}{1+x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

Ans. $(-1)^{r/2}$; r যদি জোড় হয়; $2(-1)^{\frac{r-1}{2}}$; r যদি বিজোড় হয়।

12. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর। **Ans.** $2r^2+2r+1$

13. দেখাও যে, $x^n = 1 + n\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + ... \infty$

SELF TEST [MCQ]

01. $\left(\frac{a}{x}+bx\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ-
A. $924a^6b^6$ B. $824a^5b^6$
C. $925a^6b^6$ D. $934a^6b^6$

02. $(a+b)^{50} + (a-b)^{50}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা হবে-
A. 50 B. 26 C. 49 D. 25

03. $(2x-3y)^{25}$ এর বিস্তৃতিতে $x^{12}y^{13}$ এর সহগ-
A. $-{}^{25}C_{12}2^{12}3^{13}$ B. ${}^{25}C_{12}2^{13}3^{13}$
C. ${}^{25}C_{12}2^{13}3^{12}$ D. ${}^{25}C_{12}2^{11}3^{13}$

04. ${}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + {}^{20}C_3 + ... + {}^{20}C_{20} = ?$
A. $2^{20}-2$ B. $2^{20}-1$
C. $2^{19}-1$ D. $2^{20}+1$

05. $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান-
A. ${}^{15}C_6\,2^6$ B. ${}^{15}C_6\,2^5$ C. ${}^{15}C_5\,2^5$ D. ${}^{15}C_4\,2^5$

06. $(x+3y+5z)^{20}$ এর মোট পদসংখ্যা-
A. 231 B. 250 C. 233 D. 232

07. $(1+x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(4r+5)$ তম পদের সহগ $(2r+1)$ তম পদের সহগের সমান হলে r এর মান কত?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

08. প্যাসকেলের ত্রিভুজের ৪র্থ সারিটি কত?
A. 1 4 6 4 1 B. 1 3 3 1
C. 1 1 5 6 1 D. 1 3 2 3 1

09. $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে ধ্রুব পদ কোনটি?
A. ${}^{15}C_9$ B. 0 C. $-{}^{15}C_9$ D. ${}^{15}C_{11}$

10. $\left(2x^2-\frac{1}{4x}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ বের কর-
A. $\frac{231}{8}$ B. $-\frac{231}{8}$ C. $\frac{27}{28}$ D. $-\frac{27}{28}$

11. $\frac{1+x}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ কত?
A. 1 B. 2 C. -1 D. 3

12. $(1+x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ x^{r-1} এর সহগের দ্বিগুণ হলে, r = ?
A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

13. $\left(\frac{x^4+1}{x^2}-2\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান-
A. 924 B. -924
C. $(-1)^3 921$ D. None

14. $x^2(1+x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর সহগ-
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

15. $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{11}$ এর মধ্যপদ কোনটি?
A. $-29568x$ B. $\frac{14784}{x}$
C. A & B D. None

16. $\left(1-\frac{7}{8}x\right)^{-\frac{1}{3}}$ এর বিস্তৃতি x এর কোন মানের জন্য সম্ভব?
A. $-\frac{8}{7}$ B. $\frac{8}{7}$
C. $-\frac{8}{7}<x<\frac{8}{7}$ D. $-\frac{7}{8}<x<\frac{7}{8}$

17. $(1-x)^{-1}-2(1-2x)^{-2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ-
A. r B. $1-2^r(1+r)$
C. $1-2^{r+1}(1+r)$ D. None

18. $\left(2x+\frac{1}{6x}\right)^{10}$ -এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদটির মান কত?
A. $\frac{25}{27}$ B. $\frac{27}{25}$
C. $\frac{27}{28}$ D. $\frac{28}{27}$

19. যদি $(1+px)^5$ এর বিস্তৃতিতে x-এর সহগ এবং $\left(9+\frac{x}{3}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে ... এর সহগ সমান হয় তবে p এর মান কত?
A. 1 B. 3 C. $\frac{1}{3}$ D. 9

20. $\left(3x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ বিস্তৃতিতে কততম পদ x বর্জিত?
A. 3 B. 4
C. 5 D. 7

21. $(a+b)^{15}$ এর 7 তম পদের সহগ কত?
A. 50 B. 5005
C. 2050 D. None

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Answer

21.B	20.D	19.B	18.D	17.C	16.C	15.C	14.A	13.A	12.A
10.B	09.A	08.B	07.A	06.A	05.C	04.B	03.A	02.B	01.A

...অধ্যায়
...পত্র

কনিক (Conics)

কনিক-A (পরাবৃত্ত)

এক নজরে এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

...কার্তেসীয় সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ... যেসব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত একটি ধ্রুবক তাদের সেট একটি ... এবং এই সঞ্চারপথকে কনিক বলা হয়।
... স্থির বিন্দুটি উপকেন্দ্র বা ফোকাস (Focus) নামে অভিহিত।
... স্থির সরলরেখাটি দিকাক্ষ (Directrix) নামে পরিচিত।
... অনুপাতটিকে উৎকেন্দ্রিকতা (Eccentricity) বলে এবং একে e দ্বারা সূচিত করা হয়।

...hnique: সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ-
$... 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
...বৃত্ত হবে যদি $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 = ab$ হয়।

...লে, $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

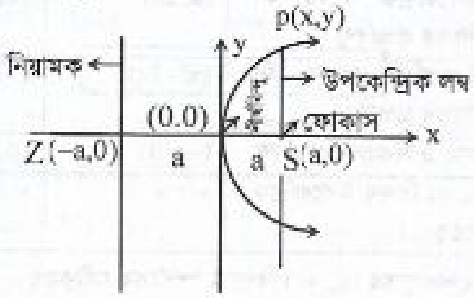
...উপবৃত্ত হবে যদি $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 < ab$ হয়।
...অধিবৃত্ত হবে যদি $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 > ab$ হয়।
...জোড়া সরলরেখা হবে যদি $\Delta = 0$ হয়।
...এর বিভিন্ন মানের জন্য গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথ বিভিন্নরূপ ধারণ করে:
... $e = 1$ হলে, কনিকটি পরাবৃত্ত (Parabola) হবে।
... $0 < e < 1$ হলে, কনিকটি উপবৃত্ত (Ellipse) হবে।
... $e > 1$, হলে কনিকটি অধিবৃত্ত (Hyperbola) হবে।
... $e = 0$ হলে, একটি বৃত্ত পাওয়া যায়।
... $e = \infty$ হলে সরলরেখা পাওয়া যায়।
...এর এমন আর কোন মান নাই যে, কনিকের সংজ্ঞা হতে বৃত্তের সমীকরণ ...ওয়া যায়। এ কারণে বৃত্তকে কনিক বলা যায় না]
...টি কনিকের ফোকাস (α, β), নিয়ামক $ax + by + c = 0$ এবং ...কেন্দ্রিকতা e হলে কনিকটির সমীকরণ হবে-

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

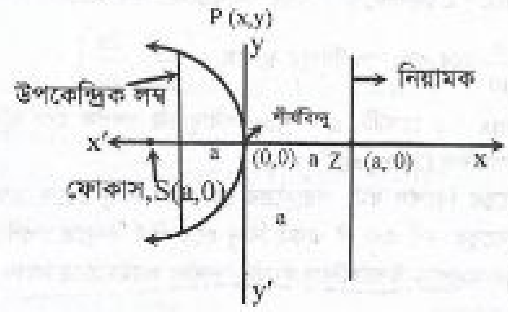
...সাধারণ সমীকরণ: পরাবৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ কোন বিন্দু হলে, উহার ...সমীকরণ PS = PM। যেখানে, PS = P থেকে ফোকাসের দূরত্ব;
PM = P থেকে নিয়ামকের উপর লম্ব দূরত্ব।
...অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y = ax^2 + bx + c$
...শীর্ষ $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব $\frac{1}{|a|}$
...অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y = ax^2 + by + c$
...শীর্ষ $\left(\frac{b^2-4ac}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব $\frac{1}{|a|}$
...বিন্দু (x_1, y_1) বিন্দুতে এবং অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল এমন পরাবৃত্তের ...সমীকরণ, $(y-y_1)^2 = 4a(x-x_1)$।
...বিন্দু (x_1, y_1) বিন্দুতে এবং অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল এমন পরাবৃত্তের ...সমীকরণ, $(x-x_1)^2 = 4a(y-y_1)$।

- মনে রাখার সুবিধার্থে: দিকাক্ষ যার সমান্তরাল তার উপর বর্গ, আর অক্ষ যার সমান্তরাল তার বিপরীতে বর্গ।
- পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র মূলবিন্দু হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 4a(x+a)$
- পরাবৃত্তের দিকাক্ষ ও অক্ষরেখার ছেদবিন্দু মূলবিন্দু হলে, পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে $y^2 = 4(x-a)$
- পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ: SP = PM শর্ত ব্যবহার করে এবং অক্ষরেখা x অক্ষ বা y অক্ষের সমান্তরাল ধরে পরাবৃত্তের যে আদর্শ সমীকরণ পাওয়া যায় তা হল, $y^2 = 4ax$ বা $x^2 = 4ay$। তবে এই ক্ষেত্রে মোট চার প্রকার পরাবৃত্ত আছে। অন্য দুইটি হল–
  (i) $y^2 = -4ax$, (ii) $x^2 = -4ay$

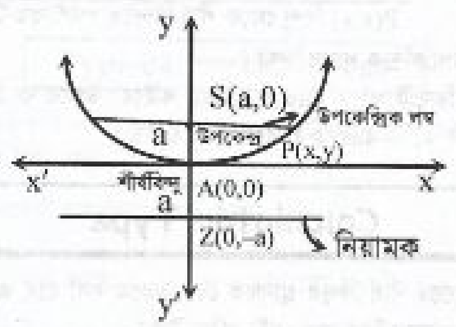
➤ **$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র:**



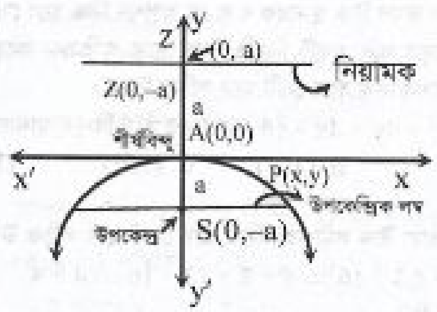
➤ **$y^2 = -4ax$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র:**



➤ **$x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র:**



➤ **$x^2 = -4ay$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র:**



❒ পরাবৃত্তের উপাদানের নাম:

	$y^2 = 4ax$ আকারের পরাবৃত্ত	$x^2 = 4ay$ আকারের পরাবৃত্ত
(i) শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক	(0, 0)	(0, 0)
(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	(a, 0)	(0, a)
(iii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	4a একক	4a একক
(iv) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x - a = 0$	$y - a = 0$
(v) অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$
(vi) শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$
(vii) নিয়ামকের সমীকরণ	$x + a = 0$	$y + a = 0$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের ধন দিকের প্রান্তবিন্দু	(a, 2a)	(2a, a)
(ix) উপকেন্দ্রিক লম্বের ঋণ দিকের প্রান্তবিন্দু	(a, –2a)	(–2a, a)
(x) অক্ষ ও নিকাক্ষের ছেদবিন্দু	(–a, 0)	(0, –a)
(xi) (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব	$x + a$	$y + a$

❒ $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$ ।

❒ $y = mx + c$ রেখাটি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে $c = \frac{a}{m}$ হবে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ ।

❒ $y = mx + c$ রেখাটি, $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হবে যদি $c = -am^2$ এবং স্পর্শবিন্দু $(2am, am^2)$ ।

❒ **পরাবৃত্তের বিশেষ ধর্ম:** পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দু থেকে অক্ষরেখার উপর লম্ব দূরত্বের বর্গ এবং ঐ একই বিন্দু হতে শীর্ষ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব দূরত্বের অনুপাত উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যের পরমমানের সমান। অর্থাৎ, যে কোন পরাবৃত্তে

$$\frac{\text{P((x,y) বিন্দু থেকে অক্ষরেখার উপর লম্ব দূরত্ব)}^2}{\text{P(x,y) বিন্দু থেকে শীর্ষ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব দূরত্ব}}$$

= 4 × | উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য |

❒ (x_1, y_1) বিন্দুটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের বাইরে, উপরে বা ভিতরে অবস্থান করবে, যদি $y_1^2 - 4ax_1 > 0$ বা = বা < 0 হয়।

Calculator Type

যখন পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক বের করতে বলা হবে তখন যে অপশন দ্বারা প্রদত্ত পরাবৃত্ত সিদ্ধ হবে সেটি সঠিক উত্তর।

অথবা যখন পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক দেয়া থাকবে এবং পরাবৃত্ত বের করতে বলবে তখন উক্ত স্থানাংক দ্বারা যে অপশন সিদ্ধ হবে সেটি সঠিক উত্তর।

Note: কোন পরাবৃত্ত যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তবে উক্ত বিন্দু দ্বারা যে অপশন সিদ্ধ হবে সেটি হবে সঠিক উত্তর।

উদাহরণ: $x^2 = 4y + 4x - 16$ পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাংক-

A. (2, 1) B. (3, 2) C. (5, 2) D. (3, 3)

সমাধান: $x^2 = 4y + 4x - 16$

যে অপশন দ্বারা উক্ত সমীকরণ সিদ্ধ হবে সেটি হবে সঠিক উত্তর B অপশন।

$2^2 = 4.2 + 4.3 - 16 \Rightarrow 4 = 8 + 12 - 16 \Rightarrow 4 = 4$

সঠিক উত্তর B ।

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়

Type-01: পরাবৃত্তের বিভিন্ন উপাদানের মান নির্ণয়

01. $y^2 + 4y + 8x + 20 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, ... স্পর্শক, অক্ষরেখা, উপকেন্দ্রিক লম্ব, দিকক্ষের সমীকরণ, এবং ... লম্বের দৈর্ঘ্য বের কর।

Solⁿ: $y^2 + 4y + 8x + 20 = 0 \Rightarrow (y + 2)^2 = -8x - 20 - 4$

$\Rightarrow (y + 2)^2 = -8(x + 3)$ ∴ শীর্ষবিন্দু = (–3, –2)

∴ অক্ষরেখার সমীকরণ $y + 2 = 0$ এবং

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $x + 3 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 একক

আবার, $(y + 2)^2 = 4(-2)(x + 3)$

$\Rightarrow (y + 2)^2 = (x + 3 - 2)^2 - (x + 3 + 2)^2$

$\Rightarrow (y + 2)^2 + (x + 5)^2 = (x + 1)^2$

∴ $\sqrt{(y + 2)^2 + (x + 5)^2} = x + 1$ ∴ উপকেন্দ্র = (–5, –2)

নিকাক্ষের সমীকরণ $x + 1 = 0$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ ...

For practice:

01. $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, ফোকাস, ... লম্বের দৈর্ঘ্য, অক্ষরেখা ও নিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $(-3, -7), \left(-3, -\frac{71}{10}\right), \frac{2}{5}, x + 3 = 0;$ ...

Type-02: পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (6টি ভিন্ন ...

Ex-01 একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (–2, –3) এবং শীর্ষে স্পর্শক ... এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ: স্পর্শকের ঢাল = –1

∴ (–2, –3) বিন্দুগামী অক্ষরেখার সমীকরণ, $y + 3 = 1(x + 2)$

∴ $x - y - 1 = 0$

∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = উপকেন্দ্র হতে শীর্ষে স্পর্শকের ... দূরত্বের চারগুণ

$4 \times \left(\frac{-2 - 3 + 4}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right) = -2\sqrt{2}$

∴ p(x, y) পরাবৃত্তের যে কোন বিন্দু হলে,

p বিন্দু হতে অক্ষরেখার উপর লম্ব দূরত্ব $= \frac{x - y - 1}{\sqrt{2}}$

এবং p বিন্দু হতে স্পর্শকের উপর লম্ব দূরত্ব $= \frac{x + y + 4}{\sqrt{2}}$

এখন, $\left(\frac{x - y - 1}{\sqrt{2}}\right)^2 \div \frac{x + y + 4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$ [পরাবৃত্তের বিশেষ ...]

$\Rightarrow \frac{(x - y - 1)^2}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{x + y + 4} = -2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (x - y - 1)^2 = -4x - 4y - 16$

∴ $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 6y + 17 = 0$

Ex-02 পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (4, –3) বিন্দুতে ... নিকাক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (–4, –7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম ...

Solⁿ: পরাবৃত্তটির অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল ও শীর্ষবিন্দু (4, –3)

∴ এর সমীকরণ, $(x - 4)^2 = 4a(y + 3)$, ইহা (–4, –7) বিন্দুগামী

∴ $64 = -16a$ ∴ $a = -4$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - 8x + 16 = -16y - 48$

∴ $x^2 - 8x + 16y + 64 = 0$

...পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (3, 1) বিন্দুতে অবস্থিত এবং ...ক্ষের সমীকরণ $4x + 3y - 5 = 0$

...বৃত্তের শীর্ষ A(3, 1) ও নিকাক্ষ $4x + 3y - 5 = 0$

...রেখার সমীকরণ, $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 3)$

$...y - 4 = 3x - 9 \quad \therefore 3x - 4y - 5 = 0$

...ক্ষ ও অক্ষরেখার ছেদবিন্দু $= \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

...উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β) হলে, $\frac{\frac{7}{5} + \alpha}{2} = 3$ এবং $\frac{-\frac{1}{5} + \beta}{2}$

$(\alpha, \beta) = \left(\frac{23}{5}, \frac{11}{5}\right)$

...(x, y) পরাবৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দু হলে, SP = PM

$\left(x - \frac{23}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{(4x + 3y - 5)^2}{25}$

$(3x - 4y)^2 - 190x - 80y + 625 = 0$ **Ans.**

...এমন পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (–6, –3) এবং শীর্ষ ... বিন্দুতে অবস্থিত।

...আছে, শীর্ষ (–2, 1) ও উপকেন্দ্র (–6, –3)। অক্ষ ও দিকাক্ষের ...বিন্দু (α, β) হলে, $\frac{\alpha - 6}{2} = -2$ এবং $\frac{\beta - 3}{2} = 1 \therefore (\alpha, \beta) = (2, 5)$

...এখন অক্ষরেখার ঢাল = 1

...দিকাক্ষের সমীকরণ, $y - 5 = -(x - 2) \quad \therefore x + y - 7 = 0$

...অনুসারে, SP = PM

$\sqrt{(x + 6)^2 + (y + 3)^2} = \frac{x + y - 7}{\sqrt{2}}$

$(x - y)^2 + 38x + 26y + 41 = 0$ **Ans.**

...(3, 3), (6, 5) এবং (6, –3) বিন্দুগামী যে পরাবৃত্তের অক্ষ, x অক্ষের ...সমান্তরাল, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

...অক্ষের সমান্তরাল অক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ:

$x = ay^2 + by + c$ যা (3,3), (6,5) এবং (6,–3) বিন্দুগামী।

...(3, 3), (6, 5) ও (6, –3) বসিয়ে পাই, $3 = 9a + 3b + c$

$6 = 25a + 5b + c$

$6 = 9a - 3b + c$

...সমাধান করে পাই, $a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{2}; c = \frac{9}{4}$

$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{9}{4} \Rightarrow 4x = y^2 - 2y + 9$

$y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$ **Ans.**

For practice:

...পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (–4, –2); অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল, যা (0, 2) ...বিন্দু অতিক্রম করে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $y^2 + 4y - 4x = 12$

...(–2, 11), (–4, 21) বিন্দুগামী যে পরাবৃত্তের অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল ...সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

...(1, 2) এবং (–1, 3) বিন্দুগামী যে পরাবৃত্তের অক্ষ x অক্ষের ...সমান্তরাল তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $5y^2 - 21y + 2x - 20 = 0$

04. (–1, 1) উপকেন্দ্র এবং $x + y + 1 = 0$ নিয়ামক বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণও নির্ণয় কর।

Ans. $(x-y)^2+2x-6y+3=0$; $x-y+2=0$; $\sqrt{2}$; $x+y=0$

05. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (2, 5) এবং $x = 4$ রেখাটি এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক। **Ans.** $y^2-10y+8x-7=0$

06. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (4, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y = 7$। এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর।

Ans. $(x - 4)^2 = -16(y - 3)$; 16

07. একটি পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $x - c = 0$ এবং তার শীর্ষ (c′, 0) বিন্দুতে অবস্থিত। দেখাও যে, পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4(c'-c)(x-c')$

08. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (–6, –6) এবং শীর্ষবিন্দু (–2, 2). **Ans.** $5[(x+6)^2+(y+6)^2]=(x+2y-22)^2$

Type-03

Ex-01 $(y - 2)^2 = 5(x - 1)$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব $\frac{25}{4}$, উক্ত বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

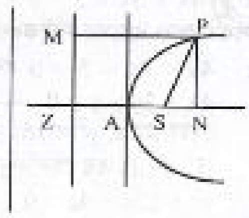
Solⁿ: $(y - 2)^2 = 5(x - 1)$

$\therefore Y^2 = 5.X$

এখানে, SP = PM

$\Rightarrow SP = ZN \Rightarrow SP = AZ + AN$

$\Rightarrow SP = AS + AN$



$\Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{5}{4} + X \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{5}{4} + x - 1 \therefore x = 6$

$x = 6$ বসালে $(y - 2)^2 = 5.5 \Rightarrow y - 2 = \pm 5$

$\therefore y = 7, -3 \therefore$ নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় (6, 7) অথবা (6, –3) **Ans.**

For practice:

01. $x^2 = 8y$ পরাবৃত্তের উপর এমন দুটি বিন্দু নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির উপকেন্দ্র থেকে দূরত্ব 4 একক হয়। **Ans.** (± 4, 2)

02. $y^2 = 20x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দুর ভুজ 7 একক হলে উপকেন্দ্র হতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। **Ans.** 12 একক

Type-04: স্পর্শকের সমীকরণ

Ex-01 $y = 3x + 1$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Solⁿ: কোন সরলরেখা পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, $c = \frac{a}{m}$

$y = 3x + 1$ সমীকরণে; $c = 1$; $m = 3$ বসালে, $1 = \frac{a}{3} \therefore a = 3$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4 \times 3 = 12$ একক **Ans.**

Ex-02 $x^2 = 8y$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x + y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব।

Solⁿ: $x^2 = 8y$ পরাবৃত্তের স্পর্শক $xx_1 = 4(y + y_1) = 0$

$\therefore xx_1 - 4y - 4y_1 = 0$ ------- (i)

$x + y + 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$x - y + k = 0$ --------- (ii)

$\because$ (i) ও (ii) অভিন্ন $\therefore \frac{x_1}{1} = \frac{-4}{-1} = \frac{-4y_1}{k} \therefore x_1 = 4; y_1 = -k$

(ii) নং এ $x = 4$; $y = k$ বসিয়ে, $4 + k + k = 0 \therefore k = -2$

(iii) নং এ $k = -2$ বসিয়ে $x - y - 2 = 0 \therefore y = x - 2$ **Ans.**

Ex-03 $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের $(1, 2)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ;

$y.2 = 2.1(x + 1) \therefore y = x + 1$ **Ans.**

Ex-04 $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় P, Q হলে ΔAPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Sol^n: $y^2 = 16x$ কে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 4$

$\therefore$ প্রদত্ত উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $A(0, 0)$ এবং উপকেন্দ্র $S(4, 0)$, সুতরাং উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের ভুজ 4।

$\therefore y^2 = 16 \times 4 \quad \therefore y = \pm 8$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $P(4, 8)$ এবং $Q(4, -8)$

$$\Delta APQ\text{এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-32-32) = -32$$

$\because$ ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হতে পারে না

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 32 বর্গ একক। **Ans.**

Ex-05 $4x + 3y - 5 = 0$ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $4x + 3y - 5 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে কোন জ্যা এর সমীকরণ

$4x + 3y + c = 0$ ------------- (i)

দেয়া আছে, $y^2 = 16x$ ----------- (ii)

(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুর জন্য $y^2 = 4(-3y - c)$

$\therefore y^2 + 12y + 4c = 0$

এই সমীকরণের মূলদ্বয় y_1 ও y_2 হলে, $y_1 + y_2 = -12$

বা, $\frac{y_1 + y_2}{2} = -6 \Rightarrow y = -6 \therefore y + 6 = 0$ **Ans.**

Note: যেকোনো বক্ররেখার সমান্তরাল জ্যাগুচ্ছের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথকে ঐ সমান্তরাল জ্যা গুচ্ছের সাপেক্ষে ঐ বক্ররেখার ব্যাস বলে।

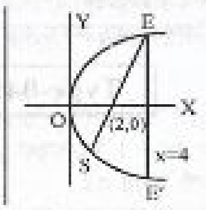
Ex-06 $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের নাভিগামী জ্যা SE এবং অন্য একটি জ্যা EE'। $x = 4$ এর ঋণাত্মক স্থানাংক বিশিষ্ট প্রান্তবিন্দু E দিয়ে যায়। জ্যাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $y^2 = 8x$ সমীকরণ হতে পাই, $a = 2$

$\therefore$ নাভির স্থানাংক $(2, 0)$

E বিন্দুর ভুজ 4 যা $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত $\therefore y^2 = 32$

$\therefore y = \pm 4\sqrt{2}$



$\therefore$ E বিন্দুর স্থানাংক $(4, 4\sqrt{2})$

এখন $(2, 0)$ এবং $(4, 4\sqrt{2})$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ–

$$y - 0 = \frac{4\sqrt{2} - 0}{4 - 2}(x - 2) \therefore y = 2\sqrt{2}(x - 2)$$

$\therefore$ ES জ্যার সমীকরণ $y = 2\sqrt{2}(x - 2)$ **Ans.**

Ex-07 একটি সরলরেখা $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ এবং $y^2 = 4x$ উভয়কে স্পর্শ করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শকারী সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + \frac{1}{m}$

$\therefore m^2x - my + 1 = 0$ ------------ (i)

এখন প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-1, 0)$ ও ব্যাসার্ধ = 1

যেহেতু রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক $\therefore \left|\frac{-m^2 + 1}{\sqrt{m^4 + m^2}}\right| = 1$

$\Rightarrow 1 - 2m^2 + m^4 = m^4 + m^2 \Rightarrow 3m^2 = 1$

$\therefore m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{3}y = \pm(x + 3)$

For practice:

01. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x - 2y - 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব। **Ans.** $2y - $ ...
02. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক প্রান্তবিন্দুদ্বয় ও শীর্ষবিন্দুর ... সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** ...
03. $y^2 = 4x$ এবং $x^2 = 4y$ পরাবৃত্তদ্বয়ের উভয়কে স্পর্শ করে এরূপ ... সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x + $ ...
04. প্রমাণ কর যে, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের নাভিগামী একটি জ্যার ... স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ হলে অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t}\right)$।

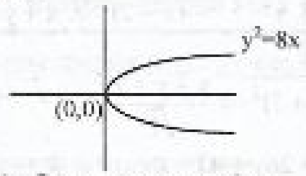
Type-05 : পরাবৃত্তের লেখচিত্র সংক্রান্ত

পরাবৃত্তের লেখচিত্র নির্ণয়ে পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং অক্ষরেখার অভিমুখ ... হবে।

Ex-01 $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের লেখচিত্র কী?

Sol^n: $y^2 = 8x = 4.2.x$

উক্ত পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(0, 0)$ এবং যেহেতু বামপক্ষ $= y^2$ ... ধনাত্মক। তাই অক্ষরেখার অভিমুখ x অক্ষের ধনাত্মক দিকে ... পরাবৃত্তটির লেখচিত্রঃ



Ex-02 $y = (x + 1)^2$ সমীকরণের লেখ কোনটি?

Sol^n: প্রদত্ত পরাবৃত্ত, $(x + 1)^2 = y = 4.\frac{1}{4}.y$

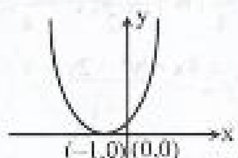
শীর্ষবিন্দু: $(0, 0)$

অর্থাৎ, $X = 0$ এবং $Y = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x = -1 \therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 0)$

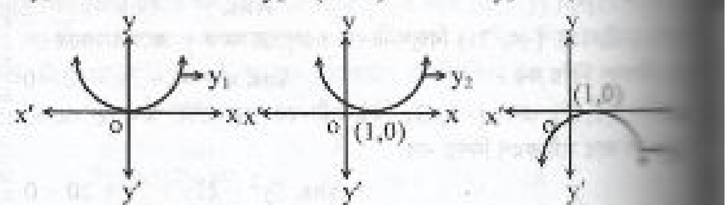
আবার, যেহেতু পরাবৃত্তের বামপক্ষ $(x + 1)^2$, যা সর্বদা ধনাত্মক ... অক্ষরেখার অভিমুখ y অক্ষের ধনাত্মক দিকে। সুতরাং পরাবৃত্তের লেখ...



Ex-03 $y = -(x - 1)^2$ সমীকরণের লেখচিত্র নির্ণয় কর।

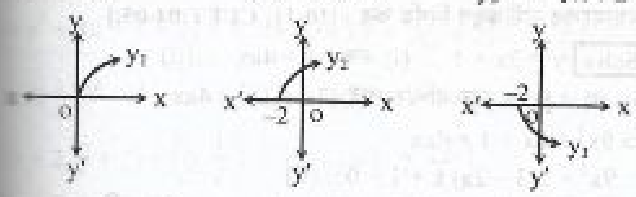
Sol^n:

$y_1 = x^2 \qquad y_2 = (x - 1)^2 \qquad y_3 = -(x - 1)^2$



$y = -\sqrt{x+2}$ সমীকরণের লেখচিত্র নির্ণয় কর।

$y_1 = \sqrt{x}$ $\quad y_2 = \sqrt{x+2}$ $\quad y_3 = -\sqrt{x+2}$



For practice:

$y = \sqrt{x+2} + 1$ সমীকরণের লেখচিত্র নির্ণয় কর।
$y = x^2 - 4x + 1$ সমীকরণের লেখচিত্র নির্ণয় কর।

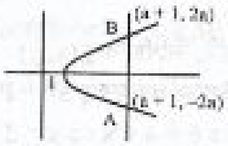
BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

একটি বৃত্তের সমীকরণ বের কর যার ব্যাস $y^2 = 4(x-1)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমান। [15-16]

Solve $y^2 = 4(x-1)$



$x = 1$

$A = (2, -2)$ এবং $B = (2, 2)$

AB কে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ

$(x-2)(x-2) + (y+2)(y-2) = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$ **Ans.**

একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(4, -3)$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 এবং যার অক্ষ, x- অক্ষের সমান্তরাল।
[13-14; RUET : 05-06; CUET : 10-11]

Solve শীর্ষ বিন্দু $(4, -3)$, উপকেন্দ্রিক লম্ব $|4a| = 4 \therefore 4a = 4$

$(4, -3)$ শীর্ষ বিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্ত x অক্ষের সমান্তরাল হলে,

পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y+3)^2 = \pm 4(x-4)$ **Ans.**

(3, 4) উপকেন্দ্র ও (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [06-07]

Solve পরাবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ, $y = \frac{4}{3}x \Rightarrow 4x = 3y$

ধরি, দিকাক্ষ, অক্ষরেখাকে $z(\alpha, \beta)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\frac{\alpha+3}{2} = 0 \therefore \alpha = -3$ এবং $\frac{\beta+4}{2} = 0 \therefore \beta = -4$

$(\alpha, \beta) = (-3, -4)$

দিকাক্ষের সমীকরণ যা অক্ষের উপর লম্ব $3x + 4y + k = 0$

$(-3, -4)$ বিন্দুগামী $\therefore -9 - 16 + k = 0 \therefore k = 25$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $3x + 4y + 25 = 0$ **Ans.**

একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র মূল বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি পরাবৃত্তকে এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে।
[05-06; KUET : 11-12]

Solve

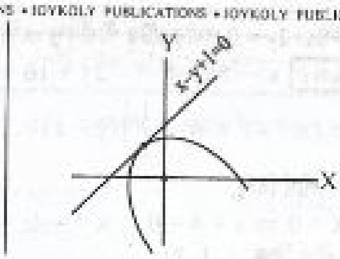
$a = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ধরি, দিকাক্ষের সমীকরন,

$x - y + k = 0$

উপকেন্দ্র থেকে দিকাক্ষের দূরত্ব,

$\frac{0 - 0 + k}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2a = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\therefore k = 2 \therefore$ দিকাক্ষের সমীকরন, $x - y + 2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\{(x-0)^2 + (y-0)^2\}(1^2 + 1^2)$
$= (x - y + 2)^2$
$\Rightarrow (x + y)^2 = 4(x - y + 1)$ **Ans.**

05. $x - y + 2 = 0$ সরলরেখাটি কোন পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে তার অক্ষের উপর লম্ব এবং উপকেন্দ্র $(1, -1)$ বিন্দুতে অবস্থিত। পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [03-04]

Solve ধরি, দিকাক্ষের সমীকরণ, $x - y + k = 0$

ফোকাস $(1, -1)$ হতে দিকাক্ষের উপর লম্ব

$= 2 \times$ ফোকাস হতে $x - y + 2 = 0$ রেখার দূরত্ব

$\Rightarrow \frac{1 - (-1) + k}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{1 - (-1) + 2}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = 6$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ, $x - y + 6 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{x - y + 6}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 4 = x^2 + y^2 + 36 - 2xy + 12x - 12y$

$\therefore x^2 + y^2 + 2xy - 16x + 16y - 32 = 0$ **Ans.**

06. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ দুবার বর্গ করে কণিকটি সনাক্ত কর। অক্ষের সমীকরণ, শীর্ষবিন্দু এবং স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দু দেখিয়ে ছবি আঁক। [02-03]

Solve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{a} - \sqrt{y}$

$\Rightarrow x = a - 2\sqrt{a}\sqrt{y} + y$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x - y - a = -2\sqrt{a}\sqrt{y}$

$\Rightarrow (x - y - a)^2 = (-2\sqrt{a}\sqrt{y})^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (x - y)^2 - 2a(x - y) + a^2 = 4ay$

$\Rightarrow (x - y)^2 = 2a\left(x - y + 2y - \frac{a}{2}\right)$

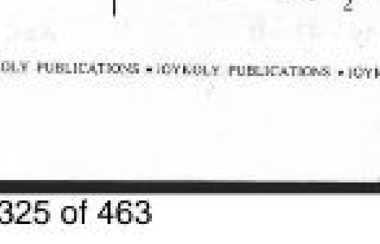
$\therefore (x - y)^2 = 2a\left(x + y - \frac{a}{2}\right)$

$\therefore$ কণিকটি একটি পরাবৃত্ত। অক্ষরেখার সমীকরণ $x - y = 0$ এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x + y - \frac{a}{2} = 0$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু হবে $x - y = 0$ এবং $x + y - \frac{a}{2} = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $= \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$

আবার, x অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(a, 0)$ এবং y অক্ষের স্পর্শবিন্দু $(0, a)$।



Ans.

07. $x^2+8x+2y=0$ **পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [04-05]

Solve $x^2 + 8x + 4^2 = -2y + 16$

$\Rightarrow (x+4)^2 = 4\left(-\frac{1}{2}\right)(y-8)$ $\therefore$ $X^2 = 4aY$ এর সাথে তুলনা করে,

$\therefore$ শীর্ষ বিন্দু, $Y = 0 \Rightarrow y - 8 = 0$

$X = 0 \Rightarrow x + 4 = 0$ $\therefore$ $x = -4$ $\quad$ $\therefore$ $y = 8$

$\therefore$ শীর্ষ বিন্দু, $(-4, 8)$

দিকাক্ষ; $Y = -a$

$\Rightarrow y - 8 = \frac{1}{2}$ $\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ $y = \frac{17}{2}$ **Ans.**

08. $x^2+4x+2y=0$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [02-03]

Solve $x^2 + 4x + 2y = 0$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2y + 4 = -2(y-2) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)(y-2)$

$\Rightarrow x^2 = 4ay$ $\quad$ এখানে, $X = x + 2$

শীর্ষ, $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ $\quad$ $Y = y - 2,\ a = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x, y) = (-2, 2)$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $Y + a = 0 \Rightarrow y - 2 - \frac{1}{2} = 0$ $\therefore$ $2y = 5$ **Ans.**

09. **যদি** $lx + my + n = 0$ **সরলরেখা** $y^2 = 4ax$ **পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে প্রমাণ কর যে,** $ln = am^2$ [99-00]

Solve $lx + my + n = 0 \Rightarrow y = -\frac{l}{m}x - \frac{n}{m}$

$y^2 = 4ax$ সমীকরণে $y = -\frac{l}{m}x - \frac{n}{m}$ বসালে

$\left(-\frac{l}{m}x - \frac{n}{m}\right)^2 = 4ax$

$\Rightarrow \frac{l^2}{m^2}x^2 + \frac{2ln}{m^2}x + \frac{n^2}{m^2} = 4ax$

$\Rightarrow l^2x^2 + (2ln - 4am^2)x + n^2 = 0$

যদি $lx + my + n = 0$ রেখা $y^2 = 4ax$ রেখাকে স্পর্শ করে তবে (i) নং এর নিশ্চায়ক $D = 0$ হবে।

$\Rightarrow (2ln - 4am^2)^2 - 4l^2n^2 = 0 \Rightarrow 4(ln - 2am^2)^2 - 4l^2n^2 = 0$

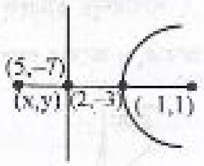
$\Rightarrow l^2n^2 - 4lm^2na + 4a^2m^4 - l^2n^2 = 0 \Rightarrow 4m^2a(am^2 - ln) = 0$

$\therefore$ $ln = am^2$ [$\because$ $m \neq 0,\ a \neq 0$] **(Proved)**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. **(–1, 1) উপকেন্দ্র এবং (2, –3) শীর্ষ বিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তটির অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [05-06]

Solve $2 = \frac{x-1}{2},\ -3 = \frac{y+1}{2}$



$\Rightarrow x = 5$ এবং $y = -7$

$\therefore$ $(x, y) = (5, -7)$ $\therefore$ $(5, -7)$ এবং $(-1, 1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বা অক্ষের সমীকরণ $\frac{x-5}{5+1} = \frac{y+7}{-7-1}$

$\Rightarrow -4(x-5) = 3(y+7) \Rightarrow 4x + 3y + 1 = 0$

অক্ষ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$ যা $(5, -7)$ বিন্দুগামী $\therefore$ $3 \times 5 - 4(-7) + k = 0 \Rightarrow k = -43$

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ $3x - 4y - 43 = 0$ **Ans.**

02. $y = 3x + 1$ **সরলরেখা** $y^2 = 4ax$ **পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে,** ... **স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক, উপকেন্দ্রের স্থানাংক, উপকেন্দ্রিক** ... **নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [10-11; CUET:04-05;]

Solve $y = 3x + 1$ .... (i) এবং $y^2 = 4ax$ .....(ii)

(ii) নং এ y এর মান বসিয়ে পাই $(3x+1)^2 = 4ax$

$\Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 4ax$

$\therefore$ $9x^2 + 2(3 - 2a)x + 1 = 0$....(ii)

এর নিশ্চায়ক $\{2(3 - 2a)\}^2 - 4.9.1 = 0$

$\therefore$ $a = 3$ ($\because$ $a \neq 0$)

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(3, 0)$ বলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4 \times 3 = 12$

দিকাক্ষ: $x + a = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$।

$\therefore$ $y^2 = 12x \Rightarrow (3x+1)^2 = 12x \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 12x$

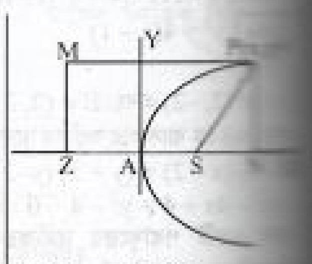
$\Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$ $\therefore$ $x = \frac{1}{3}$ $\therefore$ $y = 3.\frac{1}{3} + 1 = 2$

স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক $= \left(\frac{1}{3}, 2\right)$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে ...

01. $y^2 = 16x$ **পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক** ... **বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।** [05-06]

Solve $y^2 = 16x = 4.4x$



$\therefore$ $a = 4$

ধরি, নির্ণেয় বিন্দু (x, y)

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $SP = PM = ZN$

$\Rightarrow 6 = 4 + x \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ $y = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $(2, \pm 4\sqrt{2})$

02. $y^2 = 12x$ **পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের ঋণদিকের প্রান্ত বিন্দু** ... **ও অক্ষের ছেদ বিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরন নির্ণয় কর।** [03-...

Solve $y^2 = 12x = 4.3x$

লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $= (3, \pm 6)$ $\therefore$ ঋণাত্মক দিকের প্রান্তবিন্দু $= (3, -$...

দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = -3$ এবং দিকাক্ষের ও অক্ষের ছেদ বিন্দু $(-3$...

$\therefore$ $(3, -6)$ ও $(-3, 0)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমীকরণ

$\frac{x-3}{3+3} = \frac{y+6}{-6-0} \Rightarrow x + y + 3 = 0$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে ...

01. **(–8, 2) উপকেন্দ্র ও** $2x - y - 9 = 0$ **দিকাক্ষ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের** ... **বের কর।** [08-09]

Solve ধরি, পরাবৃত্তের উপর চলমান একটি বিন্দু $P(x, y)$

সংজ্ঞানুসারে, $PS = PM$

$\Rightarrow \sqrt{(x+8)^2 + (y+2)^2} = \frac{|2x - y - 9|}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \{(x+8)^2 + (y+2)^2\} \times 5 = (2x - y - 9)^2$

$\Rightarrow 5(x^2 + 16x + 64 + y^2 + 4y + 4) - 4x^2 + y^2 + 81 - 4xy$ ...

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 + 116x + 2y + 4xy + 259 = 0$

...বৃত্ত $2y-x^2=4x$ এর উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [07-08]

Solve $2y=x^2+4x$

$\Rightarrow x^2+4x+4=2y+4 \Rightarrow (x+2)^2=2(y+2)=4\cdot\frac{1}{2}(y+2)$

$(x+2)^2=4\times\frac{1}{2}\times(y+2)$ ..... (i) $\therefore$ উপকেন্দ্র $(X,Y)=(0,a)$

$(x+2, y+2)=\left(0,\frac{1}{2}\right) \therefore (x,y)=\left(-2,\frac{-3}{2}\right)$

...মকের সমীকরণ, $Y=-a$

$\Rightarrow y+2=\frac{-1}{2} \Rightarrow y=\frac{-5}{2} \therefore 2y+5=0$ **Ans.**

...নের পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা এবং ...কের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$5x^2+15x-10y-4=0$ [06-07]

Solve $5x^2+15x-10y-4=0$

$\Rightarrow 5x^2+15x=10y-4 \Rightarrow x^2+3x=2y+\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=2\left(y+\frac{61}{40}\right) \therefore$ শীর্ষ $=\left(\frac{-3}{2},-\frac{61}{40}\right)$

...কেন্দ্র $(X,Y)=(0,a);\ a=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}, y+\frac{61}{40}\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$(x,y)=\left(\frac{-3}{2},-\frac{41}{40}\right)$ উপকেন্দ্রিক লম্ব $=4a=4\cdot\frac{1}{2}=2$

...রেখা $x+\frac{3}{2}=0$ দিকাক্ষ, $Y=\frac{-1}{2} \therefore y+\frac{81}{40}=0$ **Ans.**

...$-8x-5$ পরাবৃত্তের শীর্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [04-05]

Solve $y^2=8\left(x-\frac{5}{8}\right)=4.2\left(x-\frac{5}{8}\right)$ ..... (i)

...কেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=4a=8$ এবং শীর্ষবিন্দু $(x,y)=\left(\frac{5}{8},0\right)$ **Ans.**

...$=9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 হলে ঐ বিন্দুর ...কেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর। [03-04; BUET : 12-13,10-11]

Solve $(12)^2=9x \Rightarrow x=16 \therefore P(16,12)$

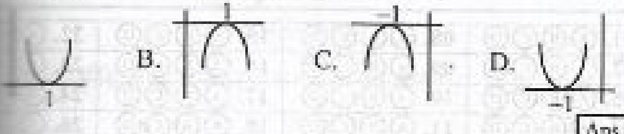
$y^2=4\cdot\frac{9}{4}x \therefore$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $S\left(\frac{9}{4},0\right)$

$PS=\sqrt{\left(\frac{55}{4}\right)^2+(12)^2}=\frac{73}{4}$ একক $=18.25$ একক **Ans.**

MCQ Part

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

...নের কোনটি $y=-(x-1)^2$ এর লেখচিত্র? [10-11]



Ans.B

...$-6x+4y+11=0$ পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [09-10]

...$y=0$ B. $y+2=0$

...$x-7=0$ D. $x=0$

Ans B Solve $y^2-6x+4y+11=0$

$\Rightarrow y^2+4y+4=6x-11+4 \Rightarrow (y+2)^2=6x-7$

$Y^2=4aX$ এর সাথে তুলনা করে।

অক্ষ $Y=0 \therefore y+2=0$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $5y=x+50$ রেখাটি $y^2=4ax$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক হয়, তবে তার ফোকাস হলো- [12-13]

A. (1, 0) B. (10, 0) C. (12.2, 0)
D. (5, 0) E. (4, 0)

Ans C Solve $a^2=\left\{\frac{a+50}{\sqrt{5^2+1^2}}\right\}^2$

$\Rightarrow 26a^2=a^2+100a+2500 \Rightarrow 25a^2-100a-2500=0$

$\Rightarrow a^2-4a-100=0 \Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{416}}{2}=12.5$ or, -8.2

$\therefore$ ফোকাস (12.2, 0) বা (–8.2, 0)

02. $(x-4)^2=-4(y-5)$ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ হলো- [07-08]

A. y = 4 B. y = 6 C. x = 6
D. y = – 6 E. x = – 4

Ans B Solve দিকাক্ষের সমীকরণ $Y=1 \Rightarrow y-5=1 \therefore y=6$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $y^2-4x+4y-8$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য একটি ত্রিভুজের বাহু হলে এবং বাহু সংলগ্ন কোণদ্বয় 45° হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত? [12-13]

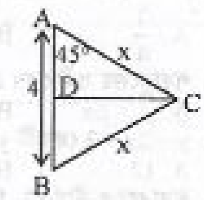
A. 4 B. 16
C. 8 D. None

Ans A Solve $y^2=4x+4y-8$

$\Rightarrow y^2-4y+4=4x-4$

$\Rightarrow (y-2)^2=4(x-1)$

এখানে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক



$4^2=x^2+x^2 \therefore x=2\sqrt{2}$

$\therefore \Delta=\frac{1}{2}\times AB\times DC$

$=\frac{1}{2}4\times\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=4$ বর্গ একক

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. পরাবৃত্ত $y^2=-4ax$-এর দিকাক্ষের সমীকরণ- [12-13]

A. x + a = 0 B. x – a = 0 C. x = 0
D. x + y = a E. None

Ans B Solve $y^2=-4ax$

$\therefore$ দিকাক্ষ: $x=a \therefore x-a=0$

02. $(y-1)^2=4(x+2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [09-10]

A. (2, 1) B. (3, 1) C. (–2, 1)
D. (1, 2) E. (1, –2)

Ans C Solve শীর্ষবিন্দু = (–2, 1)

03. $x=2t,\ y=t^2$ দ্বারা প্রকাশিত পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক- [09-10]

A. (0, 1) B. (1, 0) C. (0, 2)
D. (2, 0) E. None

Ans A Solve $y=\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\Rightarrow 4y=x^2$

$\therefore x^2=4.1y \therefore$ উপকেন্দ্র = (0, 1)

SELF TEST [Written]

01. $x = 3 + 2$, $y = 6t$ সমীকরণ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ এবং শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। **Ans.** $y^2 = 12x$; (0, 0); (3, 0)

02. পরাবৃত্তের দ্বি-কোটির দৈর্ঘ্য 8q হলে, প্রমাণ কর যে, শীর্ষবিন্দু ও তার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

03. $y = ax^2 + bx + c$ প্যারাবোলাটির শীর্ষ (–2, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং (0, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c এর মান নির্ণয় কর।
Ans. $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 5$

04. $x^2 + y^2 = 2a^2$ এবং $y^2 = 8ax$ উভয়কে স্পর্শকারী সরলরেখার সমীকরণ $y = \pm(x + 2a)$

05. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রগামী জ্যা পরাবৃত্তকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে ছেদ করলে দেখাও যে, $x_1x_2 = a^2$

06. একটি আলোক রশ্মি x-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে $y = b$ সরলরেখা বরাবর একটি অবতল দর্পনে আপতিত হল যার xy তলের ছেদ বক্ররেখার সমীকরণ $y^2 = 4ax$। প্রতিসরিত আলোক রশ্মির সমীকরণ বের কর। দেখাও যে, ইহা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র দিয়ে যায়।
[Ans: $(y - b)(4a^2 - b^2) = -b(4ax - b^2)$]

SELF TEST [MCQ]

01. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু (0, 2), অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল এবং যা (2, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।
A. $3x^2 = 4(y - 2)$ B. $4x^2 = 3(y - 2)$
C. $3x^2 = 3(y - 2)$ D. None

02. $4x^2 - 20x - 8y + 39 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য–
A. 6 B. 7 C. 2 D. 4

03. $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি (3, –2) বিন্দুগামী হলে তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য–
A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 4 D. $\frac{1}{3}$

04. পরাবৃত্তের সমীকরণ বের কর যার উপকেন্দ্র (2, 0) এবং দিকাক্ষ $x + 2 = 0$
A. $y^2 = 6x$ B. $y^2 = 8x$ C. $x^2 = 8y$ D. $y^2 = 2x$

05. $y = 2x + 2$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ কে স্পর্শ করলে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত?
A. 12 B. 14 C. 16 D. 13

06. পরাবৃত্তের শীর্ষ (2, 1), দিকাক্ষ $x - 2y + 5 = 0$ হলে, অক্ষের সমীকরণ–
A. $2x + y - 5 = 0$ B. $2x - y - 5 = 0$
C. $2x - y + 5 = 0$ D. $2y + x = 0$

07. $y^2 = 2mx$ পরাবৃত্তটি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ এবং $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 (a + b \neq 0)$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী হলে, এর উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক–
A. $\left(\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right)$ B. $\left(\frac{a}{4(a+b)}, 0\right)$
C. $\left(\frac{b}{(a+b)}, 0\right)$ D. $\left(\frac{ab}{(a+b)}, 0\right)$

08. $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ কোনটি?
A. $y + \frac{23}{6} = 0$ B. $x + \frac{23}{6} = 0$ C. $x + \frac{6}{23} = 0$ D. $y + \frac{6}{23} = 0$

09. (3, 6) বিন্দুতে $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
A. $x - y + 9 = 0$ B. $x + y = 9$ C. $x - y + 3 = 0$ D. $x + y + 3 = 0$

10. যে বিন্দুতে $x - 5y + 6 = 0$ রেখা $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক–
A. (4, 2) B. (9, 3) C. A ও B উভয়ই D. None

11. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের কোন বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ হবে?
A. (0, 0) B. (3, 6) C. (6, 3) D. B ও C উভয়ই

12. নিচের কোনটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার অক্ষরেখা x অক্ষের সমান্তরাল এবং শীর্ষবিন্দু y অক্ষের উপর অবস্থিত যা (0, 2) ও $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।
A. $y^2 - 4y - 8x + 4 = 0$ B. $y^2 - 8y + 4 = 0$
C. $x^2 - 4y - 8x + 4 = 0$ D. $y^2 - 4y - 8x + 5 = 0$

13. $y^2 - kx + 8 = 0$ পরাবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $x - 1 = 0$। k এর ...
A. 4 B. –8 C. A এবং B D. ...

14. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের ... পরাবৃত্তের শীর্ষে অবস্থিত। প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য-
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{8\sqrt{3}}{2}$ D. ...

15. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের দুইটি স্পর্শক $y + b = m_1(x+a)$ এবং $m_2(x+a)$ হলে–
A. $m_1 + m_2 = 0$ B. $m_1m_2 = 1$ C. $m_1m_2 = -1$ D. None

16. $y = x - x^2$ পরাবৃত্তের $x + y = k$ একটি স্পর্শক হবে যদি–
A. $k = 0$ B. $k = -1$ C. $k = 1$ D. k এর যেকোনো ...

17. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগামী জ্যা এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক ...
A. $a = 2b$ B. $2a = b$ C. $a^2 = 2b$ D. ...

18. $4y^2 + 12x - 20y + 67 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র–
A. $\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{17}{4}, \frac{5}{2}\right)$ D. ...

19. পরাবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ–
A. $x = at$, $y = 2at$ B. $x = at^2$, $y = 2at$
C. $y = at^2$, $x = 2at$ D. B এবং C

20. $x^2 + 9y^2 + 6xy + 6x + 8y + 10 = 0$, এটি কিসের সমীকরণ ...
A. পরাবৃত্ত B. বৃত্ত C. অধিবৃত্ত D. উপবৃত্ত

21. $y = 2\sin x$ এবং $y = 5x^2 + 2x + 3$ লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দু ...
A. 0 B. 1 C. 2 D. ...

22. $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র কোনটি?
A. (3, 7) B. (–3, –7) C. $\left(-3, -\frac{71}{10}\right)$ D. None

23. যদি (0, 4) ও (0, 2) যথাক্রমে একটি পরাবৃত্তের শীর্ষ ও উপকেন্দ্র তবে এর সমীকরণ–
A. $x^2 + 8y = 32$ B. $y^2 + 8x = 32$ C. $x^2 - 8y = 32$ D. ...

24. একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দুই প্রান্তবিন্দু (3, 6) ও (–5, 6) ...
A. (1, 6) B. (–1, 6) C. (1, –6) D. ...

25. একটি পরাবৃত্তের শীর্ষ (a, b) ও উপকেন্দ্রিক লম্ব 1। যদি ... অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে-
A. $(x + a)^2 = \frac{1}{2}(2y - 2b)$ B. $(x - a)^2 = \frac{1}{2}(2y - ...$
C. $(x + a)^2 = \frac{1}{4}(2y - 2b)$ D. $(x - a)^2 = \frac{1}{8}(2y - ...$

26. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তে (–2, –1) বিন্দু হতে 2টি স্পর্শক আঁকা ... মধ্যকার কোণ α, তবে tan α = ?
A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

27. $3x^2 - 6x + 4y = 0$ পরাবৃত্ত কোন রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম?
A. $3x = 4$ B. $x - 1 = 0$ C. $x = 0$ D. ...

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22.
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23.
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24.
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26.
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26.
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27.
07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

27.B	26.A	25.B	24.B	23.A	22.C	21.A	20.A
18.C	17.D	16.C	15.C	14.D	13.C	12.A	11.B
09.C	08.B	07.A	06.A	05.C	04.B	03.B	02.C

কনিক-B (উপবৃত্ত)

এক নজরে এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

উপবৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে অংকিত প্রতিটি জ্যা তার কেন্দ্র বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

বৃহৎ অক্ষই উপবৃত্তের সর্বাপেক্ষা বৃহৎ জ্যা।

সূত্র ও সমীকরণসমূহঃ

ফোকাস (α, β), দিকাক্ষ $ax + by + c = 0$ এবং e উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

ইহা উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ।

(x_1, y_1) বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের বাইরে বা উপরে বা ভিতরে থাকবে, যদি $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1>0$ বা $=$ বা <0 হয়।

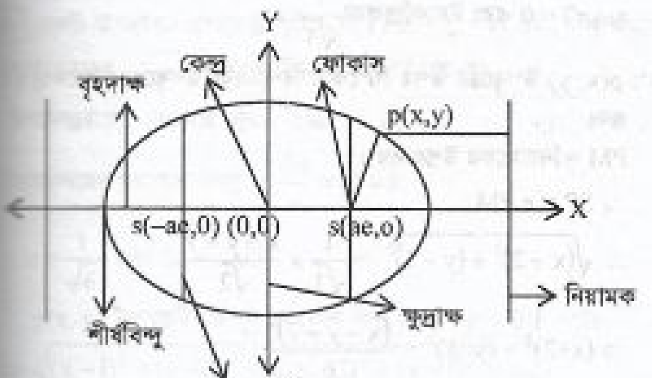
উপবৃত্তের একটি দ্বিতীয় উপকেন্দ্র ও একটি দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ সব সময় m এর সকল মানের জন্য উপবৃত্তের স্পর্শক নির্দেশ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

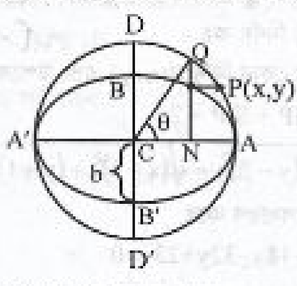
$$\left(\pm\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

নিচে একটি উপবৃত্তের লেখচিত্রঃ



কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে উপবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্কঃ



তখন, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a > b$. উপবৃত্তের বৃহদাক্ষ A'A এর উপরস্থ N বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব উপবৃত্তের P(x, y) বিন্দুতে এবং এর সহায়ক বৃত্তকে (বৃহৎঅক্ষকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্ত) Q বিন্দুতে ছেদ করে।

ধরি, $\angle QCN = \theta$

$\therefore x = CN = CQ\cos\theta = CA\cos\theta = a\cos\theta$

P(x, y) বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত বলে, $\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\theta$

$\Rightarrow y^2 = b^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow y = b\sin\theta$

$\therefore$ P বিন্দুটির পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(a\cos\theta, b\cos\theta)$

আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; b>a$
১। কেন্দ্র	(0, 0)	(0, 0)
২। বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b
৩। ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a
৪। উপকেন্দ্র/ফোকাস	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
৫। বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$
৬। ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$
৭। দিকাক্ষ/ নিয়ামকের সমীকরণ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{b}{e}$
৮। উ. লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
৯। উ. লম্বের সমীকরণ	$x = \pm ae$	$y = \pm be$
১০। বিকেন্দ্রিকতা/ উৎকেন্দ্রিতা	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$
১১। বৃহৎ অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
১২। ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$
১৩। ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব	2ae	2be
১৪। নিয়ামকদ্বয়ের দূরত্ব	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$
১৫। ক্ষেত্রফল	πab	πab
১৬। উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামকের দূরত্ব-	$\frac{a}{e}-ae$	$\frac{b}{e}-be$

- **Technique: 01**

i. উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় S ও S' হলে PS + PS' = বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য।

ii. (a) বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল ও কেন্দ্র (h, k) হলে উপবৃত্তের সমীকরণ- $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ । যেখানে $a > b$

(b) বৃহৎ অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল ও কেন্দ্র (h, k) হলে উপবৃত্তের সমীকরণ- $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ যেখানে $b > a$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণীভুক্ত করা যায়।

Type-01: উপবৃত্তের বিভিন্ন উপাদান নির্ণয় সংক্রান্ত

Ex-01 $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব, উৎকেন্দ্রিকতা, কেন্দ্র, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, দিকাক্ষের সমীকরণ, বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Sol^n: $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$

$\Rightarrow 5(x^2 - 6x) + 9y^2 = 0 \quad \Rightarrow 5(x^2 - 6x + 9) + 9y^2 = 45$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-0)^2}{5} = 1; \ \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{5} = 1$

উপরোক্ত সমীকরণে, $a = 3$

$b = \sqrt{5}$

$X = x - 3$

$Y = y - 0$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ কেন্দ্র ঃ $X = 0$ | $Y = 0$

$\Rightarrow x - 3 = 0$ | $\therefore y = 0$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ কেন্দ্র $(3, 0)$

$\therefore$ উপকেন্দ্র ঃ $X = \pm ae$ | $Y = 0$

$\Rightarrow x - 3 = \pm\left(3 \times \frac{2}{3}\right)$ | $\therefore y = 0$

$\Rightarrow x = \pm 2 + 3$

$\therefore x = 5, 1$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(5, 0)$ এবং $(1, 0)$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times (\sqrt{5})^2}{3} = \frac{10}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $X = \pm ae$

$\Rightarrow x - 3 = \pm\left(3 \times \frac{2}{3}\right) \quad \therefore x - 5 = 0$ বা $x - 1 = 0$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ $X = \pm \frac{a}{e}$

$\Rightarrow x - 3 = \pm\left(3 \times \frac{3}{2}\right) \quad \therefore 2x - 15 = 0$ অথবা $x + 3 = 0$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2a = 2 \times 3 = 6$

এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ **Ans.**

For practice:

01. P এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে। উপবৃত্তের অক্ষ দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **Ans.** P=1; 2, 1

02. $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ এর উৎকেন্দ্রিকতা, কেন্দ্র, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, কেন্দ্র $(2,1)$ উপকেন্দ্র $(2, 3)$ ও $(2, -1)$; উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $y - 3 = 0$ ও $y + 1 = 0$; দিকাক্ষের সমীকরণ $y - 5 = 0$; $y + 3 = 0$

03. $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুটি, উপ... লম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা, দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর?

Ans. উপকেন্দ্রদ্বয় $(3, -1)$ এবং $(1, -1)$, উপকেন্দ্রিক লম্ব $\frac{8}{\sqrt{5}}$ e ...

দিকাক্ষের সমীকরণ; $x - 7 = 0$ x ...

Type-02: উপবৃত্তের বিভিন্ন উপাদান হতে এর সমীকরণ নির্ণয়

Ex-01 $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট ও $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতি... উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপ... সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: এখানে, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{16}{25} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad \therefore b = \frac{3a}{5}$

মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{100}{9a^2} + \frac{5}{b^2} = 1$ [$\frac{10}{3}, \sqrt{5}$ বিন্দুগামী]

$\Rightarrow \frac{100}{9a^2} + \frac{125}{9a^2} = 1$ [$\because b = \frac{3a}{5}$]

$\Rightarrow 9a^2 = 225$

$\therefore a = 5 \quad \therefore b = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Ex-02 এখন উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-2, 3)$, দিকা... $x - y + 7 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$।

Sol^n: $p(x, y)$ উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু এবং উপবৃত্তের উপকেন্দ্র ... এবং

PM = নিয়ামকের উপর লম্ব।

$\therefore SP = e\,PM$

$\therefore \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{x - y + 7}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = \frac{(x - y + 7)^2}{6}$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $5x^2 + 5y^2 + 2xy + 10x - 22y + 29 = 0$ ...

Ex-03 উপকেন্দ্র দুটির স্থানাংক $(3, 2)$, $(1, -1)$ এবং বৃহৎ অক্ষ ... উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ এবং উপকেন্দ্রদ্বয় $S(3, 2)$ এবং $S'(1, -1)$ হলে, $SP + S'P = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 1$

অতঃপর বর্গমূল অপসারণ করে,

$3x^2 + 8y^2 + 12xy - 18x - 32y + 23 = 0$

(1, 0) ও (–1, 0) উপকেন্দ্র এবং 3 উপকেন্দ্রিক লম্ববিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2ae = \sqrt{(1+1)^2} = 2$

$\therefore ae = 1$ ∴ উপকেন্দ্রিক লম্ব $\frac{2b^2}{a} = 3$

আবার, $b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow 3 = 2a(1-e^2) \Rightarrow 3 = 2.\frac{1}{e}(1-e^2)$

$\Rightarrow 3e = 2-2e^2 \Rightarrow 2e^2 + 3e - 2 = 0$

$\therefore e = \frac{1}{2}$ এবং $e = -2$ [গ্রহণযোগ্য নয়]

$\therefore a = \frac{1}{e} = 2 \quad \therefore b^2 = 4\left(1-\frac{1}{4}\right) = 3$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **Ans.**

$3x^2 + 4y^2 = 27$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত $(1, \sqrt{6})$ বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব নির্ণয় কর।

$3x^2 + 4y^2 = 27$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{27/4} = 1 \quad \therefore a = 3; b = \frac{\sqrt{27}}{2}$

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{27}{4}\times\frac{1}{9}\right)} = \frac{1}{2}$

∴ উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm ae, 0) = (\pm\frac{3}{2}, 0)$

$(\pm\frac{3}{2}, 0)$ ও $(1, \sqrt{6})$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{6}-0\right)^2}$ বা $\frac{5}{2}$

এবং $\sqrt{\left(\frac{-3}{2}-1\right)^2 + \left(0-\sqrt{6}\right)^2}$ বা $\frac{7}{2}$ $\therefore \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ একক **Ans.**

একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুটি S(3,1) ও S′(1, 3) এবং দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব $12\sqrt{2}$। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব $2ae = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$

নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব $= \frac{2a}{e} = 12\sqrt{2}$

$\therefore e = \frac{1}{\sqrt{6}}$ এবং $2a = 4\sqrt{3}$

p(x, y) উপবৃত্তটির উপর যে কোন বিন্দু হলে, SP + S′P = 2a

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = 4\sqrt{3}$

∴ উপবৃত্তের সমীকরণ $11x^2 + 2xy + 11y^2 - 48x - 48y - 24 = 0$ **Ans.**

উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\left(-\sqrt{5}, 2\right)$ বিন্দুগামী এবং যার নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 10।

মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{5}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ [ইহা $(-\sqrt{5}, 2)$ বিন্দুগামী]

$\Rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{a^2-5}{a^2} \quad \therefore \quad b^2 = \frac{4a^2}{a^2-5}$

প্রশ্নমতে, $\frac{2a}{e} = 10 \Rightarrow a = 5e$

$\Rightarrow a^2 = 25e^2 \Rightarrow \frac{a^2}{25} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{25} = 1 - \frac{4}{a^2-5} \Rightarrow \frac{a^2}{25} = \frac{a^2-9}{a^2-5}$

$\Rightarrow a^4 - 30a^2 + 225 = 0$

$\Rightarrow (a^2-15)^2 = 0 \quad \therefore a^2 = 15$ $\qquad a^2 = 15$ হলে $b^2 = 6$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$ **Ans.**

Ex-08 (–2, –10) ও (–2, –2) উপকেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের নিয়ামক x অক্ষ। উহার সমীকরণ বের কর।

Sol^n: নিয়ামক x অক্ষ হওয়ায় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

এখানে b > a এবং (α, β) কেন্দ্রের স্থানাংক।

∴ উপবৃত্তের কেন্দ্র $= \left(\frac{-2-2}{2}, \frac{-10-2}{2}\right) = (-2, -6)$

∴ উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $2be = \sqrt{(-2+2)^2 + (-10+2)^2} = 8$

$\therefore be = 4$

প্রশ্নমতে, নিয়ামকের সমীকরণ $y = -6$

নিয়ামকের সাধারণ সমীকরণ, $y = \pm\frac{b}{e}$

তুলনা করে পাই, $\frac{b}{e} = 6$ [শুধু মান নিয়ে]

এখন, $be \times \frac{b}{e} = 6 \times 4 \therefore b^2 = 24$

আবার, $be \times \frac{e}{b} = \frac{4}{6}$

$\therefore e^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{24} = \frac{2}{3} \quad \therefore a^2 = 8$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x+2)^2}{8} + \frac{(y+6)^2}{24} = 1$ **Ans.**

Ex-09 এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (1, 2), উপকেন্দ্র (6, 2) এবং যা (4, 6) বিন্দুগামী।

Sol^n: (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ-

$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$ ইহা (4, 6) বিন্দুগামী

$\therefore \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$ .... (1)

কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব $ae = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2} = 5$

আবার, $b^2 = a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - a^2e^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - 25 \quad \therefore a^2 = b^2 + 25$

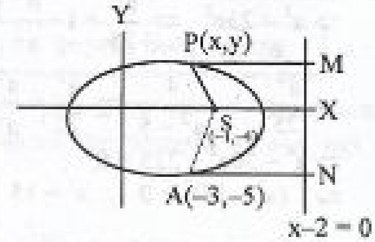
(i) নং হতে, $\frac{9}{b^2+25} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\therefore b^2 = 20$, $b^2 = 20$ হলে $a^2 = 45$

∴ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$ **Ans.**

Ex-10 একটি উপবৃত্ত A(−3, −5) বিন্দু দিয়ে যায়, এর একটি উপকেন্দ্র (−1, −4) ও অনুরূপ নিকাক্ষের সমীকরণ x−2 = 0, উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol[n]: উৎকেন্দ্রিকতা $e = \left|\frac{AS}{AN}\right| = \left|\frac{\sqrt{(-1+3)^2+(-4+5)^2}}{\frac{-3-2}{\sqrt{1^2+0^2}}}\right|$



$= \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ধরি, উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু P(x, y)

সংজ্ঞামতে, SP = e PM

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+4)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x-2}{1}$

$\therefore 4x^2 + 5y^2 + 14x + 40y + 81 = 0$ **Ans.**

For practice:

01. উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় ধরে (2, 2) ও (3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $3x^2+5y^2=32$

02. একটি উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষ যথাক্রমে x ও y অক্ষের সমান্তরাল। এর কেন্দ্র (1, 2) বিন্দুতে, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং তা (2, 1) বিন্দু দিয়ে যায়। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 9 = 0$

03. যে উপবৃত্তের ফোকাসের স্থানাংক (1, −1), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং নিকাক্ষের সমীকরণ x−y−2 = 0; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $3x^2+3y^2+2xy-12x+12y+4=0$

04. মূল বিন্দুতে উপকেন্দ্র, $e = \frac{4}{5}$ এবং x = 2 নিয়ামক বিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $9x^2+25y^2+64x=64$

05. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুটির স্থানাঙ্ক (3, −1) (1, −1) এবং বৃহৎ অক্ষ $2\sqrt{5}$। **Ans.** $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$

06. উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় (±2, 0) এবং বৃহৎ অক্ষ 8 একক। **Ans.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

07. উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (0, ±1) এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য একের সমান। **Ans.** $4x^2 + \frac{4y^2}{5} = 1$

08. মূল অক্ষদ্বয়কে স্থানাংকের অক্ষদ্বয় ধরে, $\frac{1}{3}$ উৎকেন্দ্রিকতা বিশিষ্ট যে উপবৃত্তটির একটি উপকেন্দ্র ও এর অনুরূপ নিয়ামকের দূরত্ব 16 একক তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$

09. একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুটি স্থানাংকের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ রেখাকে y অক্ষের উপর ছেদ করে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

10. উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় S′(−1, 0) ও S(1, 0) এবং $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দু ... যায়। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $3x^2$ ...

11. উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(\sqrt{15}, -1)$ বিন্দুগামী এবং ... মধ্যবর্তী দূরত্ব 8। **Ans.** $\frac{x^2}{20}$ ...

12. উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার বাম দিকের উপকেন্দ্র হতে ... একটি বিন্দু (8, 12) এর দূরত্ব 20। **Ans.** $\frac{x^2}{256}$ ...

13. এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্র (−1, −1), ... এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$। **Ans.** $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+ ...}{20}$ ...

14. কোন উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র S(1, 0) ও অনুরূপ নিকাক্ষের ... 2x − y − 10 = 0 এবং তা (2, −1) বিন্দু দিয়ে যায়। উপবৃত্তটির ... নির্ণয় কর। **Ans.** $17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y$ ...

15. উপবৃত্তের প্রধান অক্ষদ্বয়কে x ও y অক্ষরেখা হিসাবে বিবেচনা করে ... সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় (±2, 0) এবং বৃহৎ অক্ষ = 8 ... **Ans.** $\frac{x^2}{16}$ ...

16. দেখাও যে, কোন উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে, উপবৃত্তটি বৃত্তে পরিণত ...

17. একটি উপবৃত্তের নিকাক্ষকে y অক্ষরেখা ধরে উপবৃত্তটি নির্ণয় ... উৎকেন্দ্রিকতা e এবং ফোকাস (c, 0) বিন্দুতে অবস্থিত। **Ans.** $(x-c)^2 + y^2$ ...

18. কোন উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের একটি প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, −1), এবং ... y + 6 = 0 রেখার উপর অবস্থিত এবং এর উৎকেন্দ্রিকতা, e = ... উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $x^2 + 2y^2 - 6x - 124y$ ...

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

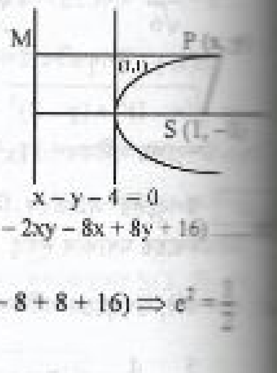
BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (1, −1), অনুরূপ নিকাক্ষ x − y − 4 = 0 এবং যা (1,1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে ...

Sol[n] ধরি, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা = e

∴ উপবৃত্তের সমীকরণ, $SP^2 = e^2 PM^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = e^2\left(\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}\right)^2$



$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2) = e^2(x^2 + y^2 - 2xy - 8x + 8y + 16)$ (i)

নং উপবৃত্তটি (1,1) বিন্দুগামী।

$\therefore 2(1 + 1 - 2 + 2 + 2) = e^2(1 + 1 - 2 - 8 + 8 + 16) \Rightarrow e^2 = \frac{1}{2}$

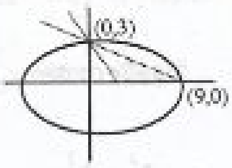
(i) নং এ $e^2 = \frac{1}{2}$ বসালে

$2(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy - 8x + 8y + 16)$ ...

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$ ...

...টি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখাকে x অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাকে y- অক্ষের উপর ছেদ করে। উপবৃত্তটির সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [11-12]

Solve $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখা x-অক্ষকে (9, 0) বিন্দুতে ছেদ করে ও $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখা y অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে।



উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

উৎকেন্দ্রিকতাঃ $e=\sqrt{1-\frac{3^2}{9^2}}=\frac{\sqrt{72}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)=(\pm 9\times\frac{\sqrt{72}}{9}, 0)=(\pm\sqrt{72}, 0)$ **Ans.**

...কোন উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্র দু'টির মধ্যকার দূরত্বের সমান এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব 10। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [09-10]

Solve ধরি সমীকরণটি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ a>b$

$2b=2ae\ \therefore b^2=a^2e^2 \Rightarrow e^2=\frac{b^2}{a^2}$

$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-e^2 \Rightarrow 2e^2=1\ \therefore e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2b^2=a^2$

আবার উপকেন্দ্রিক লম্ব $\frac{2b^2}{a}=10$

$\Rightarrow \frac{a^2}{a}=10 \Rightarrow a=10 \Rightarrow a^2=100\ \therefore b^2=50$

উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1$ ও উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **Ans.**

...কোন উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় বরাবর আছে এবং তা 5x + 9y = 45 রেখাকে x- অক্ষের উপর এবং 7x + 5y = 35 রেখাকে y- অক্ষের উপর ছেদ করে। তার উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক নির্ণয় কর। [07-08]

Solve দেওয়া আছে, রেখাদ্বয় $\frac{x}{9}+\frac{y}{5}=1$ এবং $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$।

ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

প্রশ্নমতে, উপবৃত্তটি x অক্ষকে (9, 0) এবং y অক্ষকে (0, 7) বিন্দুতে ছেদ করে। ∴ a = 9 ও b = 7

উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{7^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$

$e=\sqrt{1-\frac{49}{81}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$ হল উৎকেন্দ্রিকতা

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae, 0)=(\pm 9\times\frac{4\sqrt{2}}{9}, 0)$

$=(\pm 4\sqrt{2}, 0)$ **Ans.**

05. $5x^2+4y^2=1$ উপবৃত্তের নিয়ামকগুলোর সমীকরণ ও ফোকাসদ্বয় কি কি? [04-05]

Solve $\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{1}{2}}\right)^2=1$

$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{5}},\ b=\frac{1}{2}$ এখানে b > a

$\therefore e=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

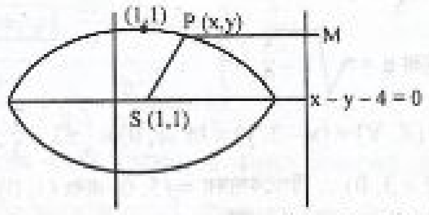
∴ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক = (0, ± be)

$=\left(0, \pm\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$

এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $y=\pm\frac{b}{e}=\pm\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ **Ans.**

06. (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্র (1, –1) এবং অনুরূপ নিয়ামকের সমীকরণ x – y – 4 = 0. [03-04]

Solve



উপবৃত্তের সমীকরণ, SP = e PM ⇒ $SP^2=e^2 PM^2$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=e^2\left(\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}\right)^2$ .... (i)

∵ (i) নং উপবৃত্তটি (1, 1) বিন্দুগামী,

$\therefore (1-1)^2+(1+1)^2=e^2\left(\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}\right)^2=8e^2$

$\Rightarrow e^2=\frac{1}{2}\ \therefore e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{2}\frac{(x-y-4)^2}{2}$

$\Rightarrow 4x^2+4y^2-8x+8y+8$
$=x^2+y^2-2xy+16-8x+8y$
$\therefore 3x^2+3y^2+2xy-8=0$ **Ans.**

07. $5x^2+9y^2-20=25$ উপবৃত্তের কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [02-03]

Solve $5x^2-20x+9y^2=25$

$\Rightarrow 5(x^2-4x+4)+9y^2=45$

$\Rightarrow 5(x-2)^2+9y^2=45$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-0)^2}{(\sqrt{5})^2}=1$

∴ কেন্দ্র, (2, 0)

এখন, $3>\sqrt{5}$ বলে $e^2=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow e=\frac{2}{3}$

∴ উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক, (± ae, 0) = (± 2, 0) **Ans.**

08. যে উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় (–1, –1), (1, 1) এবং বৃহৎ অক্ষের পরিমাণ $2\sqrt{3}$, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [00-01]

Solve এখানে, $2a = 2\sqrt{3}$

$SP = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ or $S'P = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

আমরা জানি, $SP + S'P = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 = (x-1)^2+(y-1)^2 + 12 - 4\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow 4x + 4y = 12 - 4\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow x + y = 3 - \sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y = 3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 6$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 3 = 0$ **Ans.**

09. $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও ফোকাসগুলি নির্ণয় কর। [98-99]

Solve $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$

$\Rightarrow 5(x-3)^2 + 9y^2 = 45$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ফোকাসদ্বয় $(X, Y) = (x-3, y) = (\pm ae, 0) = \left(\pm 3 \times \frac{2}{3}, 0\right) = (\pm 2, 0)$

$(x, y) = (\pm 2 + 3, 0)$ $\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $= (5, 0)$ এবং $(1, 0)$ **Ans.**

10. উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ দু'টিকে যথাক্রমে x ও y অক্ষরেখা ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যার ফোকাসদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 8 একক এবং নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 18 একক। [97-98; KUET : 10-11,12-13]

Solve $2ae = 8 \Rightarrow ae = 4$ .... (i) এবং

$2 \times \frac{a}{e} = 18 \Rightarrow \frac{a}{e} = 9$ ——— (ii)

$(i) \times (ii) \Rightarrow a^2 = 36$

$\Rightarrow a = 6 \therefore e = \frac{4}{6} \therefore e^2 = \frac{16}{36}$

$\therefore 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{36} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{36} = \frac{16}{36}$

$\Rightarrow \frac{36 - b^2}{36} = \frac{16}{36} \Rightarrow b^2 = 20$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ **Ans**

11. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও মূল বিন্দু, সেই ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [96-97; KUET : 04-05,16-17]

Solve $9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

$\therefore a > b \quad \therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

উপকেন্দ্রের জন্য $(X, Y) = (\pm ae, 0)$

$\Rightarrow (x-2, y-3) = (\pm 5 \times \frac{4}{5}, 0)$

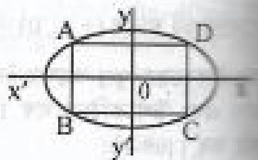
$\Rightarrow (x-2, y-3) = (\pm 4, 0)$

$\Rightarrow (x, y) = (\pm 4 + 2, 3) = (6, 3), (-2, 3)$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(18+6) = 12$ বর্গ একক

12. যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গের বাহুগুলি অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ বর্গের ক্ষেত্রফল $\frac{4ab^2}{\sqrt{a^2e^4 + 4b^2}}$ যেখানে e উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা। [95-96]

Solve AD = CD



$\therefore$ D বিন্দুর ভুজ ও কোটি একই।

$\therefore D = (x, x)$

$\therefore$ উপবৃত্তটি D বিন্দুগামী

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \therefore 2x = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

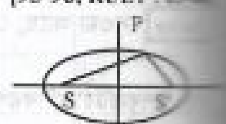
$\therefore$ বর্গের ক্ষেত্রফল $= 2x \times 2x = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

$= \frac{4b^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{4b^2}{1 + 1 - e^2} = \frac{4b^2}{\sqrt{4 - 4e^2 + e^4}}$

$= \frac{4b^2}{\sqrt{e^4 + 4\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{4ab^2}{\sqrt{a^2e^4 + 4b^2}}$

13. এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার ফোকাসদ্বয় অবস্থিত S(2, 0) এবং S(–2, 0) এবং যা $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়। [95-96; RUET : 05-06]

Solve উপবৃত্তের কেন্দ্র = (0 ,0)



$PS = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2} - 0\right)^2} = 2$

PS' = 4

PS+PS' = 2a

$\Rightarrow 2a = 2 + 4 = 6 \Rightarrow a = 3$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যা $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দুগামী

$\Rightarrow \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 5 \quad \therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Ans.**

ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

…টি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্ব 5 এবং …কেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$ । [05-06]

Solve ধরি, নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

…শর্তমতে, $\frac{2b^2}{a}=5$

…$a=\frac{2b^2}{5}$ …. (i)

…$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{\left\{\frac{2b^2}{5}\right\}^2}=1-\frac{25}{4b^2}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{25}{4b^2}\Rightarrow b^2=\frac{45}{4}\quad\therefore a^2=\frac{81}{4}$

…নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1$ **Ans.**

…$16x^2+9y^2-32x-128=0$ উপবৃত্তটির দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় … [13-14]

Solve $16x^2+9y^2-32x-128=0$

$\Rightarrow 16(x-1)^2+9y^2=144\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

…বৃহৎ অক্ষ, $2b=8$

…ক্ষুদ্র অক্ষ, $2a=6$

…ক্ষেত্রফল $=\pi ab=\pi\times3\times4=12\pi$ বর্গ একক । **Ans.**

ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

…টি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুটি (0, 4) ও (0,–4) …এবং (3,0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে । [03-04]

Solve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

…$SP+S'P=2b\Rightarrow\sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{3^2+4^2}=2b\quad\therefore b=5$

…আবার, (3, 0) বিন্দুগামী $\therefore a^2=9$

…নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরন $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ **Ans.**

…এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{5^2}=1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম …করে? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর । [04-05,08-09]

Solve $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{5^2}=1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দুগামী

$\frac{36}{p}+\frac{16}{25}=1\quad\therefore p=100$

…এখানে, $a=10,\ b=5$

…উৎকেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{100-25}{100}}\Rightarrow\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

…উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae,0)=(\pm5\sqrt{3},0)$ **Ans.**

03. ফোকাসদ্বয়ের স্থানাংক উল্লেখপূর্বক খালি হাতে $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তটি অংকন কর । [06-07]

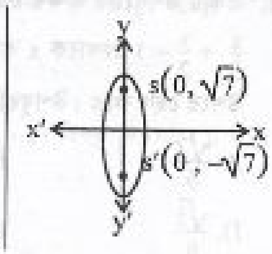
Solve $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

$\therefore a=3$, এবং $b=4$

$\therefore e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ ফোকাসদ্বয় $=(0,\pm be)=(0,\pm\sqrt{7})$

Ans.



MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. কোন উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক । তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর । [08-09; 11-12]

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ans D Solve $\frac{2b^2}{a}=a\Rightarrow b^2=\frac{a^2}{2}$

$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{2b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

02. কোন উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 ইঞ্চি এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$ । উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর । [09-10]

A. 12.5 B. 15.3 C. 19.2 D. 18

Ans C Solve $\frac{a}{e}-ae=16\Rightarrow a\left(\frac{1}{e}-e\right)=16$

$\Rightarrow a\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{5}\right)=16\Rightarrow a.\frac{16}{15}=16\Rightarrow a=15$

$\therefore\ b^2=a^2(1-e^2)=15^2\left(1-\frac{3^2}{5^2}\right)=15^2.\frac{4^2}{5^2}=12^2=144$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=2.\frac{144}{15}=19.2$

03. $y=2x+c$ রেখাটি $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হলে, c এর মান নির্ণয় কর । [09-10]

A. 19 B. 25 C. 7 D. None

Ans D Solve উপবৃত্তের স্পর্শকের শর্ত: $c^2=a^2m^2+b^2$

$\therefore c^2=4.2^2+3\ \therefore c=\pm\sqrt{19}$

04. কোন উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান হলে, তার উৎকেন্দ্রতা হবে– [10-11]

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Ans A Solve $b=ae\Rightarrow b^2=a^2e^2\Rightarrow e^2=\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-e^2\ \therefore e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

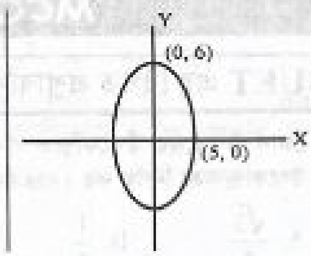
KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত উপবৃত্তটি $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$ রেখাকে x অক্ষের উপরে এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$ রেখাকে y অক্ষের উপরে ছেদ করে। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা কোনটি? [17-18, 08-09]

A. $\frac{\sqrt{7}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{6}$
D. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ E. $\frac{\sqrt{17}}{6}$

Ans B Solve উপবৃত্তের বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক, b = 6
এবং ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক, a = 5

$\therefore e=\sqrt{\frac{6^2-5^2}{6^2}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$



02. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও $2x^2+2y^2+12x-16y-13=0$ বৃত্তের কেন্দ্র দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত? [15-16]

A. 6 sq units B. 9 sq units C. 12 sq units
D. 18 sq units E. 24 sq units

Ans B Solve $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

$e=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

ফোকাসদ্বয় (0, –3), (0, 3);

বৃত্ত $x^2+y^2+6x-8y+\frac{13}{2}=0$-এর কেন্দ্র (–3, 4)

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & -3 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ -3 & 4 & 1\end{vmatrix}$

$=\frac{-3}{2}(-3\ \ -3)$

$=\frac{-3\times-6}{2}=9$ বর্গ একক

03. একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উহার ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেকের সমান। উপবৃত্তটি (0, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [14-15]

A. $3x^2+y^2=16$ B. $3x^2+y^2=11$ C. $x^2+y^2=9$
D. $x^2+9y^2=25$ E. $x^2+4y^2=4$

Ans E Solve $\frac{2b^2}{a}=\frac{2b}{2}\Rightarrow b=\frac{a}{2}$

$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ যা (0, 1) বিন্দুগামী

$\therefore 0+\frac{1}{b^2}=1\Rightarrow b^2=1$

$\therefore \frac{x^2}{4}+y^2=1$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ $x^2+4y^2=4$

04. $16x^2+25y^2=400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত? [06-07]

A. 0.6 B. 0.4 C. 0.8
D. 0.5 E. 0.75

Ans A Solve $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$

$\therefore e=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\frac{3}{5}=0.6$

05. $8x^2+9y^2=162$ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা হলো: [09-10]

A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{8}{9}$
D. $3\sqrt{2}$ E. $\frac{2}{9}$

Ans B Solve $8x^2+9y^2=162$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{162}{8}}+\frac{y^2}{\frac{162}{9}}=1$

$\therefore e=\sqrt{\frac{\frac{162}{8}-\frac{162}{9}}{\frac{162}{8}}}=\frac{1}{3}$

06. একটি উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয় (0, ± 5) ও দিকাক্ষদ্বয় $y=\pm\frac{25}{3}$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ হলো– [13-14]

A. $16x^2+25y^2=400$ B. $9x^2+25y^2=225$ C. $25x^2+9y^2=225$
D. $25x^2+16y^2=400$ E. $9x^2+16y^2=144$

Ans Blank Solve শীর্ষবিন্দু $\pm be=\pm5\therefore e=\frac{5}{b}$

আবার দিকাক্ষ $\pm\frac{b}{e}=\pm\frac{25}{3}\Rightarrow\frac{b}{\frac{5}{b}}=\frac{25}{3}\therefore b^2=\frac{125}{3}$

এখন, $e^2=\frac{5^2}{b^2}=\frac{25}{\frac{125}{3}}=\frac{75}{125}\therefore a^2=b^2(1-e^2)\therefore a^2=\frac{50}{3}$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{50}{3}}+\frac{y^2}{\frac{125}{3}}=1$

$\therefore 15x^2+6y^2=250$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $9x^2+25y^2=225$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্র হবে– [09-10]

A. (± 4 / 5, 0) B. (0, ± 4)
C. (± 4, 0) D. None of them

Ans C Solve $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

$\therefore e=\frac{\sqrt{25-9}}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore$ উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0)=(\pm5\times\frac{4}{5}, 0)=(\pm4, 0)$

...$-5y^2=1$ উপবৃত্তের একটি ফোকাস এবং ইহার অনুরূপ দিকাক্ষের ... দূরত্ব নির্ণয় কর। [11-12]

... B. 4 C. $4\sqrt{5}$ D. None of these

... Solve $4x^2+5y^2=1$

$\frac{y^2}{\frac{1}{5}}=1 \therefore e=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

...টির একটি ফোকাস এবং অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব = $(\frac{a}{e}-ae)$

$=\frac{1}{\sqrt{4}}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

...$-4y^2=1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ কি? [13-14]

... $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{4}$

... $=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. None

... A Solve $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$

...কেন্দ্রিকতা $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

...ক্ষের সমীকরণ $y=\pm\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

...$\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [14-15]

...^{2} B. πab C. $\frac{\pi}{4}$abs

E. None

... B Solve উপবৃত্ত ক্ষেত্রফল = πab

SELF TEST [Written]

...$=2\cos\theta+1$, $y=\sin\theta+2$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে। ...সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা, দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x-1=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

...কে উপকেন্দ্রে রেখে পৃথিবী সূর্যকে উপবৃত্তাকারে প্রদক্ষিণ করে। এ... উপবৃত্তের অর্ধবৃহৎ অক্ষ 15×10^7 km। $e=\frac{1}{62}$ হলে পৃথিবীর বৃহত্তম ও ...তম দূরত্ব নির্ণয় কর। Hinst: a + ae, a − ae

Ans: 15.2419×10^7 km; 14.75×10^7 km

...$+\frac{y^2}{25}=1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় এবং ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্তবিন্দুদ্বয় দ্বারা ...ঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

...: রম্বসের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × কর্ণদ্বয়ের গুণফল Ans: 24

SELF TEST [MCQ]

01. উপবৃত্তের সমীকরন নিচের কোনটি যার শীর্ষবিন্দুদ্বয় (0, ±5) এবং উপকেন্দ্রদ্বয় (0, ±3)-
A. $25x^2+16y^2=400$ B. $16x^2+25y^2=400$
C. $25x^2+16x^2=400$ D. None

02. $px^2+qy^2=32$ উপবৃত্তটি (3, 1) ও (−2, −2) বিন্দুগামী হলে p ও q এর মান কত?
A. 3, 5 B. 4, 5
C. 5, 2 D. 3, 4

03. $20x^2+36y^2+40x-108y-79=0$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\sqrt{\frac{2}{3}}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

04. উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{4}$ এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক (0, ±3) হলে নিয়ামকের সমীকরণ-
A. 3y = 16 B. 3y = ±16
C. 4y = 15 D. 4y = ±15

05. কোন উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 সে.মি. এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$ হলে, প্রধান অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য কত?
A. 30 ও 24 cm B. 24 ও 25 cm
C. 26 ও 30 cm D. 15 ও 12 cm

06. উপকেন্দ্র (1, 0) বিন্দুতে অবস্থিত ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য 2 একক হলে উপবৃত্তের সমীকরণ-
A. $x^2+2y^2=1$ B. $x^2+y^2=2$
C. $x^2+2y^2=2$ D. $2x^2+y^2=1$

07. কোন উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষের অনুপাত 3 : 2 হলে উৎকেন্দ্রিকতা কত?
A. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ B. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\sqrt{\frac{5}{3}}$

08. c এর মান কত হলে $y=-x+c$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হবে?
A. ± 6 B. 5
C. ± 5 D. ± 4

09. $y=4x+c$ সরলরেখা, $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করলে c=?
A. 0 B. 1 C. 2 D. $\sqrt{65}$

10. $\frac{(x+y-2)^2}{9}+\frac{(x-y)^2}{16}=1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র-
A. (1, 2) B. (2, 2)
C. (0, 1) D. (1, 1)

11. উপবৃত্তের শীর্ষ (2, −2) ও (2, 4) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ হলে এর সমীকরণ হল–
A. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$ B. $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$
C. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{8}=1$ D. None

12. $9x^2 + 16y^2 = 144$ উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু হতে নাভিদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি হবে–

A. 80 B. 12
C. 8 D. 36

13. $y = x + 5$ সরলরেখা কোন সমীকরণকে কখনো স্পর্শ করবে না–

A. $y^2 = 20x$ B. $9x^2 + 10y^2 = 144$
C. $x^2 + y^2 = 25$ D. $\frac{x^2}{29} - \frac{y^2}{4} = 1$

14. সাধারণ আদর্শ উপবৃত্ত কার সাপেক্ষে প্রতিসম?

A. x = 0, y = 0 B. x = 1
C. y = 2 D. B ও C

15. $4x^2 + 9y^2 = 36$ উপবৃত্তকে $2x + y - 10 = 0$ রেখাটি–

A. ছেদ করবে B. একেবারেই ছেদ করবে না
C. শুধু স্পর্শ করবে D. a ও b উভয়েই

16. $\frac{x^2}{10-a} + \frac{y^2}{4-a} = 1$ একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে যদি–

A. a < 4 B. a > 4
C. 4 < a < 10 D. a > 10

17. যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তকে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt{2}$ স্পর্শ করে তবে p এর উৎকেন্দ্রিক কোণ কত?

A. 0 B. 45°
C. 60° D. 90°

18. $5x^2+7y^2-140 = 0$, উপবৃত্তের সাপেক্ষে (–4, 3) বিন্দুর অবস্থান কোথায়?

A. বাহিরে B. ভিতরে
C. উপবৃত্তের উপরে D. কোনটিই নয়

19. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ উপবৃত্ত কোন রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম?

A. x = 2 B. y = 3
C. x = 0, y = 0 D. A ও B উভয়ই

20. একটি উপবৃত্ত দুটি পরস্পর লম্বরেখার মধ্যে গড়িয়ে গেলে এর কেন্দ্রের সঞ্চারপথ–

A. বৃত্ত B. পরাবৃত্ত
C. উপবৃত্ত D. None

21. $16x^2 + 25y^2 = 400$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ কত?

A. x = ± 4 B. x = ± 3
C. x = ± 5 D. x = ± 7

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Correct Answer

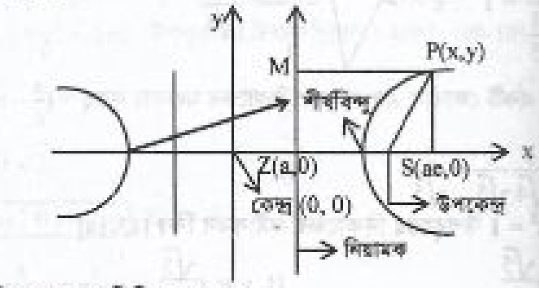
21.B	20.A	19.D	18.A	17.B	16.A	15.B
14.A	13.D	12.C	11.A	10.D	09.D	08.C
07.C	06.C	05.A	04.B	03.C	02.A	01.A

কনিক-C (অধিবৃত্ত)

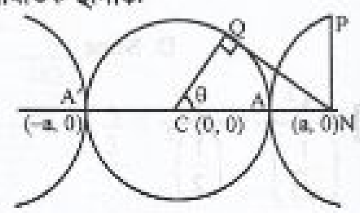
এক নজরে এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

□ অধিবৃত্তঃ কোন কণিকের ক্ষেত্রে উৎকেন্দ্রিকতা e > 1 হলে উহাকে [illegible] বা Hyperbola বলা হয়।

লেখচিত্রঃ



• অধিবৃত্তের পরামিতিক স্থানাঙ্কঃ



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, অধিবৃত্তের p(x, y) বিন্দু হতে আড় অক্ষের উপর [illegible] অঙ্কন করা হল। N হতে সহায়ক বৃত্তে NQ স্পর্শক অঙ্কন করা হল।
ধরি, ∠QCN = θ, এখানে C(0, 0) অধিবৃত্তের কেন্দ্র।

$\therefore x = CN = CQ\sec\theta = CA\sec\theta = a\sec\theta$

P(x, y) বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলে,

$\frac{a^2\sec^2\theta}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore y = b\tan\theta$

∴ পরামিতিক স্থানাঙ্ক ($x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$)

সূত্র ও সমীকরণসমূহঃ

আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ [illegible]
১। কেন্দ্র	(0, 0)	(0, [illegible]
২। শীর্ষবিন্দু	(± a, 0)	(0, ± [illegible]
৩। বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	[illegible]
৪। ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	[illegible]
৫। উপকেন্দ্র / ফোকাস	(± ae, 0)	(0, ± [illegible]
৬। বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	y = 0	x = [illegible]
৭। ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	x = 0	y = [illegible]
৮। নিকাক্ষ/নিয়ামকের সমীকরণ	x = ± a/e	y = ± [illegible]
৯। লম্বের দৈর্ঘ্য	$2b^2/a$	[illegible]
১০। লম্বের সমীকরণ	x = ± ae	y = ± [illegible]
১১। বিকেন্দ্রিকতা/উৎকেন্দ্রিকতা	$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$	e = [illegible]

➤ (h, k) কেন্দ্র বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}$ [illegible]

➤ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

➤ P(x, y) অধিবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু হলে এবং S ও S' [illegible] হয়, তবে |PS' – PS| = 2a

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণীভুক্ত করা যায়।

Type-01 : অধিবৃত্তের পরিচিতি

...র সমীকরণে x এবং y এই দুই চলকের মাত্রা দুই থাকে এবং এটি একটি ... সমীকরণ। উৎকেন্দ্রিকতা অবশ্যই 1 এর চেয়ে বেশী হবে, অর্থাৎ $e > 1$

... $16x^2 - 9y^2 = 144$ সমীকরণটি কি নির্দেশ করে?

...উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{4^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{5^2}{3^2}} = \frac{5}{3} > 1$

সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। **Ans.**

For practice:

... $x^2 - y^2 + 5x - y + 7 = 0$ কি নির্দেশ করে? **Ans.** অধিবৃত্ত।

Type-02: অধিবৃত্তের সমীকরণ হতে উপাদানসমূহ নির্ণয় সংক্রান্ত-

... $y^2 - 2x^2 = 2$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্রের স্থানাংক ও ...কের সমীকরণ নির্ণয় কর।

... $y^2 - 2x^2 = 2 \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{1} = 1$

...সমীকরণে, $b^2 = 2$
$a^2 = 1$

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক $= (0, \pm be) = \left(0, \pm\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = (0, \pm\sqrt{3})$

দিকাক্ষদ্বয়ের সমীকরণ : $y = \pm\frac{b}{e} \Rightarrow y = \pm\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}, (0, \pm\sqrt{3}); y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **Ans.**

... $9y^2 - 16x^2 - 54y - 64x - 127 = 0$, এর কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

...প্রদত্ত সমীকরণে, $9y^2 - 16x^2 - 54y - 64x - 127 = 0$

$\Rightarrow 9(y^2 - 6y) - 16(x^2 + 4x) = 127$

$\Rightarrow 9(y^2 - 6y + 9) - 16(x^2 + 4x + 4) = 127 + 81 - 64$

$\Rightarrow 9(y-3)^2 - 16(x+2)^2 = 144 \therefore \frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

...এখানে $a^2 = 9$ এবং $b^2 = 16$

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$

...সমীকরণে, $X = x + 2$ এবং $Y = y - 3$ ধরে

কেন্দ্র : $X = 0$, $x + 2 = 0$, $x = -2$ | $Y = 0$, $y - 3 = 0$, $\therefore y = 3$ $\therefore$ কেন্দ্র $(-2, 3)$

শীর্ষবিন্দু : $X = 0$, $x + 2 = 0$, $x = -2$ | $Y = \pm b$ $\Rightarrow y - 3 = \pm 4$ $\therefore y = 7$ বা -1 $\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(-2, 7), (-2, -1)$

...স্থানাঙ্ক : $X = 0$, $x + 2 = 0$, $\therefore x = -2$ | $Y = \pm be$ $\Rightarrow y - 3 = \pm\left(4.\frac{5}{4}\right)$ $\Rightarrow y - 3 = \pm 5$ $\therefore y = 8, -2$

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(-2, 8), (-2, -2)$

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2\times 9}{4} = \frac{9}{2}$

$\therefore$ দিকাক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, $Y = \pm\frac{b}{e} \Rightarrow y - 3 = \pm\left(4\times\frac{4}{5}\right)$

$\Rightarrow y - 3 = \pm\frac{16}{5} \Rightarrow y = \frac{31}{5}$ অথবা, $y = -\frac{1}{5}$

$\therefore$ দিকাক্ষদ্বয়ের সমীকরণ, $5y - 31 = 0$
এবং $5y + 1 = 0$ **Ans.**

For practice:

1. $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ এর কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং অক্ষ দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Ans. কেন্দ্র $(1, -2)$ শীর্ষ $(5, -2), (-3, -2)$; $e = \frac{5}{4}$; উপকেন্দ্র $(6, -2)$ $(-4, -2)$ অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 8 ও 6।

Type-03: প্রদত্ত উপাদান হতে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Ex-01 (4, 6) এবং (–1, –3) বিন্দুগামী অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড় অক্ষ y অক্ষ বরাবর এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত।

Sol^n: মনে করি, নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

যেহেতু অধিবৃত্তটি (4, 6) এবং (–1, –3) বিন্দুগামী,

$\therefore \frac{36}{b^2} - \frac{16}{a^2} = 1$ এবং $\frac{9}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 1$

সমাধান করে পাই, $a^2 = 4$ এবং $b^2 = \frac{36}{5}$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{5y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$

$\therefore 5y^2 - 9x^2 = 36$ **Ans.**

Ex-02 এমন অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (2, 0); উৎকেন্দ্রিকতা 2 এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x - y = 0$।

Sol^n: P(x, y) অধিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু, S(2, 0) উপকেন্দ্র এবং PM প্রদত্ত নিয়ামকের উপর লম্ব হলে; SP = e PM

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 4 = 0$ যা অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ। **Ans.**

Ex-03 একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক $(0, \pm 7)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{7}{6}$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: যেহেতু অধিবৃত্তটির আড় অক্ষ y অক্ষ বরাবর সেহেতু নির্ণেয় সমীকরণ হবে, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

প্রশ্নানুসারে $e = \frac{7}{6}$; $be = 7 \Rightarrow b\times\frac{7}{6} = 7 \therefore b = 6$

$\therefore a^2 = b^2(e^2 - 1) = 36\left(\frac{49}{36} - 1\right) = 49 - 36 = 13$

$\therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{13} = 1$ **Ans.**

Ex-04 অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে স্থানাংকের অক্ষদ্বয় ধরে এর সমীকরণ নির্ণয় কর যেখানে উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{2}$ এবং দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{8}{3}$ ।

Sol^n: প্রশ্নানুসারে, $e = \frac{3}{2}$ $\therefore \frac{2a}{e} = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{4e}{3}$

$\therefore a = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$ $\therefore a = 2$

$\therefore b^2 = a^2(e^2 - 1) = 4\left(\frac{9}{4} - 1\right) = 5$

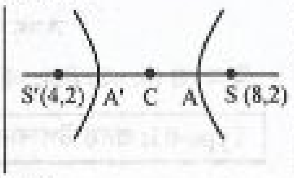
$\therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ **Ans.**

Ex-05 অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার ফোকাসদ্বয় (4, 2) ও (8, 2) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $2.CS = SS' = \sqrt{(8-4)^2 + (2-2)^2}$

$\Rightarrow 2.CS = 4 \quad \Rightarrow CS = 2$

$\Rightarrow CA = \frac{2}{e} = \frac{2}{2} = 1$



$\therefore \; a = 1 \quad \therefore b^2 = a^2(e^2 - 1) = 1(4-1) = 3$

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{8+4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (6,2)$

$\therefore$ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x-6)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ **Ans.**

Ex-06 দেখাও যে, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ এবং $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ .... (i)

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ .... (ii)

$(i) \times (ii) \Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, যা অধিবৃত্তের সমীকরণ প্রকাশ করে।

$\therefore$ ছেদবিন্দুটি উক্ত অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। **(Showed)**

For practice:

01. উপকেন্দ্রের স্থানাংক (2, 2), উৎকেন্দ্রিকতা 2, দিকাক্ষের সমীকরণ x+y = 9 হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $x^2 + y^2 + 4xy - 32x - 32y + 154 = 0$

02. অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে স্থানাংকের অক্ষ ধরে এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 একক এবং উপকেন্দ্রের স্থানাংক (0, ±13).
Ans. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$

03. স্থানাংকের অক্ষদ্বয়ের অধিবৃত্তের অক্ষ বিবেচনা করে শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব 2 একক এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $y^2 - x^2 = 1$

04. অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার ফোকাসদ্বয় (±4, 2) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2 (স্থানাংকের অক্ষদ্বয় অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয় বিবেচনা কর।)
Ans. $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

05. অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে x ও y অক্ষ ধরে উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{2}$ এবং ... মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** $5x^2$...

06. কোন অধিবৃত্তের আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 4 ও 6 একক ... সমীকরণ x+3 = 0 ও y−1 = 0 । অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $4x^2 - 9y^2 + 24x + 18y$ ...

07. অধিবৃত্তের ফোকাস (1, −1) এবং অনুরূপ দিকাক্ষের সমীকরণ 2x... অধিবৃত্তটি (0, 1) বিন্দুগামী হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
Ans. $16x^2+y^2+20xy+28x$...

08. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তটি $x - 3\sqrt{5}\,y = 0$ এবং $\sqrt{5}\,x - 2y$... ছেদবিন্দুগামী এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{4}{3}$ । অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র... নির্ণয় কর। **Ans.** (±2...

Type-04

Ex-01 $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ অধিবৃত্তের উপরস্থ $\left(-2, \frac{14}{3}\right)$ ... স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Sol^n: $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \quad \therefore 4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y - 36$...

ইহাকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$8x - 18y\frac{dy}{dx} - 24 + 36\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4(3-x)}{9(2-y)}$

$\left(-2, \frac{14}{3}\right)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = \frac{4(3+2)}{9(2-\frac{14}{3})} = \frac{-5}{6}$

$\therefore \left(-2, \frac{14}{3}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ- $\left(y - \frac{14}{3}\right) = -\frac{5}{6}$...

$\therefore 5x + 6y = 18$

Ex-02 $\left(\frac{y+4}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{5}\right)^2 = 1$ অধিবৃত্তের অসীমতটের সমীকরণ...

Sol^n: অসীমতটের সমীকরণ নির্ণয় করার জন্য

$\left(\frac{y+4}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{5}\right)^2 = 1$ সমীকরণে 1 এর পরিবর্তে 0 বসিয়ে...

$\left(\frac{y+4}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{5}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{y+4}{3} = \pm\frac{x-2}{5} \Rightarrow 5y + 2$...

$\therefore$ অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ, $3x - 5y - 26 = 0$ ও $3x + 5y + 14 = 0$

For practice:

01. 4y = 5x + 7 সরলরেখার সাথে সমান্তরাল এবং $4x^2 - 9y^2 = $... স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **Ans.** 4y = 5x...

02. মূলবিন্দুতে কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু (3, 0) এবং অসীমতটের ... $y = \frac{2}{3}x$ হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ কর। **Ans.** $\frac{x^2}{9}$...

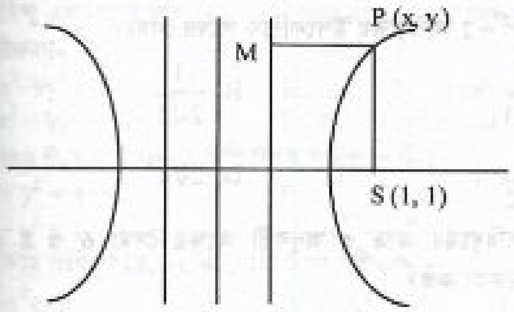
BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... কনিকের আড় অক্ষ $x - 2y + 1 = 0$ উপকেন্দ্র (1, 1) উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ এবং নিয়ামকের উপর একটি বিন্দু (2, –3) তার সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [14-15]

Solve



∴ আড় অক্ষ $x - 2y + 1 = 0$

∴ নিয়ামক হবে $2x + y + k = 0$

যা (2, –3) বিন্দুগামী $\therefore 4 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

∴ নিয়ামকের সমীকরণ, $2x + y - 1 = 0$ এখানে, $e = \sqrt{2}$

এখন অধিবৃত্তের সমীকরণের জন্য $PS = ePM$

$\Rightarrow PS^2 = e^2 PM^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\left(\frac{2x+y-1}{\sqrt{4+1}}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2\left(\frac{4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 4x - 2y}{5}\right)$

$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 5 + 5y - 10y + 5 = 8x^2 + 2y^2 + 2 + 8xy - 8x - 4y$

∴ $3x^2 - 3y^2 + 8xy + 2x + 6y - 8 = 0$

এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $2x + y + m = 0$ যা (1,1) বিন্দুগামী

∴ $m = -3$

∴ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $2x + y - 3 = 0$ **Ans.**

... $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$ বক্ররেখাটির প্রকৃতি, তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [10-11]

Solve $9x^2 - 16y^2 + 72x - 32y - 16 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 + 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 144$

$\Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

ইহা একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ, একে $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$

এর সাথে তুলনা করে পাই, কেন্দ্রঃ $(X, Y) = (0, 0)$

$\Rightarrow (x + 4, y + 1) = (0, 0)$

∴ $(x, y) = (-4, -1)$

$e = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \frac{5}{4}$;

উপকেন্দ্রঃ $(X, Y) = (\pm ae, 0) = (\pm 4 \times \frac{5}{4}, 0)$

$\Rightarrow (x + 4, y + 1) = (\pm 5, 0)$

∴ উপকেন্দ্রদ্বয় $= (x, y) = (1, -1); (-9, -1)$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ: $X = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\frac{5}{4}}$

$\Rightarrow x + 4 = \pm\frac{16}{5}$

∴ $x = \frac{-4}{5}$ এবং $x = \frac{36}{5}$

নাভিলম্বের এর দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = 4.5$ একক **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব 16, উপকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ এবং এর অক্ষ দুইটি স্থানাংকের অক্ষ বরাবর। অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [12-13]

Solve উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব, $2ae = 16$

$\Rightarrow 4a^2e^2 = 16^2$

$\Rightarrow a^2e^2 = 64$

∴ $a^2 = \frac{64}{e^2} = \frac{64}{(\sqrt{2})^2} = 32$

আবার, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1$

∴ $b^2 = a^2 = 32$

∴ নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$

∴ $x^2 - y^2 = 32$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি অধিবৃত্ত (6, 4) এবং (–3, 1) বিন্দুগামী। এর কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং x-অক্ষ বরাবর এর আড় অক্ষ অবস্থিত হলে, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য- [11-12]

A. $\frac{36}{\sqrt{5}}$ B. 8

C. 2 D. 4

Ans D Solve সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, যা (6, 4) এবং (–3, 1) বিন্দুগামী

∴ $\frac{6^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1$ এবং $\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1$

সমাধান করে পাই $b = 2$

∴ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $2b = 4$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ সমীকরণ সূচিত বক্ররেখাটি কি নির্দেশ করে? [10-11]

A. অধিবৃত্ত B. উপবৃত্ত
C. পরাবৃত্ত D. কোনটিই নয় **Ans.A**

02. $x^2 - y^2 = 18$ অধিবৃত্তের কোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? [11-12]

A. $12\sqrt{2}$ Unit B. 12 Unit
C. 3 Unit D. None of these

Ans B Solve $x^2 - y^2 = 18$ যা একটি আয়তাকার অধিবৃত্ত ।

$\therefore e = \sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 2ae = 2\sqrt{18} \times \sqrt{2} = 12$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর- [12-13]

A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ B. $\frac{13}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{3}{\sqrt{13}}$
D. $\pm\sqrt{13}$ E. $\pm\sqrt{3}$

Ans A Solve $a^2 = 1, b^2 = 2$

$\therefore e^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{1}{2}$

$\therefore e = \sqrt{\frac{3}{2}}$ সঠিক উত্তর নেই তবে মান কাছাকাছি আসে $\frac{\sqrt{13}}{3}$

SELF TEST [Written]

01. $x = 3\sec\theta, y = 2\tan\theta$ বিশিষ্ট কণিকের সমীকরণ নির্ণয় কর ।

Ans: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

02. e_1 ও e_2 যথাক্রমে একটি অধিবৃত্ত ও অনুবন্ধী অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$ ।

03. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{7} = 1$ অধিবৃত্তের যে ব্যাসটি এর $7x + y - 20 = 0$ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সেই ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর । **Ans.** $x + 3y = 0$

04. এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় বরাবর অবস্থিত এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8 ও উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ।

Ans. $4x^2 - 5y^2 = 100$

05. $3y^2 - x^2 = 9$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং অক্ষ দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।

Ans. কেন্দ্র (0, 0), শীর্ষ (±3, 0) ; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$,

উপকেন্দ্র $(\pm\sqrt{13}, 0)$; অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 6, 4 ।

SELF TEST (MCQ)

01. অধিবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় বিবেচনা করে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (0, 0), উপকেন্দ্র (10, 0) এবং অনুরূপ শীর্ষ (8, 0)

A. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ B. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{66} = 1$
C. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ D. None

02. আয়তাকার অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা কত?

A. 2 B. $\sqrt{3}$
C. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ D. $\sqrt{2}$

03. $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য–

A. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
C. $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ D. $2\sqrt{2}$

04. কোন অধিবৃত্তের আড় ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 6 ও 8 একক হলে উৎকেন্দ্রিকতা কত?

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{3}{5}$
C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

05. $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ–

A. $y = \pm\frac{\sqrt{13}}{9}$ B. $y = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$
C. $y = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$ D. $y = \pm\frac{\sqrt{13}}{4}$

06. আয়তাকার অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় (±8, 0) হলে এর সমীকরণ হবে-

A. $x^2-y^2 = 64$ B. $2x^2-2y^2=64$
C. $x^2-y^2 = 34$ D. $x^2-y^2 = 31$

07. $3x^2 - y^2 = 3$ অধিবৃত্তের (2, 3) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ-

A. $y=2x+1$ B. $y=x+2$
C. $y=2x+3$ D. $y=2x-1$

08. $16x^2 - 25y^2 = 400$ এর উপকেন্দ্রদ্বয়-

A. $\left(\pm\frac{\sqrt{41}}{5}, 0\right)$ B. $\left(\pm\frac{\sqrt{42}}{5}, 0\right)$
C. $\left(\pm\frac{\sqrt{21}}{5}, 0\right)$ D. None

09. $\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 7$ এবং $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = \frac{1}{7}$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুটি একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থান করলে ঐ অধিবৃত্তের সমীকরণ-

A. $16x^2 - 25y^2 = 400$ B. $25x^2 - 16y^2 = 400$
C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ D. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 400$

একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ এর উপকেন্দ্র। অধিবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে এর সমীকরণ-

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$ D. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{144}=1$

একটি অধিবৃত্তকে $2x-y-4=0$ সরলরেখা স্পর্শ করে। এর উপকেন্দ্র (3, 0) এবং (–3, 0) হলে এর সমীকরণ-

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ B. $4x^2-5y^2=20$

C. $5x^2-4y^2=20$ D. None

একটি বিন্দু এমনভাবে চলে (±5, 0) বিন্দুদ্বয় হতে এর দূরত্বের অন্তর 6। এর সমীকরণ-

A. $16x^2-9y^2=144$ B. $16x^2-9y^2=169$

C. $16x^2-9y^2=124$ D. $9x^2-16y^2=144$

$x=3\tan\theta$, $y=2\sec\theta$, অধিবৃত্তের সমীকরণ কী?

A. $x^2+y^2+4=0$ B. $x^2-y^2+4=0$

C. $x^2-y^2=1$ D. $9y^2-4x^2=36$

আয়তাকার অধিবৃত্ত (2, 3) বিন্দুগামী হলে সমীকরণ–

A. $x^2-y^2=5$ B. $y^2-x^2=5$

C. $y^2-x^2=1$ D. $x^2-y^2=1$

$y=x$ সরলরেখার সমান্তরাল, $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ–

A. $x+y+1=0$ B. $x-y-2=0$

C. $x+y-1=0$ D. $x-y-1=0$

$\frac{\sqrt{1999}}{3}(x^2-y^2)=1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা–

A. $\sqrt{2}$ B. 2

C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

$x^2+\lambda y^2=20$ একটি আয়তাকার অধিবৃত্ত নির্দেশ করবে যদি $\lambda=$?

A. 5 B. 4

C. –5 D. None

$xy=c^2$ এর উৎকেন্দ্রিকতা কত?

A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ অধিবৃত্তের আড় অক্ষ–

A. 6 B. 3

C. $\sqrt{3}$ D. 8

$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{49}=1$ অধিবৃত্তের স্পর্শক যদি হয় $y=mx+6$, তবে $m=$?

A. $\sqrt{\frac{17}{20}}$ B. $\sqrt{\frac{20}{17}}$

C. $\sqrt{\frac{3}{20}}$ D. $\sqrt{\frac{20}{3}}$

21. $\frac{x^2}{12-\lambda}+\frac{y^2}{8-\lambda}=1$ সমীকরণটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করবে যদি–

A. $\lambda<8$ B. $\lambda>8$

C. $8<\lambda<12$ D. $\lambda<12$

22. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=\frac{1}{25}$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র একই; b^2 এর মান কত?

A. 3 B. 16

C. 9 D. 12

23. $16x^2-25y^2-96x+100y-356=0$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক যদি অক্ষের সাথে $\frac{\pi}{4}$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে স্পর্শকের সমীকরণ হবে–

A. $y=x+2$ B. $y=x+4$

C. $x=y+3$ D. $x+y+2=0$

24. $5x^2-9y^2=45$ অধিবৃত্তের স্পর্শক $y=x+2$ হলে স্পর্শবিন্দু কত?

A. $\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$ B. $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{9}{2},-\frac{5}{2}\right)$ D. None

25. কোন শর্তের জন্য $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করবে?

A. $a^2\cos^2\alpha-b^2\sin\alpha=p^2$ B. $a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha=p$

C. $a^2\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha=p^2$ D. $a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha=p$

26. নিচের কোনটি দুই দিকে অসীমে বিস্তৃত হয়?

A. বৃত্ত B. পরাবৃত্ত

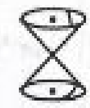
C. উপবৃত্ত D. অধিবৃত্ত

27. যদি e (λ) কোন আয়তকার অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হয়, তবে e(1) – e(6) এর মান কত?

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

28. নিচের কোনটি অধিবৃত্ত?

i.  ii.  iii.  iv. 

A. iv B. ii

C. i, ii D. None

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ	22. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ	23. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	17. ⒶⒷⒸⒹ	24. ⒶⒷⒸⒹ
04. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	18. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷⒸⒹ
05. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	19. ⒶⒷⒸⒹ	26. ⒶⒷⒸⒹ
06. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	20. ⒶⒷⒸⒹ	27. ⒶⒷⒸⒹ
07. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	21. ⒶⒷⒸⒹ	28. ⒶⒷⒸⒹ

Correct Answer

28.A	27.A	26.D	25.A	24.C	23.A	22.B	21.C	20.A	19.D
18.A	17.C	16.A	15.D	14.B	13.D	12.A	11.B	10.A	09.A
08.A	07.D	06.B	05.C	04.A	03.B	02.D	01.C		

৭ম অধ্যায়	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ (Inverse Trigonometric Functions & Trigonometric Equations)
দ্বিতীয় পত্র	

[১ম অংশ]

বৃত্তীয় ফাংশন

বৃত্তীয় ফাংশনঃ যখন ত্রিকোণমিতিক কোণ θ কে রেডিয়ানে পরিমাপ করা হয় তখন sinθ, cosθ এবং এগুলোর উপর নির্ভরশীল cosecθ, secθ, tanθ, cotθ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোকে বৃত্তীয় ফাংশন বলা হয়।

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

সাধারণ আলোচনা : $\sin\theta = x$ সমীকরণটি দ্বারা আমরা বুঝি θ এমন একটি কোণ যার সাইন অনুপাত x এর সমান। এ কথাটিকে $\theta = \sin^{-1}x$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, সুতরাং $\sin^{-1}x$ প্রতীকটি এমন একটি কোণ নির্দেশ করে যার সাইন এর মান x। সুতরাং $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ সমীকরণদ্বয় অভিন্ন। কিন্তু মনে রাখতে হবে $\sin^{-1}x$ একটি কোণ কিন্তু sinθ দুটি বাহুর অনুপাত বিধায় একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা। $\sin^{-1}x$ প্রতীকটিকে সাধারণত 'sine inverse x' বলা হয়। একে কোনো কোনো সময় 'arc sine' ও বলে। $\sin^{-1}x$ এর ন্যায় $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ এবং $\text{cosec}^{-1}x$ আছে। বিপরীত ফাংশনের ডোমেনও রেঞ্জ।

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ

	ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ	মুখ্য মানের ব্যবধি
1.	$\sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (যেখানে $y = \sin^{-1}x$)
2.	$\cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$0 \le y \le \pi$ (যেখানে $y = \cos^{-1}x$)
3.	$\tan^{-1}x$	R	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (যেখানে $y = \tan^{-1}x$)
4.	$\cot^{-1}x$	R	$(0, \pi)$	$0 < y < \pi$ (যেখানে $y = \cot^{-1}x$)
5.	$\sec^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$0 \le y \le \pi$ (যেখানে $y = \sec^{-1}, y \ne \frac{\pi}{2}$)
6.	$\text{cosec}^{-1}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (যেখানে $y = \text{cosec}^{-1}x, y \ne 0$)

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য ও সূত্রাবলী

- $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, যখন $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
- $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$, যখন $0 \le \theta \le \pi$
- $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$, যখন $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
- $\cot^{-1}(\cot\theta) = \theta$, যখন $0 < \theta < \pi$
- $\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\theta) = \theta$ যখন $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \theta \ne 0$
- $\sec^{-1}(\sec\theta) = \theta$ যখন $0 < \theta < \pi, \theta \ne \frac{\pi}{2}$
- $\sin(\sin^{-1}x) = x$ যখন $-1 \le x \le 1$
- $\cos(\cos^{-1}x) = x$ যখন $-1 \le x \le 1$
- $\tan(\tan^{-1}x) = x$ যখন $x \in R$
- $\cot(\cot^{-1}x) = x$ যখন $x \in R$
- $\sec(\sec^{-1}x) = x$ যখন $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
- $\text{cosec}(\text{cosec}^{-1}x) = x$ যখন $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
- $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$
- $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $xy < 1$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $x > 0, y > 0$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = -\pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ যখন $x < 0, y < 0$
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$ যখন xy
- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$
- $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$
- $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$
- $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$
- $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}x$
- $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
- $\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
- $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ যখন
- $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ যখন $|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$ যখন $0 \le x \le 1$
- $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$ যখন $|x| \le \frac{1}{2}$
- $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$ যখন $\frac{1}{2} \le x \le 1$
- $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ যখন $|x| \le \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\frac{1}{2}\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\frac{1}{2}\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
- $\frac{1}{2}\cos^{-1}x = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$
- $\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}x$
- $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x$
- $\tan^{-1}\frac{a+x}{a-x} = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}\frac{x}{a}$
- $\tan^{-1}\frac{a-x}{a+x} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{x}{a}$

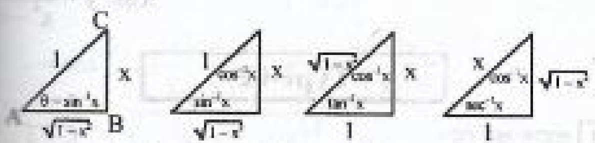
$\tan^{-1}\dfrac{ay+bx}{by-ax} = \tan^{-1}\dfrac{a}{b} + \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$

$\tan^{-1}\dfrac{ay-bx}{by+ax} = \tan^{-1}\dfrac{a}{b} - \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে যে কোনো বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন অপর যে কোনো বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনে রূপান্তর করা যায়।

মনে করি, $\sin^{-1}x = \theta$

একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করি, যার $\angle BAC = \theta$, BC (লম্ব) $= x$, AC(অতিভুজ) $= 1$



$\therefore AB$ (ভূমি) $= \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{1-x^2}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}\right)$

$= \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

অনুরূপভাবে,

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}\right)$

$= \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\therefore \sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{x}$

$= \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: $\tan^{-1}$ এ রূপান্তর করে মান নির্ণয়/প্রমাণ

Ex-01 প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{5}{13} - \cot^{-1}2 = \tan^{-1}\dfrac{28}{29}$

Sol^n: L.S $= \sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{5}{13} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\dfrac{3}{4} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

| ধরি, $\dfrac{5}{13} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ $\Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{9}$ $\therefore x = \dfrac{2}{3}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\times 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2}{11} + \tan^{-1}\dfrac{2}{3}$

$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{2}{11}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{11}\times\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\dfrac{28}{29} = $ R.S **(Proved)**

Ex-02 প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

Sol^n: L.S $= \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$

$= \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\left[\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\left(1-\dfrac{3}{4}\right)}\right]$

$= \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\pi}{6} = $ R.S **(Proved)**

Ex-03 প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right) + \sin^{-1}\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Solve:

L.S $= \sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right) + \sin^{-1}\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right) + \cos^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)$

$= \dfrac{\pi}{2} = $ R.S

| এখানে $\sin^{-1}\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right)$ $= \cos^{-1}\left(\sqrt{1-\cos 2\theta}\right)$ $= \cos^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)$

(Proved)

Ex-04 প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan\dfrac{\theta}{2}\right) = \sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{ab}\sin\theta}{(b+a)+(b-a)\cos\theta}$

Sol^n: L.S $= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$

$= \sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{\frac{a}{b}}\tan\frac{\theta}{2}}{1+\frac{a}{b}\tan^2\frac{\theta}{2}} = \sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{ab}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{b\cos^2\frac{\theta}{2}+a\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{ab}\sin\theta}{\frac{b}{2}(1+\cos\theta)+\frac{a}{2}(1-\cos\theta)}$

$= \sin^{-1}\dfrac{2\sqrt{ab}\sin\theta}{(b+a)+(b-a)\cos\theta} = $ R.S **(Proved)**

Ex-05 প্রমাণ কর, $\tan^{-1}\dfrac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta} - \tan^{-1}\dfrac{x-\sin\theta}{\cos\theta} = \theta$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}\dfrac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta} = \theta + \tan^{-1}\dfrac{x-\sin\theta}{\cos\theta}$

Sol^n: R.S $= \tan^{-1}\dfrac{x-\sin\theta}{\cos\theta} + \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\dfrac{\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{x-\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \tan^{-1}\dfrac{x\cos\theta}{\cos^2\theta - x\sin\theta + \sin^2\theta}$

$= \tan^{-1}\dfrac{x\cos\theta}{1-x\sin\theta} = $ L.S **(Proved)**

Ex-06 প্রমাণ কর যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a}$

Sol^n: $L.S=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right)$ [ধরি, $\cos^{-1}\frac{a}{b}=\theta$]

$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\left(\frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{2}{\cos\theta}=\frac{2}{\frac{a}{b}}\left[\because \cos^{-1}\frac{a}{b}=\theta\right]=\frac{2b}{a}=R.S$$

(Proved)

For practice:

01. প্রমাণ কর যে, $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)=\sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$
02. প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}2$
03. প্রমাণ কর যে, $\tan(2\tan^{-1}x)=2\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3)$
04. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{2}{3}=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}\frac{\sqrt{13}}{2}$
05. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0$
06. প্রমাণ কর যে,
$\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan\alpha\}-\{(\sqrt{2}-1)\tan\alpha\}=\tan^{-1}(\sin 2\alpha)$
07. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{1}{m+n}+\tan^{-1}\frac{n}{m^2+mn+1}=\tan^{-1}\frac{1}{m}$
08. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{p}{\sqrt{p^2+1}+1}+\tan^{-1}\frac{p}{\sqrt{p^2+1}-1}=\frac{\pi}{2}$
09. প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right\}=\cos^{-1}\frac{b+a\cos\theta}{a+b\cos\theta}$
10. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}+\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$
11. $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+y^2}{1-y^2}+\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+z^2}{2z}=\pi$ হলে দেখাও যে, $x+y+z=xyz$
12. প্রমাণ কর যে, $2\cos^{-1}\frac{3}{4}=\cos^{-1}\frac{1}{8}$
13. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\sqrt{\frac{xr}{yz}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{yr}{zx}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{zr}{xy}}=\pi$
যখন $r=x+y+z$
14. প্রমাণ কর যে, $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)$
$=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z)$
15. প্রমাণ কর যে,
$2\tan^{-1}\left\{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right\}=\tan^{-1}\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$
16. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$
17. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}x=2\tan^{-1}[\operatorname{cosec}\tan^{-1}x-\tan\cot^{-1}x]$
18. যদি $\tan^{-1}y=4\tan^{-1}x$ হয় তবে y কে x এর রাশিমালায় প্রকাশ কর।

Ans: $y=\frac{4x-\ldots}{x^4-\ldots}$

Type-02

Ex-01 প্রমাণ কর যে,

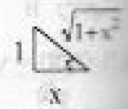
$$\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$$

Sol^n: $L.H.S=\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x$

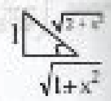
$$=\cos\tan^{-1}\sin\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\cos\cos^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}=R.H.S$$



$\cot^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$

(Proved)

For practice:

01. প্রমাণ কর যে, $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x=x$
02. প্রমাণ কর যে, $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}x=\sqrt{2-x^2}$

Type-03

Ex-01 যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ হয় তবে, প্রমাণ কর যে, $x+y+z=xyz$

Sol^n: $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=\pi \Rightarrow \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}=0$$

$$\Rightarrow x+y+z-xyz=0 \quad \therefore x+y+z=xyz$$

(Proved)

Ex-02 যদি $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$ হয় তবে দেখাও যে,
$\theta=\pm\frac{\pi}{4}+\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Sol^n: $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

$$\Rightarrow \sin(\pi\cos\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\pm\sin\theta \Rightarrow \cos\theta\pm\sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos\theta\pm\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \theta\pm\frac{\pi}{4}=\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta=\pm\frac{\pi}{4}+\cos^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(Showed)

...প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}\left\{1+\cos\left(2\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)\right\}^{1/2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$

...L.S $= \cos^{-1}\left\{1+\cos\left(2\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)\right\}^{1/2}$

$= \cos^{-1}\left\{1+\cos\left(\cos^{-1}\frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}\right)\right\}^{1/2}$

$= \cos^{-1}\left\{1+\frac{a-x}{a+x}\right\}^{1/2} = \cos^{-1}\left(\frac{2a}{a+x}\right)^{1/2}$

$= \sin^{-1}\sqrt{1-\left\{\left(\frac{2a}{a+x}\right)^{1/2}\right\}^2} = \sin^{-1}\sqrt{1-\frac{2a}{a+x}}$

$= \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = $ R.S **(Proved)**

For practice:

...যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ হয় তবে দেখাও যে, $xy+yz+zx=1$

...$x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

a) $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$ b) $x^2+y^2=1$

...$x+\cos^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$

...$x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ হয় তবে দেখাও যে,

...$\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$

যদি $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\theta$ হয় তবে দেখাও যে,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\theta+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\theta$

...$(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$ হলে দেখাও যে, $\theta=\pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

যদি $A+B+C=\pi$, $\tan^{-1}2=A$; $\tan^{-1}3=B$ হয় তবে দেখাও যে, $C=\frac{\pi}{4}$

Type-04: সমাধান কর

... $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\cos^{-1}x\sqrt{3}$

Sol: $\frac{\pi}{2}-2\sin^{-1}x=\cos^{-1}x\sqrt{3} \Rightarrow x\sqrt{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\sin^{-1}x\right)$

$\Rightarrow x\sqrt{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}2x\sqrt{1-x^2}\right)$

$\Rightarrow x\sqrt{3}=\sin\sin^{-1}2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{3}=2x\sqrt{1-x^2}$

∴ হয় $x=0$ অথবা, $2\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3} \Rightarrow 1-x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow x\pm\frac{1}{2}$

$\therefore x=0,\pm\frac{1}{2}$ **Ans.**

Ex-02 $\sec^{-1}\frac{x}{a}-\sec^{-1}\frac{x}{b}=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$

Sol^n: $\cos^{-1}\frac{a}{x}-\cos^{-1}\frac{b}{x}=\cos^{-1}\frac{1}{b}-\cos^{-1}\frac{1}{a}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{a}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{a}=\cos^{-1}\frac{1}{b}+\cos^{-1}\frac{b}{x}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{\frac{a}{x}\cdot\frac{1}{a}-\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}\right\}$

$= \cos^{-1}\left\{\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)}\right\}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{(x^2-a^2)(a^2-1)}{a^2x^2}=\frac{(x^2-b^2)(b^2-1)}{a^2x^2}$

$\Rightarrow b^2(x^2a^2-x^2-a^4+a^2)=a^2(b^2x^2-b^4-x^2+b^2)$ [∵ $x\neq0$]

$\Rightarrow x^2(a^2-b^2)=a^2b^2(a^2-b^2) \Rightarrow x^2=a^2b^2$

$\therefore x=\pm ab$

কিন্তু ঋণাত্মক মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore x=ab$ একমাত্র গ্রহণযোগ্য মান। **Ans.**

Ex-03 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}$

Sol^n: $\Rightarrow \sin^{-1}2x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}2x=\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right]$

$\Rightarrow 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{2} \Rightarrow 5x=\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow 25x^2=3(1-x^2) \Rightarrow 28x^2=3$

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ কিন্তু ঋণাত্মক মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ একমাত্র গ্রহণযোগ্য মান। **Ans.**

Ex-04 $\cot^{-1}(2n-1)-\cot^{-1}(2n+1)=\cot^{-1}(2n^2)$ এটা হতে দেখাও যে,

$\cot^{-1}(2.2^2)+\cot^{-1}(2.3^2)+\cot^{-1}(2.4^2)=\cot^{-1}\frac{14}{3}$

Sol^n: $n=2, 3, 4$ বসাই

$\cot^{-1}(2.2^2)=\cot^{-1}3-\cot^{-1}5$

$\cot^{-1}(2.3^2)=\cot^{-1}5-\cot^{-1}7$

$\cot^{-1}(2.4^2)=\cot^{-1}7-\cot^{-1}9$

যোগ করে, L.S $=\cot^{-1}3-\cot^{-1}9$

$=\tan^{-1}\frac{1}{3}-\tan^{-1}\frac{1}{9}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}}$

$\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\times\frac{27}{28}\right)=\cot^{-1}\frac{14}{3}=$ R.S. **(Showed)**

For practice:

01. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}+\tan^{-1}\frac{2x-1}{2x+1}=\tan^{-1}\frac{23}{36}$ Ans. $\frac{4}{3}$

02. $\tan^{-1}\sin\tan^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$ Ans. $\sqrt{2}$

03. দেখাও যে, $\tan^{-1}(1+a)-\tan^{-1}a=\cot^{-1}(1+a+a^2)$ এটা হতে দেখাও যে, $\cot^{-1}3+\cot^{-1}7+\cot^{-1}13+\cot^{-1}21=\cot^{-1}\frac{3}{2}$

04. মান নির্ণয় কর: $\cos^{-1}\left(\cot\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}+\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

Ans: 0

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. সমাধান কর: $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\sin^{-1}(1-x)$ [17-18]

Sol^n $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\sin^{-1}(1-x)$

$\Rightarrow \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}x=\sin^{-1}(1-x)$

$\Rightarrow \sin^{-1}(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}-x.x)=\sin^{-1}(1-x)$

$\Rightarrow \sin^{-1}(1-x^2-x^2)=\sin^{-1}(1-x)$

$\Rightarrow 1-2x^2=1-x$

$\Rightarrow x(2x-1)=0$

$\therefore x=0,\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=0,\frac{1}{2}$ Ans.

02. $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)$ এর সমাধান কর। [12-13]

Solve $\tan(\cos^{-1}x)=\sin(\tan^{-1}2)=\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\Rightarrow \tan(\cos^{-1}x)=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \cos^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ Ans.

03. সমাধান কর: $\tan^{-1}x+2\cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi$ [10-11]

Solve $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}+\cot^{-1}x=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow \cot^{-1}x=\frac{\pi}{6}$ $\therefore x=\sqrt{3}$ Ans.

04. সমাধান কর: $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ [06-07]

Solve $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

$\Rightarrow\frac{3}{2}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan^{-1}x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\tan\frac{\pi}{6}\therefore x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ Ans.

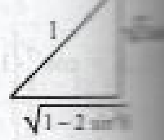
05. দেখাও যে, $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})=0$ [99-00]

Solve $\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\cos^{-1}(\sqrt{\cos 2\theta})$

$=\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\cos^{-1}\sqrt{1-2\sin^2\theta})$

$=\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)-\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin\theta)$

$=0$ (Showed)



06. সমাধান কর : $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$ [97-98]

Solve $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x-\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}(1-x)=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}(1-x)=\sin^{-1}(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}-x.x)$

$\Rightarrow \sin^{-1}(1-x)=\sin^{-1}(1-x^2-x^2)\Rightarrow 1-x=1-2x^2$

$\Rightarrow 2x^2-x=0\Rightarrow x(2x-1)=0\therefore x=0,\frac{1}{2}$

07. Prove that, $\tan^{-1}\frac{m}{n}-\tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=\frac{\pi}{4}$ [97-98]

Solve L.S $=\tan^{-1}\frac{m}{n}-\tan^{-1}\frac{m-n}{m+n}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{m}{n}-\frac{m-n}{m+n}}{1+\frac{m}{n}\times\frac{m-n}{m+n}}\right)$

$=\tan^{-1}\left(\frac{m^2+mn-mn+n^2}{mn+n^2+m^2-mn}\right)=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}=$ R.H. (Proved)

08. সমাধান কর : $\sec^{-1}\frac{x}{2}-\sec^{-1}\frac{x}{3}=\sec^{-1}3-\sec^{-1}2$ [96-97]

Solve $\sec^{-1}\frac{x}{2}-\sec^{-1}\frac{x}{3}=\sec^{-1}3-\sec^{-1}2$

$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{2}{x}-\cos^{-1}\frac{3}{x}=\cos^{-1}\frac{1}{3}-\cos^{-1}\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\frac{2}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{2}=\cos^{-1}\frac{3}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left[\frac{1}{x}\sqrt{\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{1}{x}\sqrt{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)}\right]$

$\Rightarrow \frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)=\frac{8}{9}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)\Rightarrow\frac{3}{4}-\frac{3}{x^2}=\frac{8}{9}-\frac{8}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{5}{x^2}=\frac{32-27}{36}=\frac{5}{36}$

$\therefore x=\pm 6$ কিন্তু $x\neq -6$ $\therefore x=6$ একমাত্র গ্রহণযোগ্য মান।

09. যদি $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. [95-96]

Solve $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$

$\Rightarrow \cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\pi-\cos^{-1}z$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}=\pi-\cos^{-1}z$

$\Rightarrow (xy)-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=-z$

$\Rightarrow (xy+z)^2=\left\{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}^2$

$\Rightarrow x^2y^2+z^2+2xyz=1-y^2-x^2+x^2y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ (Proved)

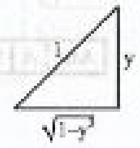
যদি $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$

[10-11;RUET: 08-09]

Solve $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}y\right)=\cos(\sin^{-1}y)$

$=\cos\left(\cos^{-1}\sqrt{1-y^2}\right)$



$\Rightarrow x=\sqrt{1-y^2}$

$x^2+y^2=1$ **(Showed)**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

প্রমাণ কর, $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ [03-04, 04-05]

Solve ধরি, $\cos^{-1}x=\theta \Rightarrow x=\cos\theta$

এখন, $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Rightarrow \frac{\theta}{2}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$

$\Rightarrow \theta=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$ $\quad\therefore \cos^{-1}x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}$

আবার, $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} \Rightarrow \theta=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$

$\therefore \cos^{-1}x=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ **(Proved)**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

মান নির্ণয় কর: $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$ [07-08]

Solve $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$=\sin^{-1}\left[\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}+\frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right]+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$=\sin^{-1}\left[\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}\right]+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\sin^{-1}\frac{63}{65}+\sin^{-1}\frac{16}{65}$

$=\sin^{-1}\frac{63}{65}+\cos^{-1}\frac{63}{65}=\frac{\pi}{2}$ **Ans.**

প্রমাণ কর, $\cot^{-1}\frac{5}{3}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$ [03-04]

Solve L.S $=\cot^{-1}\frac{5}{3}+\sin^{-1}\frac{3}{5}$

$=\tan^{-1}\frac{3}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{4}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{3\times3}{4\times5}}\right)$

$=\tan^{-1}\frac{27}{11}=$ R.S **(Proved)**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\cos\tan^{-1}\cot\sin^{-1}x$ এর মান কত? [05-06, KUET 13-14, CUET 09-10]

A. $-x$ B. $\frac{\pi}{2}-x$ C. x D. $\frac{\pi}{2}+x$

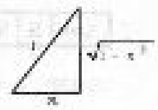
Ans C Solve $\cos\tan^{-1}\cot\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\cos\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$=\cos\cos^{-1}x=x$

02. $\sec^2(\tan^{-1}2)+\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$ এর মান হবে- [13-14]

A. x B. $x+5$ C. x^2 D. x^2+5

Ans B Solve

$\sec^2(\tan^{-1}2)+\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$



$=1+\{\tan(\tan^{-1}2)\}^2+\sin\cot^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$=1+2^2+\sin\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$



$=5+\sin\sin^{-1}x=5+x$

03. $\sin\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$ এর মান হবে- [12-13]

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ans B Solve $\sin\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$

04. যদি $x=\sin\cos^{-1}y$ হয়, তবে x^2+y^2 এর মান হবে- [11-12]

A. 2 B. 1 C. -1 D. 0

Ans B Solve $\cos^{-1}y=\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \sin^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-y^2}$ $\Rightarrow x^2=1-y^2$ $\therefore x^2+y^2=1$

05. সমাধান কর: $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec}x)$ [10-11]

A. $n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{4}$ B. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ C. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ D. $n\pi+\frac{\pi}{4}$

Ans D Solve $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec}x)$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{2\cos x}{1-\cos^2x}=\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sin x}\right)\Rightarrow\frac{2\cos x}{\sin^2x}=\frac{2}{\sin x}$

$\Rightarrow \tan x=1\Rightarrow\tan x=\tan\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore x=n\pi+\frac{\pi}{4}$

06. যদি $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$ হয়, তাহলে x এর মান হবে: [09-10]

A. $a+b$ B. $\frac{1+ab}{a-b}$ C. $a-b$ D. $\frac{a-b}{1+ab}$

Ans D Solve $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}a-2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow x=\tan\left(\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}\right)$ $\quad\therefore x=\frac{a-b}{1+ab}$

07. $\sec^2(\tan^{-1}2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)$ এর মান কত? [08-09; KUET : 05-06]

A. 15 B. 10
C. 5 D. 20

Ans | A | Solve $1+\{\tan(\tan^{-1}2)\}^2+1+\{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$
$= 1+4+1+9 = 15$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. যদি $\tan^{-1}a + \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c} = \pi$ হয়, তাহলে $a+b+c$ এর মান কত? [17-18]

A. 5 abc B. 7 abc C. 11 abc
D. 2 abc E. abc

Ans | E | Solve $\tan^{-1}a + \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c} = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1}a + \tan^{-1}b + \tan^{-1}c = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab} = \pi - \tan^{-1}c$

$\Rightarrow \frac{a+b}{1-ab} = \tan(\pi - \tan^{-1}c) = -c$

$\Rightarrow a+b = -c + abc$

$\therefore a+b+c = abc$

02. $\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$ এর মান কোনটি? [15-16]

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{-\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$ E. $\frac{\pi}{6}$

Ans | A | Solve $\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{2}$

$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}} + \tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \tan{-1}\frac{25}{25} + \tan^{-1}\frac{5}{5}$

$= \tan^{-1}1 + \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

03. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 13 ও 5 একক হয় এবং 13 একক বাহুর পাশের একটি কোণের পরিমাণ $\operatorname{cosec}^{-1}\frac{13}{5}$ হলে, অপর কোণ দুইটির পরিমাণ ও অপর বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে? [15-16]

A. $\frac{\pi}{4}, \sec^{-1}\frac{13}{12}, 12$ B. $\frac{\pi}{2}, \sec^{-1}\frac{13}{12}, 12$ C. $\frac{\pi}{2}, \cos^{-1}\frac{13}{12}, 12$

D. $\frac{\pi}{2}, \sin^{-1}\frac{5}{13}, 12$ E. কোনটিই নয়

Ans | B | Solve

দেওয়া AC = 5

$BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

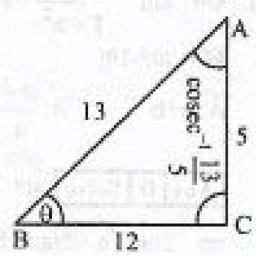
$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

$\therefore \sec\theta = \frac{13}{12}$

$\therefore \theta = \sec^{-1}\frac{13}{12}$

কোণদ্বয় $\frac{\pi}{2}, \sec^{-1}\frac{13}{12}$

এবং অপর বাহু = 12



04. $\sec^2(\cot^{-1}3) + \operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}2)$ এর মান কত? [14-15]

A. $2\frac{13}{36}$ B. $3\frac{11}{13}$

C. $5\frac{7}{9}$ D. $4\frac{3}{11}$

E. $5\frac{12}{13}$

Ans | A | Solve $1+\tan^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) + 1 + \cot^2\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right)$

$= 2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}$

$= 2\frac{13}{36}$

05. $\tan^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{1}{3}$ এর মান কোনটি? [11-12]

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{5\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

E. $\frac{5\pi}{6}$

Ans | C | Solve $\tan^{-1}2 + \cot^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$

$= \pi + \tan^{-1}\frac{2+3}{1-2\times3}$

$= \pi - \tan^{-1}1$

$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

06. $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y}$ এর সরলীকৃত মান কত? [10-11]

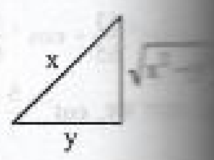
A. $\frac{\sqrt{x^2-2y^2}}{x}$ B. $\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{x}$

C. $\frac{\sqrt{y^2-2x^2}}{y}$ D. $\frac{\sqrt{y^2-2x^2}}{x}$

E. $\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

Ans | E | Solve $\sin\cos^{-1}\tan\sec^{-1}\frac{x}{y}$

$= \sin\cos^{-1}\tan\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$



$= \sin\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

$= \sin\sin^{-1}\frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$



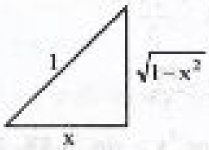
$= \frac{\sqrt{2y^2-x^2}}{y}$

tan $\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$ এর মান কোনটি? [09-10]

A. x B. $\sqrt{1-x^2}$ C. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

D. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ E. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Ans C Solve $\tan\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x$



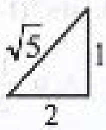
$= \tan\cot^{-1}\left(\tan\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

$= \tan\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

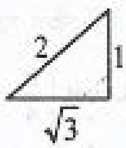
$\operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right) - 3\sec^2\left(\cot^{-1}\sqrt{3}\right)$ এর মান হলো: [08-09]

A. 1 B. 2 C. 3 D. $\dfrac{\pi}{2}$ E. $\dfrac{\pi}{4}$

Ans A Solve



$\operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right) - 3\sec^2(\cot^{-1}\sqrt{3})$



$= \operatorname{cosec}^2\left(\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{1}\right) - 3\sec^2\left(\sec^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$= (\sqrt{5})^2 - 3.\dfrac{4}{(\sqrt{3})^2} = 5 - 4 = 1$

ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

$\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x) = ?$ [12-13]

A. −4x B. π − 2x C. −2x D. None

Ans C Solve $\sin^{-1}(-\cos x) + \sin^{-1}(\cos 3x)$

$= -\left(\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\cos x\right) + \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\cos 3x)$

$= -\dfrac{\pi}{2} + x + \dfrac{\pi}{2} - 3x = -2x$

$\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} + \cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}$ সমীকরণে x-এর মান কত? [11-12]

A. $\dfrac{a-b}{1+ab}$ B. $\dfrac{a+b}{1-ab}$ C. $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ D. None of these

Ans B Solve $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} + \cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}a + 2\tan^{-1}b$

$\Rightarrow \tan^{-1}x = \tan^{-1}a + \tan^{-1}b \quad \therefore x = \dfrac{a+b}{1-ab}$

$\sec^2(\tan^{-1}4) + \tan^2(\sec^{-1}3)$ এর মান কত? [10-11]

A. 5 B. 25 C. 7 D. None

Ans B Solve $1 + \{\tan(\tan^{-1}4)\}^2 + \{\sec(\sec^{-1}3)\}^2 - 1 = 25$

SELF TEST [MCQ]

01. কোনটি মিথ্যা?

A. $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left[2x\sqrt{1-x^2}\right]$

B. $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}[2x^2 - 1]$

C. $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

D. None

02. $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = ?$

A. x B. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

C. x^2 D. None

03. $4\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}3\right) = ?$

A. 2π B. π

C. 3π D. $\dfrac{\pi}{2}$

04. $\sin^2\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) - \cos^2\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = ?$

A. $\dfrac{1}{9}$ B. $\dfrac{2}{9}$

C. $\dfrac{1}{3}$ D. None

05. যদি $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \dfrac{\pi}{2}$ হয় তবে ইহা নিচের কোনটিকে নির্দেশ করে?

A. বৃত্ত B. উপবৃত্ত

C. পরাবৃত্ত D. কোনটিই নয়

06. $\tan^{-1}5 + \tan^{-1}6 + \tan^{-1}7 + \tan^{-1}8 = ?$

A. $2\pi - \tan^{-1}\dfrac{8}{11}$ B. $-\tan^{-1}\dfrac{8}{11}$

C. $\tan^{-1}\dfrac{8}{11}$ D. কোনটিই নয়

07. $\sin^{-1}x = \cos^{-1}x$ এর সমাধান কত?

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D. কোনটিই নয়

08. $\sin^{-1}\dfrac{a-b}{a+b} + \tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b} = ?$ [a > b > 0]

A. π B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{\pi}{2}$ D. $\dfrac{2\pi}{3}$

09. $\tan^{-1}\sin\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ এর মান কত?

A. $\dfrac{\pi}{3}$ B. $\dfrac{\pi}{6}$

C. $\dfrac{2\pi}{3}$ D. কোনোটিই নয়

10. $4\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \pi$ হয় তবে x এর মান কত?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

11. যদি $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 4$ হয় তবে x = ?

A. tan 2 B. tan 4

C. $\tan\frac{1}{4}$ D. tan 8

12. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x} = ?$

A. $\tan^{-1}\sqrt{x}$ B. $\tan^{-1}x$

C. $\tan^{-1}2x$ D. কোনটিই নয়

13. $\tan^{-1}(x+2)+\tan^{-1}(x-2) = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ হলে x = ?

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

14. $\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2} = ?$

A. 1 B. 0

C. 3 D. কোনটিই নয়

15. $\sin^{-1}[\cos(\sin^{-1}x)] + \cos^{-1}[\sin(\cos^{-1}x)]$ এর মান-

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$ D. 0

16. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y = \frac{\pi}{4}$ হলে নিচের কোনটি সত্য?

A. x + y = 1 + xy

B. x + y + xy = 1

C. x + y – xy = 1

D. কোনটিই নয়

17. $\sin(\operatorname{cosec}^{-1}3 + \sec^{-1}3) = ?$

A. $\frac{\pi}{6}$ B. –1

C. $\frac{\pi}{4}$ D. 1

18. $\sin^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}-\tan^{-1}\sqrt{2} = ?$

A. 1 B. 2

C. 4 D. 0

19. $4\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{17}}-\tan^{-1}\frac{79}{401} = ?$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

20. $\sin(3\sin^{-1}x) = ?$

A. $3x - x^3$ B. $3x - 4x^3$

C. $4x^3 - 3x$ D. $3x - 4x^2$

21. $\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ এর মুখ্য মান-

A. $-\frac{2\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$

22. $\cos^{-1}x > \sin^{-1}x$ হয়, তবে-

A. $0 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $-1 < x < 0$

C. $x < 0$

D. $-1 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

23. $\sin^{-1}(1-x) + 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, x = ?

A. $0, \frac{1}{2}$ B. $1, \frac{1}{2}$

C. 0 D. $\frac{1}{2}$

24. $\cot\left[\frac{\pi}{4}-2\cot^{-1}3\right] = ?$

A. 3 B. 6

C. 7 D. 9

25. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239} = ?$

A. π B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23. Ⓐ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24. Ⓐ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

25.D	24.C	23.A	22.D	21.B	20.B	19.B	18.D	[illegible]
16.B	15.C	14.B	13.A	12.B	11.D	10.C	09.B	[illegible]
07.C	06.A	05.A	04.B	03.B	02.A	01.D		

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

সমাধান কর: $\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)} + \sin^{-1}\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$

Ans: $x = 0, -1$

সমাধান কর: $\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}(\cos x) = |\tan x|,\ 0 \le x \le 2\pi$

Ans: চারটি সমাধান আছে

যদি $\frac{m\tan(\alpha-\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{n\tan\theta}{\cos^2(\alpha-\theta)}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$\theta = \frac{1}{2}\left[\alpha - \tan^{-1}\left(\frac{n-m}{n+m}\tan\alpha\right)\right]$

সমাধান কর: $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{2\pi}{3}, \cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \frac{\pi}{3}$

Ans: $x = \frac{1}{2}, y = 1$

সমাধান কর: $\theta = \tan^{-1}(2\tan^2\theta) - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3\sin2\theta}{5+4\cos2\theta}\right)$

Ans: $n\pi, n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi - \tan^{-1}2,\ n \in Z$

যদি $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right)$ এবং $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(\phi - \theta)$ -এর একটি মান হবে $\frac{\pi}{6}$ ।

সমাধান কর: $2\tan^{-1}(2x-1) = \cos^{-1}x$ Ans: $x = 0$

সমাধান কর: $2\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Ans: $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

সমাধান কর: $\sin^{-1}6x + \sin^{-1}6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}$ Ans: $x = -\frac{1}{12}$

সমাধান কর: $3\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} - 4\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} + 2\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{3}$

Ans: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

সমাধান কর: $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec}x)$

Ans: $n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in Z$

XCLUSIVE সূত্রাবলী
(অজানাকে জানো)

01. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y$

$$= \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), & \text{যখন } xy < 1 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), & \text{যখন } x, y > 0 \text{ এবং } xy > 1 \\ -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), & \text{যখন } x, y < 0 \text{ এবং } xy > 1 \end{cases}$$

$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y$

$$= \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right), & \text{যখন } xy > -1 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right), & \text{যখন } x > 0, y < 0 \text{ এবং } xy < -1 \\ -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right), & \text{যখন } x < 0, y > 0 \text{ এবং } xy < -1 \end{cases}$$

02.

i. $$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \begin{cases} \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \text{ যখন, } -1 \le x, y \le 1,\ x^2+y^2 \le 1 \text{ অথবা } xy < 0 \text{ এবং } x^2+y^2 > 1 \\ \pi - \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } 0 < x, y \le 1 \text{ এবং } x^2+y^2 > 1 \\ -\pi - \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } -1 \le x, y < 0 \text{ এবং } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

ii. $$\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \begin{cases} \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } -1 \le x, y \le 1 \text{ এবং } x^2+y^2 < 1 \text{ অথবা } xy > 0 \text{ এবং } x^2+y^2 > 1 \\ \pi - \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } 0 < x \le 1, -1 \le y < 0 \text{ এবং } x^2+y^2 > 1 \\ -\pi - \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } -1 \le x < 0, 0 < y \le 1 \text{ এবং } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

03.

i. $$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \begin{cases} \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}, \text{ যখন } -1 \le x, y \le 1 \text{ এবং } x+y \ge 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}\left\{xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\}, \text{ যখন } -1 \le x, y \le 1 \text{ এবং } x+y \le 0 \end{cases}$$

ii. $$\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \begin{cases} \cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\} \text{ যখন } -1 \le x \le 0, 0 < y \le 1 \text{ এবং } x \le y \\ -\cos^{-1}\left\{xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right\} \text{ যখন } -1 \le y < 0, 0 < x \le 1 \text{ এবং } x \ge y \end{cases}$$

04. i. $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{cose}^{-1}\frac{1}{x}$

ii. $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \sec^{-1}\frac{1}{x} = \text{cosce}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

iii. $\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cot^{-1}\frac{1}{x}$

$= \sec^{-1}\sqrt{1+x^2} = \text{cosce}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

05.

i. $$2\sin^{-1}x = \begin{cases} \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } \frac{-1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi - \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1 \\ -\pi - \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \text{ যখন } -1 \le x \le -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ii. $3\sin^{-1}x = \begin{cases} \sin^{-1}(3x-4x^3), \text{ যখন } \frac{-1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ \pi - \sin^{-1}(3x-4x^3), \text{ যখন } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ -\pi - \sin^{-1}(3x-4x^3) \text{ যখন } -1 \le x \le -\frac{1}{2} \end{cases}$

06.

i. $2\cos^{-1}x = \begin{cases} \cos^{-1}(2x^2-1), \text{ যখন } 0 \le x \le 1 \\ 2\pi - \cos^{-1}(2x^2-1), \text{ যখন } -1 \le x \le 0 \end{cases}$

ii. $3\cos^{-1}x = \begin{cases} \cos^{-1}(4x^3-3x), \text{ যখন } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 2\pi - \cos^{-1}(4x^3-3x), \text{ যখন } -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 2\pi + \cos^{-1}(4x^3-3x), \text{ যখন } -1 \le x \le -\frac{1}{2} \end{cases}$

07.

i. $2\tan^{-1}x = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}, \text{ যখন } -1 \le x \le 1 \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), \text{ যখন } x > 1 \\ -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), \text{ যখন } x < -1 \end{cases}$

ii. $3\tan^{-1}x = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), \text{ যখন } \frac{-1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pi + \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), \text{ যখন } x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), \text{ যখন } x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

08.

i. $2\tan^{-1}x = \begin{cases} \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}, \text{ যখন } -1 \le x \le 1 \\ \pi - \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}, \text{ যখন } x > 1 \\ -\pi - \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}, \text{ যখন } x < -1 \end{cases}$

ii. $2\tan^{-1}x = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \text{ যখন } x \ge 0 \\ -\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \text{ যখন } x \le 0 \end{cases}$

09. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \cot^{-1}x, \text{ যখন } x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1}x, \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

10. i. $\frac{1}{2}\cos^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

ii. $\frac{1}{2}\sin^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \tan^{-1}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$= \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}$

$= \frac{\pi}{4} - \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \frac{\pi}{4} - \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

iii. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \tan^{-1}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$= \tan^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$

$= \cos^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}}$

iv. $\frac{1}{2}\cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)$

$= \tan^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x}} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$= \cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{2\sqrt{1+x^2}}}$

$= \cos^{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2\sqrt{1+x^2}}}$

v. $\frac{1}{2}\sec^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2x}} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{2x}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

vi. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^{-1}x = \tan^{-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$

$= \cot^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{\pi}{4} - \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2x}} = \frac{\pi}{4} - \sin^{-1}\sqrt{\ldots}$

$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}$

$= \sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2x}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2x}}$

11.

i. $\sin^{-1}(\sin x) = \begin{cases} -\pi - x \text{ যখন } -\frac{3\pi}{2} \le x \le -\frac{\pi}{2} \\ x \quad \text{যখন } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \quad \text{যখন } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ -2\pi + x \text{ যখন } \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$

ii. $\cos^{-1}(\cos x) = \begin{cases} -x \quad \text{যখন } -\pi \le x \le 0 \\ x \quad \text{যখন } 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x \quad \text{যখন } \pi \le x \le 2\pi \\ -2\pi + x \text{ যখন } 2\pi \le x \le 3\pi \end{cases}$

iii. $\tan^{-1}(\tan x) = \begin{cases} -\pi - x \text{ যখন } -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} \\ x \quad \text{যখন } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x - \pi \quad \text{যখন } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 2\pi + x \text{ যখন } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2} \end{cases}$

[২য় অংশ]

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

...আলোচনাঃ বিগত বছরগুলোতে এ অধ্যায় হতে অনেক প্রশ্ন এসেছে। ... এ অধ্যায় হতে নিয়মিত প্রশ্ন আসে তাই এ অধ্যায়ের সকল সমস্যাগুলো ... Practice করতে হবে। এক বা একাধিক ত্রিকোণমিতিক অনুপাতবিশিষ্ট ...কে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বলা হয়। যে সমস্ত কোণ কোন ত্রিকোণমিতিক ...কে সিদ্ধ করে সেগুলোই ত্রিকোণমিতিক সমীকরণটির সমাধান।

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

...$= 0$ হলে $\theta = n\pi$

...$= 0$ হলে $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

...$= 0$ হলে $\theta = n\pi$

...$= 1$ হলে $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

...$= 1$ হলে $\theta = 2n\pi$

...$= -1$ হলে $\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

...$= -1$ হলে $\theta = (2n+1)\pi$

...$= \sin\alpha$ হলে $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

...$= \cos\alpha$ হলে $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

...$= \tan\alpha$ হলে $\theta = n\pi + \alpha$

...ক্ষেত্রে n এর মান শূন্য অথবা যেকোন পূর্ণসংখ্যা।

...কোণমিতিক সমীকরণের অপ্রাসঙ্গিক মূল:

...কোণমিতিক সমীকরণ একাধিক পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়। সমাধানগুলো ...ত দৃষ্টিতে যদিও ভিন্ন মনে হয় কিন্তু প্রকৃত পক্ষে সমাধানগুলো থেকে ...কোনসমূহ পাওয়া যায়। কিন্তু কোন কোন ক্ষেত্রে ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতির ...ণে সমাধান হিসেবে সঠিক সমাধানের সাথে এমন কতগুলো সমাধান ...য়া যায় যেগুলো প্রদত্ত সমীকরণের মূল নয়। এই মূলগুলোকে অপ্রাসঙ্গিক ...বলা হয়। কিছু কিছু সমীকরণকে বর্গ করে সমাধান নির্ণয় করা যায়। এ ...য়া কিছুটা ত্রুটিপূর্ণ বলে প্রাপ্ত মূলগুলোর কোন কোনটি প্রদত্ত সমীকরণকে ...করে না।

...ন, $\cos x - \sin x = 1$ সমীকরণটি নিম্নের পদ্ধতিকে সমাধান করা হলে ...সঙ্গিক মূল পাওয়া যায়:

$\cos x - \sin x = 1$

$\Rightarrow \cos x = 1 + \sin x \quad \Rightarrow \cos^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x$

$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x$

$\Rightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin(\sin x + 1) = 0$

...য় $\sin x = 0, \Rightarrow x = n\pi, n \in Z$

...বা $\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1$

$\Rightarrow x = (4n-1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

...নু, $x = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi$ ------- ইত্যাদি মূল $\cos x - \sin x = 1$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। তাই এখানে $x = \pi, \pm3\pi, \pm5\pi$ ------ ইত্যাদি অপ্রাসঙ্গিক মূল এবং $\cos x - \sin x = 1$ সমীকরণের প্রকৃত সমাধান হবে

$= 2n\pi, (4n-1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n \in Z$

এই জাতীয় $(a\cos x + b\sin x = c)$ সমীকরণের সমাধানে যাতে অপ্রাসঙ্গিক মূলের অনুপ্রবেশ না ঘটে এজন্য নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করা যায়:

$\cos x - \sin x = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ যেখানে $n \in Z$

$\Rightarrow x = 2n\pi$

অথবা, $x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi - \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $n = 2n\pi, (4n-1)\frac{\pi}{2}$; যেখানে $n \in Z$ **Ans.**

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: এক জাতীয় উৎপাদকে বিশ্লেষণ

➲ এ problem গুলো solve করার জন্য question এ যাই দেয়া থাক প্রথমে সবগুলোকে একজাতীয় করে নিতে হবে। তারপর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে উত্তর চলে আসে। ব্যবধি দেয়া থাকলে সবশেষে যা উত্তর আসবে তাতে বসালেই সম্ভাব্য মানগুলো পাওয়া যাবে।

Ex-01 সমাধান করঃ $2\sin^2 x + \sin 2x = 2$ যখন $-\pi < x < \pi$

Sol^n: $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

$\Rightarrow 1 - \cos 2x + 1 - \cos^2 2x = 2$

$\Rightarrow \cos^2 2x + \cos 2x = 0$

$\therefore \cos 2x = 0$

$\therefore x = (2n-1)\frac{\pi}{4}$

অথবা, $\cos 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = (2n+1)\pi$

$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ [যেখানে $n \in Z$]

এখন $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ এর জন্য x এর মানগুলো বের করিঃ

$\therefore n = -3$ হলে $x = -\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$

$\therefore n = -2$ হলে $x = -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}$

$\therefore n = -1$ হলে $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}$

$\therefore n = 0$ হলে $x = \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

$\therefore n = 1$ হলে $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

$\therefore n = 2$ হলে $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$

$\therefore -\pi < x < \pi$ ব্যবধিতে, $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}$ **Ans.**

Ex-02 সমাধান করঃ $\cot 2x - \cot 4x = \sqrt{2}$

Sol^n: $\cot 2x - \cot 4x = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin 4x \cos 2x - \sin 2x \cos 4x}{\sin 2x \sin 4x} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin(4x - 2x)}{\sin 2x \sin 4x} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\sin 2x \sin 4x} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [$\because \sin 2x \neq 0$] $\Rightarrow \sin 4x = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 4x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = \frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{16}$ [যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

Ex-03 সমাধান করঃ $\cot\theta + \cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 2$

Sol^n: $\cot\theta + \cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 2$

$\Rightarrow \cot\theta + \frac{\cot\frac{\pi}{4}\cot\theta - 1}{\cot\theta + \cot\frac{\pi}{4}} = 2 \Rightarrow \cot\theta + \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = 2$

$\Rightarrow \frac{\cot\theta(\cot\theta + 1) + \cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = 2$

$\Rightarrow \cot^2\theta + \cot\theta + \cot\theta - 1 = 2\cot\theta + 2$

$\Rightarrow \cot^2\theta = 3 \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ [যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

Ex-04 $\sin\theta + \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Sol^n: $\frac{1 + \sin^2\theta}{\sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\sin^2\theta + \sqrt{2} - 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\theta(\sin\theta - \sqrt{2}) - 1(\sin\theta - \sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow (\sin\theta - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin\theta - 1) = 0$

কিন্তু $\sin\theta - \sqrt{2} \neq 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ [যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

Ex-05 সমাধান করঃ $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$

Sol^n: $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$

$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta} - 2\right) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$ $\left[\because \frac{1}{\cos\theta} \text{ অর্থাৎ } \sec\theta \neq 0\right]$

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$ $\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ [যেখানে $n \in Z$

Ex-06 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2\sin 2\theta}$

$\Rightarrow (\sqrt{\sin\theta})^2 - \sqrt{4\sin\theta\cos\theta} + (\sqrt{\cos\theta})^2 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{\sin\theta})^2 - 2\sqrt{\sin\theta}.\sqrt{\cos\theta} + (\sqrt{\cos\theta})^2 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{\sin\theta} - \sqrt{\cos\theta})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\sin\theta} = \sqrt{\cos\theta}$

$\Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$

কিন্তু n এর মান বিজোড় হলে θ এর মান দ্বারা সমীকরণটি সি...
অতএব n এর মান সর্বদাই জোড় হবে।

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ [যেখানে $n \in Z$]

Ex-07 সমাধান করঃ $\cot 2x = \cos x + \sin x$

Sol^n: $\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cos x + \sin x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x(\cos x + ...$

$\Rightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - \sin 2x) = 0$

$\therefore \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = -1$

$\Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore x = n\pi - \frac{\pi}{4}$ [যেখানে $n \in Z$]

অথবা, $\cos x - \sin x - 2\sin x\cos x = 0$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = \sin^2 2x \Rightarrow 1 - \sin 2x = \sin^2 2x$

$\Rightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$\Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ $\therefore \sin 2x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$

[কারণ সাইন অনুপাত 1 অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা −1 অপেক্ষা ছোট হতে পারে...

$\Rightarrow \sin 2x = \sin\alpha$ [যখন $\sin\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$]

$\Rightarrow 2x = n\pi + (-1)^n\alpha$

$\therefore x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\alpha}{2}$ যখন $\sin\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, [যেখানে $n \in Z$...

For practice: সমাধান কর (01-17)

01. $2\cot x + \sin x = 2\mathrm{cosec}\,x$ **Ans.** ...
02. $\sec\theta - 1 = (\sqrt{2} - 1)\tan\theta$ **Ans.** $\theta = 2n\pi$, ...
03. $\tan x - \cot x = \mathrm{cosec}\,x$ **Ans.** $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, ...
04. $3\cos^2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ **Ans.** $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, ...
05. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\tan\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\cot\theta\right)$ হলে দেখাও যে, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$
06. $\sec^2 x + \mathrm{cosec}^2 x = 8$ **Ans.** $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, ...
07. $\cot x - \tan x = 2$ **Ans.** (4n ...

$\frac{\theta}{2} = (1+\cot\theta)^2$ Ans. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

$2\theta - \tan\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\sec 2\theta$ Ans. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$

$4\theta.\cos\theta = \frac{1}{4} + \sin\frac{5\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}$ Ans. $\frac{n\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin 2\theta} - \frac{\cos\alpha}{\cos 2\theta} = 2$ Ans. $\frac{n\pi}{3} + \frac{\alpha}{6}, (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

$2\theta = \cot^2\theta - \tan^2\theta$ Ans. $n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi - \frac{\pi}{4}$

$^2\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}$ Ans. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$

$^3x - \cos x\sin x = \sin^3 x + 1$ Ans. $2n\pi, 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

$2\theta + 4\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta + 2\sqrt{3}$ Ans. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$^3x\sin 3x + \sin^3 x\cos 3x = \frac{3}{4}$ Ans. $(4n+1)\frac{\pi}{8}$

$\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 4$ Ans. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

সকল ক্ষেত্রে n-এর মান শূন্য অথবা যেকোন পূর্ণসংখ্যা ।]

Type-02: acosx + bsinx = c আকারের

$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ সমাধান কর ।

$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$ [sinx ও cosx এর সহগ যা থাকবে তাদের বর্গের যোগফলের বর্গমূল দ্বারা ভাগ করতে হবে । যেমনঃ $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ । সুতরাং 2 দ্বারা ভাগ করা হয়েছে]

$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi - \frac{\pi}{6}$ [যেখানে $n \in Z$] Ans. $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi - \frac{\pi}{6}$

For practice

$\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ Ans. $2n\pi + \frac{7\pi}{12}, 2n\pi + \frac{\pi}{12}$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Ans. $2n\pi - \frac{\pi}{12}, 2n\pi + \frac{7\pi}{12}$

$\sin\theta + 2\cos\theta = 1$ Ans. $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2\alpha$ যখন $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

সকল ক্ষেত্রে n-এর মান শূন্য বা যেকোন পূর্ণসংখ্যা ।

Type-03:

Ex-01 সমাধান করঃ $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$

Sol^n: $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$

$\Rightarrow (\cos\theta + \cos 7\theta) + (\cos 3\theta + \cos 5\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta\cos 3\theta + 2\cos 4\theta\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta(\cos 3\theta + \cos\theta) = 0$

$\therefore \cos 4\theta = 0$

$\Rightarrow 4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $\cos 3\theta + \cos\theta = 0$

$\Rightarrow 2\cos 2\theta\cos\theta = 0$

$\therefore \cos 2\theta = 0$ অথবা $\cos\theta = 0$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ অথবা $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

[যেখানে $n \in Z$] Ans.

Ex-02 $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x$

Sol^n: $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x$

$\Rightarrow 2\cos 5x\cos x = 2\sin 2x\cos x \Rightarrow 2\cos x(\cos 5x - \sin 2x) = 0$

$\therefore \cos x = 0$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $\cos 5x - \sin x = 0$

$\Rightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \cos 5x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7x}{2}\right) = 0$

$\therefore x = (4n-1)\frac{\pi}{6}$ অথবা $(4n+1)\frac{\pi}{14}$

[যেখানে $n \in Z$] Ans.

Ex-03 সমাধান করঃ $\cos 9x\cos 7x = \cos 5x\cos 3x$

Sol^n: $\cos 9x.\cos 7x = \cos 5x\cos 3x$

$\Rightarrow \cos 16x + \cos 2x = \cos 8x + \cos 2x$

$\Rightarrow \cos 8x - \cos 16x = 0 \Rightarrow 2\sin 12x\sin 4x = 0$

$\therefore \sin 12x = 0$ অথবা $\sin 4x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{12}$ অথবা $x = \frac{n\pi}{4}$ [যেখানে $n \in Z$] Ans.

Ex-04 $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

$\Rightarrow \frac{\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x} + \tan 3x = 0$

$\Rightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0 \Rightarrow \sin 3x\left(\frac{1}{\cos x\cos 2x} + \frac{1}{\cos 3x}\right) = 0$

$\therefore$ হয় $\sin 3x = 0$

$\Rightarrow 3x = n\pi \quad \therefore x = \frac{n\pi}{3}$

অথবা $\frac{1}{\cos x\cos 2x} + \frac{1}{\cos 3x} = 0$

$\Rightarrow \cos 3x + \cos x\cos 2x = 0$

$\Rightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3 + 2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x(6\cos^2 x - 4) = 0$

কিন্তু $\cos x \neq 0$ কারন $\cos x = 0$ হলে সমীকরণটি অসীম হয় ।

$\therefore 6\cos^2 x - 4 = 0 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\therefore x = n\pi \pm \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ [যেখানে $n \in Z$] Ans.

Ex-05 $a\tan\theta + b\sec\theta = c$ সমীকরণের দুইটি সমাধান α ও β হলে প্রমাণ কর যে, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{2ac}{a^2 - c^2}$

Sol^n: দেয়া আছে, $a\tan\theta + b\sec\theta = c$

$\Rightarrow b\sec\theta = c - a\tan\theta \Rightarrow b^2(1+\tan^2\theta) = c^2 - 2ca\tan\theta + a^2\tan^2\theta$

$\Rightarrow (a^2 - b^2)\tan^2\theta - 2ac\tan\theta + c^2 - b^2 = 0$ ------ (i)

(i) নং হলো $\tan\theta$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। যেহেতু α ও β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি সমাধান সুতরাং $\tan\alpha$ ও $\tan\beta$ এ সমীকরণের দুইটি মূল।

$\therefore \tan\alpha + \tan\beta = \frac{2ac}{a^2 - b^2}$

এবং $\tan\alpha\tan\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{2ac}{a^2-b^2}}{1 - \frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}} = \frac{2ac}{a^2 - c^2}$$

$\therefore \tan(\alpha+\beta) = \frac{2ac}{a^2 - c^2}$ **(Proved)**

For practice: সমাধান কর (01-08)

01. $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$ **Ans.** $2n\pi; (4n+1)\frac{\pi}{6}$

02. $\sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \sin 9\theta = 0$ **Ans.** $\frac{n\pi}{6}, (2n+1)\frac{\pi}{4}, (2n+1)\frac{\pi}{2}$

03. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ যখন $0 < x < 360°$ **Ans.** $90°, 270°, 120°, 240°$

04. $\sin 2x \tan x + 1 = \sin 2x + \tan x$ **Ans.** $n\pi + \frac{\pi}{4}$

05. $\sin 5\theta \cos\theta = \sin 6\theta \cos 2\theta$ **Ans.** $n\pi, (2n+1)\frac{\pi}{14}$

06. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$ **Ans.** $(4n+1)\frac{\pi}{12}$

07. $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$ **Ans.** $(3n+1)\frac{\pi}{9}$

08. $\sqrt{3}(\tan x + \tan 2x) + \tan x \tan 2x = 1$ **Ans.** $(2n+1)\frac{\pi}{6}$

[সকল ক্ষেত্রে $n \in Z$]

09. যদি $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ সমীকরণের দুইটি সমাধান α ও β হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\sin(\alpha+\beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. সমাধান কর: $\cot x + \cot 2x + \cot 3x = \cot x \cot 2x \cot 3x$ [14-15]

Solve $\cot 3x + \cot 2x = -\cot x + \cot x \cot 2x \cot 3x$

$\Rightarrow \cot 3x + \cot 2x = -\cot x(1 - \cot 3x \cot 2x)$

$\Rightarrow \frac{\cot 3x + \cot 2x}{1 - \cot 3x\cot 2x} = -\cot x \Rightarrow \frac{\tan 3x + \tan 2x}{\tan 3x\tan 2x - 1} = -\cot x$

$\Rightarrow \frac{\tan 3x + \tan 2x}{1 - \tan 3x\tan 2x} = \cot x \Rightarrow \tan(3x + 2x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Rightarrow \tan 5x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 5x = n\pi + \frac{\pi}{2} - x$

$\Rightarrow 6x = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{12}$ [যেখানে $n \in Z$]

02. সমাধান কর: $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta; 0 < \theta < \pi$
[08-09 ; KUET: ...]

Solve $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta; 0 < \theta < 2\pi$

$\Rightarrow 2\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta = 2\cos^2\theta + \cos\theta$

$\Rightarrow \sin 2\theta(2\cos\theta + 1) = \cos\theta(2\cos\theta + 1)$

$\Rightarrow (2\cos\theta + 1)(\sin 2\theta - \cos\theta) = 0$

$\therefore 2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

অথবা, $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0 \quad \therefore \cos\theta = 0 \quad \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \quad \therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$

$\therefore 0 < \theta < \pi$ ব্যবধির মধ্যে, $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

03. সমাধান কর : $\frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 2x} = 4$ [07-08]

Solve $\frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} - \frac{1}{\cos 2x} = 4$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 4\sin 2x\cos 2x$

$\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

$\Rightarrow \sin 4x = \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x$

$\Rightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \sin 4x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \therefore 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ | $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = n\pi$ | $\Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (6n+1)\frac{\pi}{18}$ | $\therefore x = (3n+1)\frac{\pi}{3}$ [যেখানে $n \in Z$]

04. সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর: $1 - 2\sin\theta = \cos\theta$ [05-06]

Solve $1 - 2\sin\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta + \cos\theta = 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \sin\theta\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha = \cos\alpha$ [ধরি, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$]

$\Rightarrow \cos(\theta - \alpha) = \cos\alpha \therefore \theta = \alpha + (2n\pi \pm \alpha) = 2n\pi, 2n\pi + 2\alpha$

[যেখানে $n \in Z$ এবং $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$]

sin 2θ = cos 3θ সমীকরণের সাধারণ মান নির্ণয় কর। [04-05]

Solve $\cos 3\theta = \sin 2\theta$

$\Rightarrow 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta\,(4\cos^2\theta - 3 - 2\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta\,(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$

এখন $\cos\theta = 0$ হলে, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.4.(-1)}}{2.4}$

(+) নিয়ে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin\alpha$ (ধরি)

$\therefore \theta = n\pi \pm (-1)^n \alpha$ যেখানে, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ **Ans.**

(–) নিয়ে, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin\beta$ (ধরি)

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\beta$ যেখানে, $\sin\beta = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ **Ans.**

[যেখানে $n \in Z$]

সমাধান কর: $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$ [99-00, 02-03; RUET : 10-11,04-05]

Solve $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{4} = 1$

$\Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ [যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

সমীকরণটির সাধারণ সমাধান কর : $\sin 7\theta - \sin\theta = \sqrt{3}\cos 4\theta$ [96-97]

Solve $\sin 7\theta - \sin\theta = \sqrt{3}\cos 4\theta$

$\Rightarrow 2\cos 4\theta \sin 3\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 4\theta\,(2\sin 3\theta - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \cos 4\theta = 0$

$\Rightarrow 4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{8}$

অথবা, $2\sin 3\theta - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow 3\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3} \therefore \theta = \frac{1}{3}n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{9}$ [যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

সমাধান কর : $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2, -2\pi < \theta < 2\pi$
[96-97; CUET : 07-08; RUET : 07-08]

Solve $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2; -2\pi < \theta < 2\pi$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{3} = (2n+1)\pi$

$\therefore \theta = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{3}$ [যেখানে $n \in Z$]

$-2\pi < \theta < 2\pi$ ব্যবধির মধ্যে মানগুলো পাই, $\theta = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. সমাধান কর: $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 1; 0 < x < \pi$ [06-07, CUET 08-09]

Solve $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 1;\ 0 < x < \pi$

$\Rightarrow (2\cos x\cos 3x)\,2\cos 2x = 1 \Rightarrow 2\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 1$

$\Rightarrow 2\cos 2x\cos 4x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos 2x\cos 4x + \cos 4x = 0$

$\Rightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0 \quad \therefore$ হয় $\cos 4x = 0$

$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{8}$ .... (1)

অথবা, $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\therefore x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ .... (2) [যেখানে $n \in Z$]

(1) ও (2) নং হতে পাই,

যখন	$n = 0,$	$x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}$
"	$n = 1,$	$x = \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}$
"	$n = 2,$	$x = \frac{5\pi}{8}$
"	$n = 3,$	$x = \frac{7\pi}{8}$

$\therefore x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ **Ans.**

02. সমাধান কর : $\tan^2\theta = 3\text{cosec}^2\theta - 1$ for $0 \le \theta \le 2\pi$ [03-04]

Solve $\tan^2\theta = 3\text{cosec}^2\theta - 1\ (0 \le \theta \le 2\pi)$

$\Rightarrow \sec^2\theta = 3\text{cosec}^2\theta \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 3 \Rightarrow \tan^2\theta = 3$

$\therefore$ হয় $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$ [যেখানে $n \in Z$]

এখন $n = 0$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$n = 1$ " $\theta = \frac{4\pi}{3}$

অথবা, $\tan\theta = -\sqrt{3}$

$\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{3}$ [যেখানে $n \in Z$]

আবার, $n = 1$, হলে $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$n = 2$, হলে $\theta = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. সমাধান কর: $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$ [05-06]

Solve $2\sin\theta\tan\theta + 1 = \tan\theta + 2\sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\tan\theta - 2\sin\theta = \tan\theta - 1$

$\Rightarrow 2\sin\theta(\tan\theta - 1) - 1(\tan\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow (\tan\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore$ হয় $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}$ অথবা $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ অথবা $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, [যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

02. সমাধান কর: $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2;\ 0° < \theta < 180°$ [03-04]

Solve $\sec 4\theta - \cos 2\theta = 2;\ 0° < \theta < 180°$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos 4\theta} - \frac{1}{\cos 2\theta} = 2$

$\Rightarrow \cos 2\theta - \cos 4\theta = 2\cos 4\theta \cos 2\theta = \cos 6\theta + \cos 2\theta$

$\Rightarrow \cos 6\theta + \cos 4\theta = 0 \Rightarrow \cos 5\theta \cos\theta = 0$

$\therefore$ হয় $\cos 5\theta = 0$

$\Rightarrow 5\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{1}{5}(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ....(i)

[যেখানে $n \in Z$]

অথবা, $\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.....(ii)

(i) ও (ii) নং হতে $0° < \theta < 180°$ সীমার মধ্যে মানগুলো হল:

$\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$ **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. মান নির্ণয় কর: $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ [08-09]

Solve $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot\frac{\theta}{2} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ [যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

02. সমাধান কর : $1 + \sin 2\phi + \sin 2\theta = \cos(2\phi + 2\theta)$ [$0 \le \phi, \theta \le 90°$] [05-06]

Solve $1 + \sin 2\varphi + \sin 2\theta = \cos(2\varphi + 2\theta)$ [$0 \le \varphi, \theta \le 90°$]

$\Rightarrow 2\sin(\varphi + \theta)\cos(\theta - \varphi) + 1 - \cos(2\varphi + 2\theta) = 0$

$\Rightarrow 2\sin(\varphi + \theta)\cos(\theta - \varphi) + 2\sin^2(\theta + \varphi) = 0$

$\Rightarrow 2\sin(\varphi + \theta)\{\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi)\} = 0$

$\therefore$ হয় $\sin(\theta + \varphi) = 0$

$\therefore \theta + \varphi = n\pi$

$\therefore \theta = n\pi - \varphi$

যেহেতু $0 \le \frac{\pi}{2}$

$\therefore n\pi - \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \varphi \ge n\pi - \frac{\pi}{2}$

$\therefore \varphi \ge (2n-1)\frac{\pi}{2}$

অথবা, $\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta + \varphi) = 0$

$\cos(\theta - \varphi) = \cos\left(\theta + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \theta - \varphi = 2n\pi \pm \left(\theta + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow 2\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\theta = n\pi - \varphi$, এবং $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$, $\varphi \ge (2n-1)\frac{\pi}{2}$

[যেখানে $n \in Z$] **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\tan 2\theta \tan\theta = 1$ সমীকরণে θ এর মান হবে–
[13-14,09-10,06-07; CUET : 13-14, RUET : 13-14]

A. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ B. $n\pi - \frac{\pi}{6}$ C. $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ D. $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

Ans A Solve $\tan 2\theta \tan\theta = 1 \Rightarrow \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta = 1$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta \Rightarrow 3\tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ [যেখানে $n \in Z$]

02. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$ সমীকরণে [illegible] মান হবে- [12-13]

A. $\frac{n\pi}{12}$ B. $\frac{n\pi}{4}$ C. $\frac{n\pi}{3}$ D. $\frac{n\pi}{5}$

Ans C Solve $\tan x + \tan 2x = \tan x \tan 2x \tan 3x - \tan 3x$

$\Rightarrow \tan x + \tan 2x = -\tan 3x(-\tan x \tan 2x + 1)$

$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} = -\tan 3x \Rightarrow \tan(x + 2x) = -\tan 3x$

$\Rightarrow 2\tan 3x = 0 \Rightarrow \tan 3x = 0 \Rightarrow 3x = n\pi \therefore x = \frac{n\pi}{3}$

03. যদি $3\sec^4\theta + 8 = 10\sec^2\theta$ হয়, তবে $\tan\theta$ এর মান হবে- [illegible]

A. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. ± 1 C. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm 1$ D. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, [illegible]

Ans D Solve $3\sec^4\theta - 10\sec^2\theta + 8 = 0$

$\Rightarrow (\sec^2\theta - 2)(3\sec^2\theta - 4) = 0$

$\therefore$ হয় $\sec^2\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta - 2 = 0$

$\therefore \tan\theta = \pm 1$

অথবা, $3\sec^2\theta - 4 = 0$

$\Rightarrow 3 + 3\tan^2\theta - 4 = 0$

$\Rightarrow 3\tan^2\theta = 1 \therefore \tan\theta = \pm$ [illegible]

04. যদি $\cot\theta = 2$ হয়, তবে $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta$ এর মান হবে- [illegible]

A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Ans D Solve $\cot\theta = 2 \therefore \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\cot^2\theta - 1}{\cot^2\theta + 1}$

$= \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5} \therefore 5\cos 2\theta - 3 = 0$

এখন, $10\sin 2\theta - 6\tan 2\theta = 2\tan 2\theta(5\cos 2\theta - 3) = 2\tan 2\theta$ [illegible]

05. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$, ($0° < \theta < 360°$) এর মান নির্ণয় কর [illegible]

A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

Ans B Solve $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 1 \Rightarrow \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{3} = 2n$[illegible]

$\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \therefore 0° < \theta < 360°$ ব্যবধিতে $\theta = 60°$

06. যদি $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}\theta - 5 = 0$ হয়, তখন θ ধনাত্মক, তাহলে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর জন্য θ এর মান হবে: [09-10]

A. 0° B. 30° C. 45° D. 60°

Ans B Solve $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}\theta - 5 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}\theta - 5 - 1 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}\theta - 6 = 0$

$\Rightarrow (\operatorname{cosec}\theta + 3)(\operatorname{cosec}\theta - 2) = 0$

$\therefore$ হয় $\operatorname{cosec}\theta = -3$ অথবা $\operatorname{cosec}\theta = 2$ সুতরাং $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} = 30°$

যদি $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$ হয়, তাহলে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর জন্য θ এর মান হবে– [08-09]

A. 0° B. 30° C. 45° D. 60°

Ans | C | Solve $2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3$

$\Rightarrow 2(1-\sin^2\theta) + 2\sqrt{2}\sin\theta = 3 \Rightarrow 2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2}\sin\theta)^2 - 2.\sqrt{2}\sin\theta.1 + 1^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4} \quad \therefore \theta = 45°$

$\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$

যদি $\tan^2\theta + \sec\theta = -1$; $0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান হবে- [07-08]

A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi p}{2}$

Ans | A | Solve $\tan^2\theta + \sec\theta = -1$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta + \sec\theta = 0 \Rightarrow \sec\theta(1 + \sec\theta) = 0$

কিন্তু $\sec\theta \neq 0 \therefore 1 + \sec\theta = 0 \therefore \sec\theta = -1 \Rightarrow \cos\theta = -1$

$\therefore 0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে $\theta = \pi$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

$\sqrt{3}\tan6\theta - \sqrt{3}\tan4\theta + \tan6\theta\tan4\theta + 1 = 0$ এর সমাধান হলো– [17-18]

A. 60^0 B. 165^0 C. 75^0
D. 30^0 E. 135^0

Ans | Blank | Solve $\sqrt{3}\tan6\theta - \sqrt{3}\tan4\theta + \tan6\theta\tan4\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \tan6\theta - \tan4\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}(1 + \tan6\theta\tan4\theta)$

$\Rightarrow \frac{\tan6\theta - \tan4\theta}{1 + \tan6\theta\tan4\theta} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan2\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2\theta = n\pi - \frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \quad \therefore \theta = -15°, 75°, 165°, 255°$ ....

কিন্তু $\theta = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ -এর জন্য $\tan6\theta = \tan\left(3n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\infty$ অথবা ∞

সুতরাং কোন সমাধান নাই।

যদি $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$ হয়, তবে α-এর মান হলো- [12-13]

A. $0, \frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ D. $0, \frac{\pi}{2}$ E. $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$

Ans | D | Solve $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \alpha - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \therefore \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ গ্রহযোগ্য মান

03. যদি $0 \le \theta \le 2\pi$ হয় এবং $\sin\theta - 2 = \cos2\theta$ হয়, তবে θ এর মান হলো- [07-08]

A. $\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{3\pi}{3}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$ E. $\frac{\pi}{2}$

Ans | E | Solve $\sin\theta - 2 = \cos2\theta \Rightarrow \sin\theta - 2 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0 \Rightarrow (\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 3) = 0$

$\therefore \sin\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}\left[\because \sin\theta \neq \frac{3}{2}\right] \therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, ... [যেখানে $n \in Z$]

$\therefore 0 \le \theta \le 2\pi$ ব্যবধিতে $\theta = \frac{\pi}{2}$

03. tanA+tanB+tanC = tanA tanB tanC হলে (A+B+C) এর মান কত? [05-06]

A. $\frac{\pi}{2}$ B. 0 C. π D. 2π

Ans | C | Solve

$\tan C = \frac{-(\tan A + \tan B)}{1 - \tan A\tan B} = -\tan(A + B) = \tan\{\pi - (A + B)\}$

$\Rightarrow C = \pi - (A + B) \quad \therefore A + B + C = \pi$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর সমাধান বের কর। [15-16]

A. π/3 B. π/6 C. π/2 D. π/4

Ans | A | Solve $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta - 4\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(\cos\theta - 2) - \sqrt{3}(\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta - \sqrt{3})(\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow 2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$; $\cos\theta \neq 2 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

02. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \tan\theta = 2$ হলে, θ এর সঠিক মান কত? [12-13]

A. 60° B. 45° C. ±60° D. None

Ans | C | Solve $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \tan\theta = 2$

$\Rightarrow \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} + \tan\theta = 2 \Rightarrow \sec\theta - \tan\theta + \tan\theta = 2 \Rightarrow \sec\theta = 2$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, [যেখানে $n \in Z$]

$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ ....

03. সমাধান কর: $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$; $-\pi < \theta < \pi$ [12-13]

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{-\pi}{3}$ C. Both A & B D. None

Ans | C | Solve $4(\sin^2\theta + \cos\theta) = 5$

$\Rightarrow 4(1 - \cos^2\theta + \cos\theta) - 5 = 0 \quad \Rightarrow 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \therefore \theta = \pm\frac{\pi}{3}$ গ্রহণযোগ্য অপশন

04. $\cot^2\theta - 2\sqrt{2}\operatorname{cosec}\theta + 3 = 0$ **হলে, θ এর মান কত? [11-12]**

A. $\pm 45°$ B. $\pm 135°$
C. $135°$ D. None of these

Ans C Solve $\cot^2\theta - 2\sqrt{2}\operatorname{cosec}\theta + 3 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2\theta - 2\sqrt{2}\operatorname{cosec}\theta + 2 = 0$

$\Rightarrow (\operatorname{cosec}\theta - \sqrt{2})^2 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}$ [যেখানে $n \in Z$]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-5\pi}{4} = 45°, 135°, -225°$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\cos(\pi\sqrt{x-4})\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$ **এর কয়টি সমাধান পাওয়া যাবে? [14-15]**

A. 0 B. 1 C. 2
D. > 2 E. None

Ans B Solve $\cos(\pi\sqrt{x-4})\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$

$\therefore \cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$ এবং $\cos(\pi\sqrt{x}) = 1$

$\therefore \pi\sqrt{x-4} = 2n\pi$ এবং $\pi\sqrt{x} = 2m\pi$

$x - 4 = 4n^2$ এবং $x = 4m^2$

উভয়শর্ত সিদ্ধ করার জন্য, $4(n^2+1) = 4m^2$

$\therefore n^2 + 1 = m^2$ (যেখানে $n, m \in Z$)

ইহা তখনই সম্ভব যখন $n = 0$ এবং $m = \pm 1$ হয়।

সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে $x = 4$

সুতরাং এই সমীকরণের একটি মাত্র সমাধান আছে।

02. $\sin^{-1}(1)$**-এর মান- (যেখানে, n = 1, 2, 3,....) [12-13]**

A. $\frac{n\pi}{2}$ B. $\frac{(n+1)\pi}{2}$ C. $\frac{(2n+1)\pi}{2}$

D. $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ E. None

Ans D Solve $\sin^{-1}1 = \theta$ (ধরি)।

$\therefore \sin\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

03. $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ **এবং** $0 < \theta < 360°$ **তবে, θ = ? [11-12]**

A. $30°, 150°$ B. $90°, 0°$ C. $60°, 120°$
D. $45°, 135°$ E. None

Ans C Solve $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta(2\sin\theta - \sqrt{3}) - 2(2\sin\theta - \sqrt{3}) = \theta$

$\Rightarrow (\cos\theta - 2)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = \theta$

$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [$\because \cos\theta \neq \pm 2$]

$\Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, ... [যেখানে $n \in Z$]

SELF TEST [MCQ]

01. $\tan x \tan 3x = 1$ **সমীকরণের সমাধান হচ্ছে—**

A. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ B. $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ C. $(2n+1)\frac{\pi}{8}$ D. None

02. $\sin 4\theta = \cos 3\theta + \sin 2\theta$; $0 < \theta < \pi$ **হলে θ = ?**

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. সবগুলো

03. $\tan^2 x + \sec^2 x = 3$ **হলে x = ?**

A. $n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ B. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ C. $(n \pm 1)\frac{\pi}{4}$ D. None

04. $2\sin x \sin 3x = 1$ **হলে x = ?**

A. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ B. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ C. A ও B উভয়ই D. None

05. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$; $-2\pi < x < 2\pi$ **হলে x = ?**

A. $-\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{11\pi}{3}$ D. None

06. $\cos 3\theta = \cos 2\theta$ **হলে θ = ?**

A. $2n\pi, \frac{n\pi}{5}$ B. $n\pi, \frac{2n\pi}{5}$ C. $2n\pi, \frac{2n\pi}{5}$ D. None

07. $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **হলে θ = ?**

A. $2n\pi + \frac{\pi}{12}$ B. $2n\pi - \frac{7\pi}{12}$ C. A ও B উভয়ই D. None

08. $\cot 2x - \tan 2x = 2$ **হলে x = ?**

A. $(4n+1)\frac{\pi}{8}$ B. $(4n+1)\frac{\pi}{16}$ C. $(2n+1)\frac{\pi}{16}$ D. 2n...

09. $\sin 4\theta = \sin\theta$ **হলে θ = ?**

A. $(2n+1)\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{2n\pi}{3}$ C. $\frac{n\pi}{4(-1)^n}$ D. A ও B উভয়ই

10. $\tan 5\theta = \cot 2\theta$ **হলে θ = ?**

A. $(2n+1)\frac{\pi}{16}$ B. $(2n+1)\frac{\pi}{14}$ C. $(2n+1)\frac{\pi}{7}$ D. None

11. $\sin m\theta + \sin p\theta = 0$ [$m \neq p$] **হলে θ = ?**

A. $\frac{n\pi}{m + p(-1)^n}$ B. $\frac{n\pi}{p + m(-1)^n}$ C. $\frac{n\pi}{m+p}$ D. None

12. $4\sin 4\theta + 1 = \sqrt{5}$ **হলে θ = ?**

A. $\frac{n\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{40}$ B. $\frac{n\pi}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{40}$

C. $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{20}$ D. None

13. $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$ **হলে x = ?**

A. $\frac{1}{3}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ C. A ও B উভয়ই D. None

14. $\sqrt{2}\sec x + \tan x = 1$ **হলে x = ?**

A. $(8n-1)\frac{\pi}{4}$ B. $(8n+1)\frac{\pi}{4}$ C. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ D. None

$(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \sqrt{3}$ হলে θ = ?

A. $n\pi + \frac{\pi}{12}$ B. $n\pi - \frac{\pi}{12}$ C. $n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ D. A ও B উভয়ই

$x + \tan3x = 0$ হলে x = ?

A. $-\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{n\pi}{2}$ D. $\frac{n\pi}{4}$

$2\theta - 3\cos^2\theta = 0$ হলে θ = ?

A. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ B. $\pi \pm \frac{\pi}{3}$ C. $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ D. None

$(\cos x + \sec x) = 5$ হলে x = ?

A. $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ B. $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ C. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ D. None

$\sqrt{3}\cos A + \sin A = \sqrt{3}$, $-2\pi < A < 2\pi$ হলে A = ?

A. 0 B. $\frac{\pi}{3}$ C. $-\frac{5\pi}{3}$ D. উপরের সবগুলো

কোনটি সম্ভব নয়?

A. $\cos\theta = 1$ B. $\sin\theta = \frac{3}{5}$ C. $\sec\theta = \frac{1}{2}$ D. $\text{cosec}\theta = 24411$

$\sin\theta = \sin\alpha$ হলে, θ = ?

A. $n\pi + \alpha$ B. $2n\pi \pm \alpha$ C. $n\pi + (-1)^n\alpha$ D. $n\pi \pm \alpha$

$\sin^2\theta - 2\cos\theta = 5$ হলে, θ = ?

A. $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$ B. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ C. A ও B উভয়ই D. কোনটিই নয়

$\sin 5\theta + \sin\theta = \sin 3\theta$ হলে, θ = ?

A. $\frac{n\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\tan^2x + \cot^2x = 2$ হলে, x = ?

A. $n\pi + \frac{\pi}{4}$ B. $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ C. $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ D. $n\pi + (-)^n\frac{\pi}{4}$

$\cos x + \sin x + \sqrt{2} = 0$ হলে x = ?

A. $\frac{5\pi}{4}$ B. $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ C. $(8n+5)\frac{\pi}{4}$ D. B ও C উভয়ই

$1 + \sqrt{3}\tan^2\theta = (1 + \sqrt{3})\tan\theta$ হলে, θ = কোনটি নয়?

A. 225° B. 210° C. 45° D. 60°

$\cos 3x \cos^3x + \sin3x \sin^3x = 0$ এর সাধারণ সমাধান−

A. $x = (4n+1)\frac{\pi}{4}$ B. $(2n-1)\frac{\pi}{4}$ C. $2n\pi$ D. None

OMR

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

B	26.D	25.D	24.C	23.A	22.B	21.C	20.C	19.D
C	17.A	16.D	15.D	14.A	13.B	12.A	11.A	10.B
D	08.B	07.C	06.C	05.A	04.C	03.B	02.D	01.C

PROBLEMETIC MATHS FOR THOUGHTFUL & BRAINY STUDFENTS

01. সমাধান কর: $\sin^{10}x + \cos^{10}x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$ **Ans:** $x = \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, n \in Z$

02. সমাধান কর:
$x + y = \frac{2\pi}{3}$ এবং $\frac{\sin x}{\sin y} = 2$ **Ans:** $x = n\pi + \frac{\pi}{2}, y = -n\pi + \frac{\pi}{6}, n \in Z$

03. সমাধান কর: $\cos x = |1 + \sin x|, 0 \le x \le 3\pi$ **Ans:** $x = 0, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

04. সমাধান কর: $\sin^2x + \cos^2y = 2\sec^2z$
Ans: $x = (2m+1)\frac{\pi}{2}, y = n\pi, z = p\pi; m, n, p \in Z$

05. সমাধান কর: $|\sqrt{3}\cos x - \sin x| \ge 2, 0 \le x \le 4\pi$
Ans: $\frac{11\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$

06. সমাধান কর: $r\sin\theta = 3$ এবং $r = 4(1 + \sin\theta)$ যখন $r > 0, -\pi \le \theta \le \pi$
Ans: $(r, \theta) = \left(6, \frac{\pi}{2}\right), \left(6, \frac{5\pi}{2}\right)$

07. যদি $0 \le x \le 3\pi$, $0 \le y \le 3\pi$ এবং $\cos x. \sin y = 1$ হয় তবে x, y এর মান বের কর।
Ans: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \left(3\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

08. সমাধান কর: $2\sin\theta = r^4 - 2r^2 + 3$ যখন $r \in \mathbb{R}$ এবং $0 \le \theta \le 3\pi$
Ans: $\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \left(1, \frac{5\pi}{2}\right) \left(-1, \frac{5\pi}{2}\right)$

09. সমাধান কর: $\sin x + \cos y = 1$, $\cos 2x - \cos 2y = 1$
Ans: $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, y = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}; m, n \in Z$

10. সমাধান কর: $\tan^2x + \cot^2x = 2\cos^2y$, $\cos^2y + \sin^2z = 1$
Ans: $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, y = m\pi, z = n\pi; m, n, k \in Z$

11. সমাধান কর: $|\cos x - 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 - 2\sin x - \cos 2x$
Ans: $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, m\pi, p\pi - (-1)^m\frac{\pi}{3}; m, n, p \in Z$

12. সমাধান কর: $12\sin x + 5\cos x = 2y^2 - 8y + 21$
Ans: $x = 2n\pi + \cos^{-1}\frac{5}{16}$ এবং $y = 2$

13. সমাধান কর: $\frac{\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{\cos x}{3}$ **Ans:** $x = (4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

14. সমাধান কর: a-এর কোন মানের জন্য, $\sin x.\cos y = a^2$, $\sin y \cos x = a$ -এর সমাধান পাওয়া যাবে। **Ans:** $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le a \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

15. সমাধান কর: $\cos x + \cos y + \cos(x + y) = -\frac{3}{2}$
Ans: $x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2(m-n)\pi \pm \frac{2\pi}{3}; m, \pi \in Z$

16. সমাধান কর: $\sin^2x + 4\sin^2y - \sin x - 2\sin y - 2\sin x \sin y + 1 = 0$ যেখানে $0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}$ **Ans:** $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{6}$

17. সমাধান কর: $\left(\cos\frac{\theta}{4} - 2\sin\theta\right)\sin\theta + \left(1 + \sin\frac{\theta}{4} - 2\cos\theta\right)\cos\theta = 0$
Ans: $\theta = (4n+1)\pi, n \in Z$

18. যদি $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3\tan 3\theta$ সমীকরণের চারটি সমাধান $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ এবং $\alpha \ne \beta \ne \gamma \ne \delta$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma + \tan\delta = 0$

19. সমাধান কর: $\tan^4x + \tan^4y + 2\cot^2x. \cot^2y = 3 + \sin^2(x + y)$ যেখানে $0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}$ **Ans:** $x = y = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in Z$

৮ম অধ্যায়
দ্বিতীয় পত্র

স্থিতিবিদ্যা (Statics)

[১ম অংশ]

সমবিন্দু বল

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলী (A-B)

❑ **স্থিতিবিদ্যা:** বলবিদ্যার যে শাখার স্থিতিশীল বস্তুর গতি ও বস্তুর উপর বলের প্রয়োগ, বলের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার আলোচনা করা হয় তাকে স্থিতিবিদ্যা বলে।

স্থিতিবিদ্যা
→ সমবিন্দু বল
→ সমতলীয় বলজোট

❑ **সমবিন্দু বল:** এক বিন্দুগামী বলগুলোকে সমবিন্দু বল বলে।

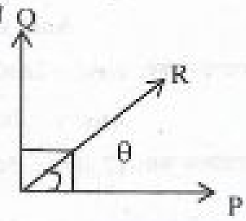
Note: এই বইয়ে সমবিন্দু বল কে দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে। A এবং B।

❑ **লব্ধি ও অংশক:** একই সময়ে কোন কণার উপর দুই বা ততোধিক বল প্রযুক্ত হলে যদি কোন নির্দিষ্ট দিকে একটিমাত্র বলের ক্রিয়াফল উপরোক্ত একাধিক বলের মিলিত ক্রিয়াফলের সমান হয় তবে ঐ একটি বলকে প্রথমোক্ত বলসমূহের লব্ধি বলা হয়। আবার ঐ একাধিক বলের প্রত্যেকটিকে লব্ধির অংশক বা উপাংশ বলে।

❑ **লম্বাংশক:** দুইটি অংশক বলের মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে তাদেরকে লম্বাংশক বলে।

P এর লম্বাংশক $= R\cos\theta$

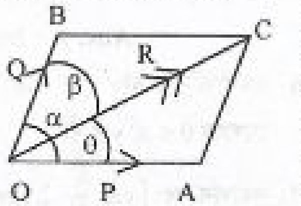
Q এর লম্বাংশক $= R\sin\theta$



❑ **বলের সামান্তরিক সূত্র:** কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দু'টি বলকে যদি কোন একটি সামান্তরিকের দু'টি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দিকে ও মানে নির্দেশ করা যায়, তবে ঐ বিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণ বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে। যদি O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল দু'টি বল P ও Q যে দিকে ও মানে OA ও OB দ্বারা সূচিত করা হয় এবং বলদ্বয়ের লব্ধি R যদি P বলের ক্রিয়ারেখা OA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে সামান্তরিকের সূত্রানুসারে,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$



❑ **বলের সাইনের সূত্র:** $\dfrac{P}{\sin\beta} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore P = \dfrac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $Q = \dfrac{R.\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

এখানে, $P \wedge R = \alpha$, $Q \wedge R = \beta$ এবং $P \wedge Q = \alpha + \beta$

Note:

(i) $\alpha = 0^\circ$ হলে $R = P + Q = R_{max}$

(ii) $\alpha = 90^\circ$ হলে $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$

(iii) $\alpha = 180^\circ$ হলে $R = P \sim Q = R_{min}$

(iv) $P = Q$ হলে $R = 2P\cos\dfrac{\alpha}{2}$ এবং $\tan\theta = \tan\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\alpha}{2}$

(v) $P = Q = R$ হলে $\alpha = 120^\circ$

(vi) $P = 2Q$ এবং লব্ধি লম্ব বরাবর ক্রিয়া করলে $\alpha = 120^\circ$

(vii) $P = Q$ এবং $\alpha = 90^\circ$ হলে $R = \sqrt{2}\,P$

(viii) দুটি সমান বল P এবং এদের লব্ধিরও P এর সমান হলে বল... মধ্যবর্তী কোণ 120° [For M.C...

(ix) দুটি অসমান বলের (P > Q) মধ্যবর্তী কোণ 120° এবং লব্ধি (R)... ছোট বলটির সাথে সমকোণ তৈরি করলে বড় বলটি ছোট বলটির দ্বি... (P = 2Q) [For M.C...

(x) দুটি সমান বলদ্বয়ের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের তিনগুণ হলে... বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° [For M.C...

(xi) দুইটি বলের লব্ধি বৃহত্তম বলটির সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, ক্ষুদ্র... বলটিকে দ্বিগুণ করায় আগের কোণটি অর্ধেক হলে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত... কোণ 120°। [For M.C...

(xii) P ও Q বলদ্বয় (P > Q) α কোণে ক্রিয়ারত। P কে যদি m দিয়ে... করা হয় এবং লব্ধি যদি m গুণ হয়, তাহলে $\cos\alpha = \dfrac{-(m+1)Q}{2m\ P}$ [For M.C.Q]

(xiii) দুইটি বলের লব্ধির দিক বলদ্বয়ের মান পরিবর্তন করার পর... অপরিবর্তিত থাকলে প্রাথমিক বলদ্বয়ের অনুপাত ও পরিবর্তিত বলদ্বয়ের... অনুপাত সমান হয় অর্থাৎ $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P'}{Q'}$ [For M.C...

(xiv) লব্ধি ক্ষুদ্রতম বলের (মনে করি Q) সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে P...

(1) দিক $= \tan\theta = \dfrac{Q\ (\text{অপর বল})}{P\ (\text{যে বলের দিকে})}$

(2) বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= \cos\alpha = -\dfrac{Q}{P} = -\dfrac{\text{ছোট বল}}{\text{বড় বল}}$ [P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ...

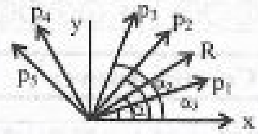
(3) লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 - Q^2}$ [For M.C...

(xiv) $R_{max}^2 + R_{min}^2 = 2R_p^2$, যেখানে R_p হল $\theta = 90^\circ$ এর জন্য লব্ধি... [For M.C...

যেখানে R_{max} লব্ধির বৃহত্তম মান ও R_{min} লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান।

➢ এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দু'টি সমান ও বিপরীতমুখী বল ভারসাম্য সৃষ্টি করে...
➢ একই রেখায় ক্রিয়ারত দু'টি বলের লব্ধি তাদের বীজগাণিতিক যোগফলের সমান...
➢ একই রেখায় বিপরীত দিকের ক্রিয়ারত দু'টি বলের লব্ধি তাদের বিয়োগফলের সমান...
➢ একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান বলের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণকে... সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

❑ **লম্বাংশের উপপাদ্য:** একই বিন্দুগামী কতিপয় বলের কোন একটি দিকে... লম্বাংশের বীজগাণিতীয় সমষ্টি একই দিকে তাদের লব্ধির লম্বাংশের সমান...



(i) $R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \text{-------} + P_n\cos\alpha_n$

(ii) $R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \text{-------} + P_n\sin\alpha_n$

বলের অংশক সূত্রের সাহায্যে সমতলীয় বল জোটের লব্ধি নির্ণয়:

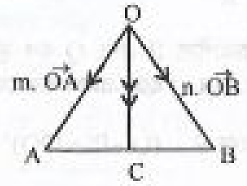
$R\cos\theta = P_1\cos\theta_1 + P_2\cos\theta_2 + \cdots + P_n\cos\theta_n = X$

$R\sin\theta = P_1\sin\theta_1 + P_2\sin\theta_2 + \cdots + P_n\sin\theta_n = Y$

$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2},\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$

অনুপাত সূত্র (m:n) উপপাদ্য:

(i) AC:BC = n:m হলে, $m.\overrightarrow{OA} + n.\overrightarrow{OB} = (m+n)\overrightarrow{OC}$



(ii) C, AB এর মধ্যবিন্দু হলে বা m = n = 1 হলে,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$ [∵ AB:BC = 1:1]

(iii) m = n হলে, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

A

A-এর গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ অন্তর্ভুক্ত করা যায়

Type-01 : বল সংক্রান্ত লব্ধি নির্ণয়

Ex-01 6N ও 8N মানের দু'টি বল-
(i) পরস্পর লম্ব দিকে,
(ii) পরস্পর বিপরীত দিকে,
(iii) একই রেখায় একই দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান কত?

Solⁿ: (i) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2 + 2\times6\times8\cos90°} = \sqrt{36+64+0} = 10\text{ N}$

(ii) বিপরীতে ক্রিয়া করলে $\alpha = 180°$ হলে $R = P - Q = 8 - 6 = 2N$

(iii) একই রেখায় ক্রিয়া করলে $\alpha = 0°$, $R = P + Q = 8 + 6 = 14N$

Ans.

Ex-02 কোন বিন্দুতে 3Q ও 5Q মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে তিনগুণ করলে এবং দ্বিতীয়টির মান 1 একক বৃদ্ধি করলেও লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে, Q এর মান কত?

Solⁿ: শর্তমতে, $\frac{3Q}{5Q} = \frac{3Q\times3}{5Q+1} \Rightarrow 15Q + 3 = 45Q$

$\Rightarrow 30Q = 3 \Rightarrow Q = \frac{1}{10}$ একক Ans.

For practice:

01. কোন বিন্দুতে 3Q ও 4Q মানের দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করলে এবং ২য় টির মান 4 একক বৃদ্ধি করলেও লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে, Q এর মান কত? Ans: 1 একক

Type-02 : লব্ধি নির্ণয়

Ex-01 কোন বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল ক্ষুদ্রতর বলের মান 3 এবং বৃহত্তর বলের মান 6, α = ? যখন লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।

Solⁿ: $\cos\alpha = -\frac{Q}{P} = -\frac{1}{2}\ \therefore \alpha = 120°$ Ans.

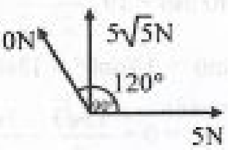
Ex-02 দুইটি বল সমকোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান 10 এবং লব্ধির সর্বোচ্চ মান 14 হলে, বল দুইটির লব্ধির ক্ষুদ্রতম মান কত?

Solⁿ: আমরা জানি, $R_{max}^2 + R_{min}^2 = 2R_p^2$

$\Rightarrow (14)^2 + (P \sim Q)^2 = 2(10)^2 \Rightarrow (P \sim Q)^2 = 4 \therefore P \sim Q = 2$ Ans.

Ex-03 কোন বিন্দুতে দুইটি বল 120° কোণে ক্রিয়াশীল। বৃহত্তর উপাংশে 10N এবং তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর উপাংশের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। ক্ষুদ্রতর উপাংশ ও লব্ধি নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\cos\alpha = -\frac{Q}{P} = -\frac{\text{ছোট বল}}{\text{বড় বল}}$



$\Rightarrow Q = -P\cos\alpha$

$\Rightarrow Q = -10\cos120° = 5$

$\therefore R = \sqrt{P^2 - Q^2}$

$\Rightarrow R = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}N$ Ans.

For practice:

01. সমবিন্দু P, Q, R, S বল চতুষ্টয় কোন বিন্দুতে ABCD আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বাহুগুলোর সমান্তরালে ক্রিয়া করে। দেখাও যে, এদের লব্ধির মান $= \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2PR - 2QS}$

Type-03 : লব্ধি দিক সংক্রান্ত

Ex-01 কোন বিন্দুতে একই সময়ে P ও 2P এককের বলদ্বয় 30° কোণে ক্রিয়ারত হলে লব্ধির দিক নির্ণয় কর।

Solⁿ: $\theta = \tan^{-1}\frac{2P\sin30°}{P + 2P\cos30°} = \tan^{-1}\frac{2\times P\times\frac{1}{2}}{P + 2P.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)$

$= 20.10°$ Ans.

For practice:

01. সমবিন্দু P ও Q বলের লব্ধি α ; nP ও nQ বলের লব্ধি $\frac{\alpha}{2}$; n^2P ও n^2Q বলের লব্ধি $\frac{\alpha}{4}$; এদের একই মানের লব্ধি সৃষ্টি হয়।
দেখাও যে, $\alpha = 4\cos^{-1}\left\{\frac{\sqrt{4n^2+9}-1}{4}\right\}$

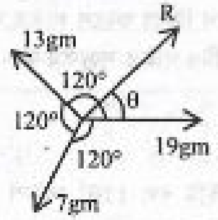
02. ΔABC-এর BC ও BA বরাবর যথাক্রমে sec C ও sec A মানের দুটি বল কার্যরত। দেখাও যে, লব্ধির মান tan C + tan A ও লব্ধি B হতে CA এর উপর লম্ব বরাবর কার্যরত।

03. ΔABC-এর ∠A=90°; এর AB ও AC বরাবর দুটি বল $\frac{K}{AB}$ এবং $\frac{K}{AC}$ কার্যরত। দেখাও যে,এদের লব্ধি A হতে BC-এর উপর অংকিত লম্ব AD বরাবর কার্যরত এবং এর মান $\frac{K}{AD}$।

সমাধানসহ কিছু গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যাবলী

Ex-01 7, 13, 19 গ্রাম ওজনের তিনটি বল একই ক্রমে পরস্পর 120° কোণে আনত। এদের লব্ধির দিক ও মান নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, লব্ধির মান R গ্রাম ওজন এবং কার্যরেখা 19 গ্রাম ওজনের কার্যরেখার সাথে θ কোণ গঠন করে।



$R\cos\theta = 19\cos0° + 13\cos120° + 7\cos240°$

$\therefore R\cos\theta = 19 - \frac{13}{2} - \frac{7}{2} = 9$ ------- (i)

$R\sin\theta = 19\sin\theta° + 13\sin120° + 7\sin240°$

$= 0 + \frac{13\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\therefore R = \sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}$

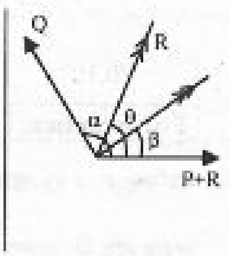
$= \sqrt{9^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = 30°$ **Ans.**

Ex-02 P ও Q এর লব্ধি R, P এর সাথে θ কোণে আনত। দেখাও যে, P এর কার্যরেখা বরাবর (P+R) মানের বল কাজ করলে, লব্ধি (P+R) এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণে আনত হবে।

Sol^n: ধরি, P – Q = α এদের লব্ধি R, যা P এর সাথে θ কোণে আনত,



$\therefore R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$ এবং $R\sin\theta = Q\sin\alpha$

ধরি, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে (P+R) এর সাথে লব্ধির নতি = β

$\therefore \tan\beta = \frac{Q\sin\alpha}{P + R + Q\cos\alpha}$

$= \frac{R\sin\theta}{R + R\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$\therefore \tan\beta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore \beta = \frac{\theta}{2}$ **(Showed)**

Ex-03 কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি R, Q ... দ্বিগুণ করলে নতুন লব্ধির দিক P বলের দিকের উপর লম্ব হয়। প্রমাণ ... Q = R

Sol^n: ধরি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর α কোণে আনত এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লব্ধি $\vec{F}$।

সুতরাং, $\vec{F} = \vec{P} + 2\vec{Q}$ এবং $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ ------- (i)

$\vec{F}.\vec{P} = \vec{P}.\vec{P} + 2.\vec{Q}.\vec{P}$

$\Rightarrow P^2 + 2QP\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow R^2 - Q^2 = 0$ [(i) নং থেকে]

$\Rightarrow Q^2 = R^2 \quad \therefore Q = R$ **(Proved)**

Ex-04 একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P এবং Q বল দুটির লব্ধি R, P এর ... বরাবর R এর লম্বাংশের মান Q হলে প্রমাণ কর যে, বল দুটির অন্তর্ভুক্ত ...

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$ এবং $R = (Q^2 - P^2 + 2PQ)^{1/2}$

যেখানে P < Q.

Sol^n: P এর দিকে R এর লম্বাংশ = Q

অর্থাৎ P এর দিকে P ও Q এর লম্বাংশের সমষ্টি = Q

$\therefore P + Q\cos\alpha = Q \Rightarrow \cos\alpha = \frac{Q-P}{Q}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$

এখন, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2P(Q-P)$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ - 2P^2$

$\Rightarrow R^2 = Q^2 - P^2 + 2PQ$

$\therefore R = \sqrt{Q^2 - P^2 + 2PQ}$ **(Proved)**

Ex-05 একই বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়াশীল P ও Q বল দুইটির লব্ধি ... অন্তর্ভুক্ত কোণ দ্বিগুণ হলে লব্ধি হয় S, দেখাও যে, $R^2 + S^2 = 2(P^2 + Q^2)$

Sol^n: $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos60°$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + PQ$ ------- (i)

আবার, $S^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos120°$

$\Rightarrow S^2 = P^2 + Q^2 - PQ$ ------- (ii)

(i) + (ii) ⇒

$R^2 + S^2 = 2(P^2 + Q^2)$ **(Showed)**

Ex-06 এক বিন্দুগামী দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণকে 30° কমিয়ে ... দুইটির লব্ধির পরিমান অপরিবর্তিত থাকে। দেখাও যে, বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}(2-\sqrt{3})$

Sol^n: মনে করি, বল দুটি P এবং Q, তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ α, বল দুটির লব্ধি ... হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ --------- (i)

অন্তর্ভুক্ত কোণ α–30° হলে লব্ধির মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\alpha - 30)$ ----------- (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\alpha - 30°)$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos(\alpha - 30°)$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\alpha\cos30° + \sin\alpha\sin30°$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\Rightarrow 2\cos\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$

$\Rightarrow \sin\alpha = (2-\sqrt{3})\cos\alpha \therefore \alpha = \tan^{-1}(2-\sqrt{3})$ **(Showed)**

কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বলের লব্ধির মান F ও G। প্রমাণ কর যে, বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ α হলে তাদের লব্ধির মান $\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ হবে।

Sol^n: মনে করি, বলদ্বয় P ও Q একক এবং P>Q তাহলে

$F = P+Q\ ;\ G = P-Q$

$\therefore P = \frac{1}{2}(F+G)\ \therefore Q = \frac{1}{2}(F-G)$

α কোণে ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের লব্ধি

$=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\{(F+G)^2+(F-G)^2\}+\frac{1}{2}(F^2-G^2)\cos\alpha}$

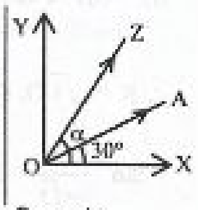
$=\sqrt{\frac{1}{2}(F^2+G^2)+\frac{1}{2}(F^2-G^2)\cos\alpha}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}F^2(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}G^2(1-\cos\alpha)}$

$=\sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ **(Proved)**

কোন বিন্দুতে নির্দিষ্ট কোণে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি $\sqrt{3}Q$ এবং তা P বলের দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, P = Q অথবা P = 2Q.

Sol^n: মনে করি, P ও Q বল দুটি যথাক্রমে OX এবং OZ বরাবর ক্রিয়া করে এবং তাদের লব্ধি $\sqrt{3}Q$, OA রেখা বরাবর ক্রিয়ারত। OY রেখাটি OX এর লম্ব আঁকা হল।



বল দুটি এবং তাদের লব্ধির, OX রেখা বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$\sqrt{3}\,Q\cos30° = P + Q\cos\alpha\ \therefore \frac{3}{2}Q = P + Q\cos\alpha$ ----------- (i)

OY বরাবর লম্বাংশ নিয়ে, $\sqrt{3}\,Q\sin30° = Q\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = 60°, 120°$

অতএব (i) থেকে $P + Q\cos\alpha = \frac{3}{2}Q$

$\alpha = 60°$ হলে, $P + Q\cos60° = \frac{3}{2}Q$

$\Rightarrow P = \frac{3}{2}Q - \frac{Q}{2}\ \therefore P = Q$

আবার, $\alpha = 120°$ হলে, $P + Q\cos120° = \frac{3}{2}Q$

$\Rightarrow P - \frac{Q}{2} = \frac{3}{2}Q \Rightarrow P = \frac{3}{2}Q + \frac{1}{2}Q$

$\therefore P = 2Q$ **(Showed)**

Ex-09 কোন বিন্দুতে P, Q বলের লব্ধি R, Q কে দ্বিগুণ করলে লব্ধি R ও দ্বিগুণ হয়। আবার Q কে বিপরীতমুখী করলেও লব্ধি R ও দ্বিগুণ হয়।

দেখাও যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

Sol^n: মনে করি, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ ------- (i)

আবার, Q কে দ্বিগুণ করলে লব্ধি দ্বিগুণ হয়,

$\therefore 4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha$ ------- (ii)

আবার, Q কে বিপরীতমুখী করলে লব্ধি দ্বিগুণ হয়,

$4R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\pi-\alpha)$

$\therefore 4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$ ------- (iii)

(i) ও (iii) নং হতে, $2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0$ ---------- (iv)

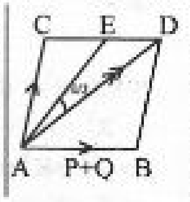
(ii) ও (iii) নং হতে, $P^2 + 2Q^2 - 4R^2 = 0$ ----------- (v)

বজ্রগুণন করে (iv) ও (v) নং হতে, $\frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$

$\therefore P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ **(Showed)**

Ex-10 P + Q এবং P − Q বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $P:Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$

Sol^n: মনে করি, P + Q এবং P − Q বলদ্বয়ের মান ও দিক যথাক্রমে ABDC সামান্তরিকের AB ও AC বাহুদ্বয় দ্বারা সূচিত হল। তাদের লব্ধি AD কর্ণ বরাবর ক্রিয়াশীল। মনে করি $\angle BAC = \alpha$ এবং α কোণের সমদ্বিখণ্ডক AE।



শর্তানুসারে লব্ধি AD রেখা AE এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}$

$\therefore \angle ADB = \angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = \alpha - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2}$

BAD ত্রিভুজ হতে, $\frac{AB}{\sin ADB} = \frac{BD}{\sin BAD}$

$\Rightarrow \frac{P+Q}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{P-Q}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\ \therefore P : Q = \tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\theta}{2}$ **(Proved)**

Ex-11 সমমানের দুটি বল কোন বিন্দুতে 2α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি উৎপন্ন হয় তা তারা 2β কোণে কোণে ক্রিয়ারত থাকলে যে লব্ধি হয় তার দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha = 2\cos\beta$

Sol^n: মনে করি, সমমানের বলদ্বয় P এবং P একক। 2α কোণে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের যে লব্ধি হয় তা 2β কোণে ক্রিয়ারত থাকা অবস্থায় যে লব্ধি হয় তার দ্বিগুণ।

$\therefore\ 2\sqrt{P^2+P^2+2P^2\cos 2\beta} = \sqrt{P^2+P^2+2P^2\cos 2\alpha}$

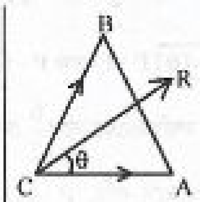
$\Rightarrow 4.2P^2(1+\cos 2\beta) = 2P^2(1+\cos 2\alpha)$

$\Rightarrow 4.2\cos^2\beta = 2\cos^2\alpha$

$\therefore \cos\alpha = 2\cos\beta$ **(Proved)**

Ex-12 ABC ত্রিভুজের CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুইটি বলের মান cosA ও cosB এর সমানুপাতিক, প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির মান sinC এর সমানুপাতিক এবং তার দিক C কোণকে $\frac{1}{2}$(C+B–A) এবং $\frac{1}{2}$(C+A–B) অংশে বিভক্ত করে।

Sol^n: মনে করি, ABC ত্রিভুজের CB ও CA বাহুদ্বয় বরাবর যথাক্রমে KcosA ও KcosB বলদ্বয় ক্রিয়ারত। তাদের অন্তর্গত কোণ C। মনে করি, লব্ধি R এবং তা CA এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



তাহলে, $R^2 = K^2(\cos^2A+\cos^2B+2\cos A\cos B\cos C)$

$\Rightarrow R^2 = K^2(1-\cos^2C)$ [ত্রিকোণমিতির সূত্র অনুসারে]

$\Rightarrow R^2 = K^2\sin^2C$

$\Rightarrow R = K\sin C$

$\therefore$ R $\propto$ sinC সুতরাং লব্ধি বল sinC এর সমানুপাতিক।

আবার, $\tan\theta = \dfrac{K\cos B\sin C}{K\cos A + K\cos B\cos C}$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\cos B\sin C}{-\cos(B+C)+\cos B\cos C}$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\cos B\sin C}{-\cos B\cos C+\sin B\sin C+\cos B\cos C}$

$\Rightarrow \tan\theta = \cot B$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{A+B+C-2B}{2}$

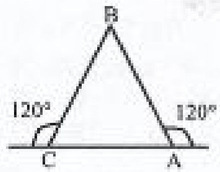
$\therefore \theta = \dfrac{C+A-B}{2}$

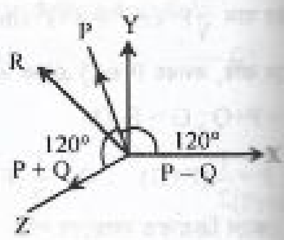
$\therefore$ C কোণের অপর অংশ $= C - \dfrac{C+A-B}{2} = \dfrac{C+B-A}{2}$

$\therefore$ লব্ধির মান sinC এর সমানুপাতিক এবং C কোণকে $\frac{1}{2}$(C+B–A) এবং $\frac{1}{2}$(C+A–B) অংশে বিভক্ত করে। **(Proved)**

Ex-13 কোন বিন্দুতে P–Q, P, P+Q মানের তিনটি বল একই ক্রমানুসারে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

Sol^n:





ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর P–Q, P এবং P+Q বলত্রয় O বিন্দুতে ক্রিয়ারত মনে করি, তাদের লব্ধি R এবং তা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের সমষ্টি নিয়ে,

$R\cos\theta = (P-Q)\cos 0° + P\cos 120° + (P+Q)\cos 240°$

$= P - Q - \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}(P+Q) = -\frac{3}{2}Q$

$\therefore R\cos\theta = -\frac{3}{2}Q$ --- (i)

OX এর সাথে লম্বিক দিক বরাবর বলগুলোর লম্বাংশের সমষ্টি নিয়ে,

$R\sin\theta = (P-Q)\sin 0° + P\sin 120° + (P+Q)\sin 240°$

$\therefore R\sin\theta = \dfrac{P\sqrt{3}}{2} - (P+Q)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-Q\sqrt{3}}{2}$ ----- (ii)

(i) ও (ii) নং হতে, $R^2 = \left(\dfrac{-3Q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-Q\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3Q^2$

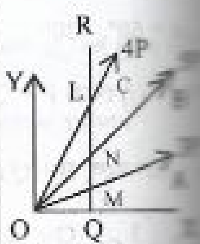
$\therefore R = \sqrt{3}\,Q,\ \theta = \tan^{-1}\left[\left(\dfrac{-Q\sqrt{3}}{2}\right)\div\left(\dfrac{-3Q}{2}\right)\right]$

$= \tan^{-1}\dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = 210°$

$\therefore \theta = 210°$ **Ans.**

Ex-14 4P এবং 3P বল দুইটি O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং 5P তাদের লব্ধি। কোন ছেদক তাদের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করলে তবে দেখাও যে, $\dfrac{4}{OL}+\dfrac{3}{OM}=\dfrac{5}{ON}$

Sol^n: মনে করি, O বিন্দুতে একই সমতলে OA ও OC বরাবর ক্রিয়ারত 3P ও 4P বলের লব্ধি 5P এবং তাদের ক্রিয়ারেখাসমূহ RQ ছেদককে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে। OX বরাবর 4P ও 3P এর লম্বাংশের যোগফল একই দিকে 5P এর লম্বাংশের সমান।



$4P\cos QOL + 3P\cos MOQ = 5P\cos NOQ$

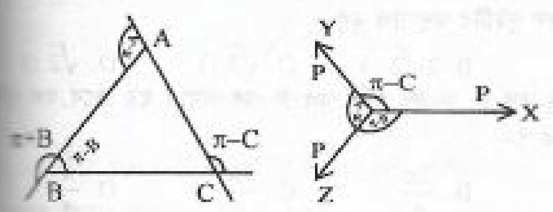
$\Rightarrow 4P\dfrac{OQ}{OL} + 3P\dfrac{OQ}{OM} = 5P\times\dfrac{OQ}{ON}$

$\therefore \dfrac{4}{OL}+\dfrac{3}{OM}=\dfrac{5}{ON}$ **(Showed)**

ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল দিকে P মানের তিনটি সমান বল কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে, প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধি

(i) $P\sqrt{3-2\cos A-2\cos B-2\cos C}$

(ii) $P\sqrt{1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$



মনে করি BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল যথাক্রমে OX, OY, OZ বরাবর সমান মানের P বল ক্রিয়ারত আছে এবং তাদের লব্ধি R বল OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

$R\cos\theta = P\cos0° + P\cos(\pi-C) + P\cos(\pi-B)$

$\therefore R\cos\theta = P(1-\cos C-\cos B)$ .... (i)

OX এর সাথে লম্বিক দিকে বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

$R\sin\theta = P\sin0 + P\sin(\pi-C) + P\sin(\pi+B)$

$\therefore R\sin\theta = P(\sin C-\sin B)$ .... (ii)

এখন $(i)^2+(ii)^2 \Rightarrow$

$\therefore R^2 = P^2[(1-\cos C-\cos B)^2+(\sin C-\sin B)^2]$

$\Rightarrow R^2 = P^2[1+\cos^2C+\cos^2B+\sin^2C+\sin^2B-2\cos C$
$-2\cos B+2(\cos B\cos C-\sin B\sin C)]$

$\Rightarrow R^2 = P^2[3-2\cos C-2\cos B+2\cos(B+C)]$

$\Rightarrow R^2 = P^2[3-2\cos C-2\cos B-2\cos A]$

$\therefore R = P\sqrt{3-2\cos A-2\cos B-2\cos C}$

উপরের প্রমাণের পর হতে, $R=P\sqrt{3-2\cos A-2\cos B-2\cos C}$

$=P\sqrt{3-2(\cos A+\cos B+\cos C)}$

$=P\sqrt{3-2\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)}$ [ত্রিকোণমিতির সূত্র মতে]

$=P\sqrt{1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$\therefore R=P\sqrt{1-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$ **(Proved)**

For practice:

01. P ও Q বল দুটির আনতি α ও লব্ধির মান R; একই রেখা বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P′ ও Q′ বল দুটির লব্ধি R′। R ∧ R′ = θ হলে দেখাও যে, $RR'\cos\theta = (PQ'+P'Q)\cos\alpha + PP' + QQ'$ এবং $RR'\sin\theta = |PQ'-P'Q|\sin\alpha$

02. সমবিন্দু P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ΔABC-এর শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর অংকিত লম্বত্রয়ের সমান্তরাল রেখা বরাবর ক্রিয়ারত। প্রমাণ কর যে,এদের লব্ধির মান $=\sqrt{P^2+Q^2+R^2-2QR\cos A-2RP\cos B-2PQ\cos C}$

03. P, 3P, √3P, 3√3P বলগুলো একই তলে ও একইক্রমে অবস্থিত OA, OB, OC এবং OD বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ∠AOB = 60°, ∠BOC = 90° এবং ∠COD = 120° হয়, তবে তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

Ans. 2P, ১ম বলের সাথে 60° কোণে

SELF TEST [Written]

01. কোন বিন্দুতে P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং P এর দিক বরাবর R এর লম্বাংশ Q হলে দেখাও যে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{P}{2Q}}\right)$

02. ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলো বরাবর তিনটি বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের মান স্ব স্ব ক্রিয়ারেখার বিপরীত কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক হলে দেখাও যে তাদের লব্ধি $\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক হবে।

03. α কোণে হেলানো OA এবং OB বরাবর ক্রিয়াশীল যথাক্রমে P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R বলটি OA এর দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। Q পরিবর্তিত হয় Q′ হলে তাদের লব্ধি R′ বলটি OA এর সাথে θ′ কোণ উৎপন্ন করে। α ≠ π হলে দেখাও যে, $\frac{R'}{R}=\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha-\theta')}$

04. OA এবং OB রেখা বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়াশীল P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি OA এর উপর লম্ব। ঐ একই রেখাদ্বয় বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়াশীল P′ ও Q′ বলদ্বয়ের লব্ধি OB এর উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, PP′ = QQ′.

05. ABCD রম্বসের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু E তে 3, 4, 9, 10 N এককের বলগুলো যথাক্রমে EA, EB, EC, ED বরাবর ক্রিয়া করে। লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর? **Ans.** $6\sqrt{2}$ N, AC এর সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

06. কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি তাদের একটির সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে ও অপরটির এক তৃতীয়াংশ হয়। দেখাও যে, বলদ্বয়ের মানের অনুপাত $3:2\sqrt{2}$।

07. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি P বলের দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে P বলটিকে দ্বিগুন করলে উক্ত কোণ 30° হয়। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। **Ans.** 120°

08. θ কোণে ক্রিয়ারত P, Q মানের বলদ্বয়ের লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$, উক্ত কোণটি (90°–θ) হলে লব্ধির মান $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হয়। প্রমাণ কর যে, $\tan\theta=\frac{m-1}{m+1}$

09. P+Q এবং P–Q বলদ্বয় 2α কোণে ক্রিয়াশীল এবং তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P\tan\theta = Q\tan\alpha$

SELF TEST [MCQ]

01. 100 কেজি ওজনের একটি বলকে পরস্পর $60°$ কোণে আনত দুইটি সমান অংশক বিশ্লেষণ করলে সমান বল দুইটি-

A. $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ কেজি ওজন B. $\frac{100}{3}$ কেজি ওজন

C. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ কেজি ওজন D. None

02. একই বিন্দুগামী 2, 4, 6 কেজি ওজনের তিনটি বল একে অন্যের সাথে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে লব্ধির পরিমাণ-

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

03. কোন বস্তু কণাতে ক্রিয়াশীল দুটি বল P, Q এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ অথবা $\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ হলে, তাদের লব্ধি উভয় ক্ষেত্রে একই হলে নিচের কোনটি সত্য-

A. $\tan\theta = \sqrt{3}-1$ B. $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}-1\right)$

C. $\tan\theta = \sqrt{2}$ D. $\tan\theta = 1-\sqrt{2}$

04. দুইটি বল সমকোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান 20 এবং এদের বৃহত্তম লব্ধির মান 28 হলে বল দুইটির মান-

A. 12 এবং 14 একক B. 12 এবং 16 একক

C. 13 এবং 16 একক D. 12 এবং 16.5 একক

05. দুইটি বলের লব্ধি 12N, যা ক্ষুদ্রতর বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব এবং এদের বৃহত্তম লব্ধি 18N বল দুইটি-

A. 5 এবং 13 একক B. 5 এবং 12 একক

C. 13 এবং 12 একক D. 5 এবং 16 একক

06. কোন বিন্দুতে দুটি বল এমনভাবে ক্রিয়ারত আছে যে তাদের একটিকে বিপরীতমুখী করলে লব্ধির দিক এক সমকোণে ঘুরে যায়। বলদ্বয়ের মান-

A. সমান B. অসমান

C. সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট D. None

07. দুটি বল P ও Q এর লব্ধি P এবং একই দিকে ক্রিয়াশীল 2P ও Q বলের লব্ধিও P এর সমান। তাহলে P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ হবে-

A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. None

08. P, Q বলদ্বয়ের লব্ধি R, যদি P কে S পরিমাণে বাড়ানো হলে নতুন লব্ধি, R এবং P এর মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে-

A. P = Q B. S = R C. P = S D. S = Q

09. P বলটি $45°$ এবং α কোণের 2টি উপাংশে বিভক্ত। α কোণে ক্রিয়ারত উপাংশের মান $\sqrt{\frac{2}{3}}P$ হলে α এর মান-

A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{13}$ D. $\frac{\pi}{15}$

10. দুটি বল $\frac{P}{Q}$ ও $\frac{Q}{P}$ N। তাদের সর্বোচ্চ লব্ধি 2N তাহলে-

A. P > Q B. P = Q C. P < Q D. $P = \sqrt{2Q}$

11. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P এবং Q মানের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $60°$ এবং এদের লব্ধির মান $\sqrt{7}Q$, তাহলে $\frac{P}{Q}$ অনুপাতের মান-

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. 2

12. m + n ও m − n ($m \neq n$) মানের দুটি বলের মধ্যবর্তী কোণের মান কত হলে তাদের লব্ধি $\sqrt{m^2+n^2}$ হবে?

A. $\cos^{-1}\left[-\frac{m^2+n^2}{2(m^2-n^2)}\right]$ B. $\cos^{-1}\left[-\frac{2(m^2+n^2)}{2m^2+4n^2}\right]$

C. $\frac{\pi}{2}$ D. None

13. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি R, Q ... দ্বিগুণ করলে নতুন লব্ধির দিক Q বলের উপর লম্ব হয়। তবে-

A. Q = R B. P = Q C. R = P D. P = Q...

14. দুইটি বলের মান সমান এবং বিপরীতমুখী হলে তাদের লব্ধির মান-

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

15. কোন অসমান বলের অন্তর্গত কোণ $135°$; যদি লব্ধি ক্ষুদ্রতর ... হয় তবে বল দুইটির অনুপাত হল-

A. 1:2 B. $2\sqrt{2}:3$ C. $\sqrt{2}:1$ D. $\sqrt{2}$...

16. দুটি সমান বল P, P-এর লব্ধি বল P এর সমান হয় তবে ... অন্তর্ভুক্ত কোণ-

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{3\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

17. 100 Kg ওজনের একটি বলকে পরস্পর $30°$ কোণে দুটি ... বলে বিশ্লেষণ করলে, অংশক বলদ্বয় যথাক্রমে-

A. $\frac{100}{3}$ B. $\frac{100}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{200}{\sqrt{3}}$ D. 100...

18. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুটি বলের লব্ধি তাদের ... এক তৃতীয়াংশ হলে তাদের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ-

A. $\cos^{-1}\frac{PQ-4(P^2+Q^2)}{9PQ}$ B. $\cos^{-1}\frac{PQ+4(P^2-Q^2)}{9PQ}$

C. $\cos^{-1}\frac{PQ-4(P^2-Q^2)}{9PQ}$ D. $\cos^{-1}\frac{PQ+4(P^2+Q^2)}{9PQ}$

19. ABCD বর্গক্ষেত্রের AB, AC, AD বরাবর যথাক্রমে 5, $3\sqrt{2}$ ... এককের তিনটি বল ক্রিয়াশীল হলে, তাদের লব্ধির মান ও দিক ...

A. 10 একক এবং $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ B. 8 একক এবং $\tan^{-1}\frac{2}{3}$

C. 8 একক এবং $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ D. 10 একক এবং $\tan^{-1}\frac{3}{4}$

20. এক বিন্দুগামী দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি যথাক্রমে ... কেজি ওজন। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $60°$ হলে লব্ধির মান কত?

A. 49 B. 7 C. 5 D. 3

21. P একক একটি বল 5 একক একটি বলের সাথে 11 একক ... সৃষ্টি করে। 5 একক বলের পরিবর্তে তার বিপরীত দিকে ... কাজ করলে লব্ধির মান 9 একক, P এর মান কত?

A. $\frac{4}{3}\sqrt{39}$ B. $\frac{3}{4}\sqrt{39}$ C. $\frac{4}{3}\sqrt{13}$ D. $\frac{3}{4}\sqrt{...}$

D. 4 kg ওজন, চতুর্থ বলের সাথে $60°$ কোণে

OMR

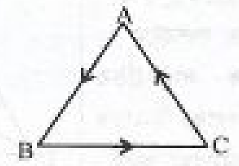
01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ ...
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ ...
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ ...
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ ...
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19. Ⓐ ...
06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20. Ⓐ ...
07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21. Ⓐ ...

Correct Answer

21.A	20.B	19.D	18.A	17.B	16.C
14.C	13.A	12.A	11.D	10.B	09.A
07.C	06.A	05.A	04.B	03.B	02.B

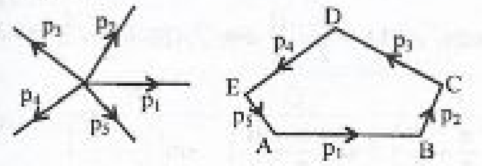
B

...সংযোজনের ত্রিভুজ সূত্রঃ কোন একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল কোন ...ভুজের তিনটি বাহু দ্বারা দিকে, মানে ও একইক্রমে সূচিত হইলে, ইহারা ...াবস্থায় থাকিবে।



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

...লের বহুভুজ সূত্রঃ
...ন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল কিছু সংখ্যক বলকে যদি বহুভুজের ...গুলো দ্বারা দিকে মানে এবং একই ক্রমে প্রকাশ করা যায়, তবে এরা ...াম্যাবস্থায় থাকবে।



...নুযায়ী $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_4}, \overrightarrow{P_5}$ বলগুলোকে ABCDE পঞ্চভুজের $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{EA}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। তাহলে বহুভুজ ...ত্রানুযায়ী

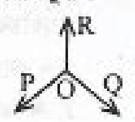
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = 0$

$\therefore \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{P_4} + \overrightarrow{P_5} = 0$

...লের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্রঃ কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল ...াম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে তাদের মান ও দিক একই ক্রমে গৃহীত কোন ত্রিভুজের ...তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যাবে।

...বিশেষ সূত্রঃ একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে ...তাহলে যে কোন দুইটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলটির সমান এবং বিপরীতমুখী।

...লামী'র উপপাদ্যঃ কোন বিন্দুতে কার্যরত তিনটি ...একতলীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে, ইহাদের প্রত্যেকটি ...বল অপর দুইটি বলের ক্রিয়া রেখার মধ্যবর্তী কোণের ...সাইনের সমানুপাতিক হবে।



Note: (i) বলত্রয় সমান হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ 120°. (ii) তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদের যে কোন দুটির লব্ধি, অন্যটির সমান হয়। (iii) বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকলে বলগুলোর লব্ধি শূন্য হয়।

ব্যাখ্যাঃ যদি O বিন্দুতে ক্রিয়ারত OA, OB, OC বরাবর P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকে। যেখানে α, β, γ যথাক্রমে Q ও R, P ও R এবং P ও Q বলের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ। তাহলে লামী'র সূত্র কে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায়। $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$

যেকোন তিনটি বল একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত থেকে যদি সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে তবে যেকোন বল অপর দুটি বলের লব্ধির মানের সমান হবে। যেমনঃ উপরের চিত্রে P, Q, R তিনটি বল একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত থেকে সাম্যাবস্থায় আছে। তাহলে P বলকে Q ও R বলের লব্ধির মানের সমান বলা যাবে।
অর্থাৎ $P^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos\alpha$। অনুরূপভাবে Q বলকে P ও R এবং R বলকে P ও Q বলের লব্ধির মানের সমান বলা যাবে।

B-এর গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ অন্তর্ভুক্ত করা যায়

Type-01 : লামীর উপপাদ্য সংক্রান্ত

Ex-01 কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করে। তাদের প্রথমটি ও দ্বিতীয়টির মধ্যকার কোণ 90° এবং দ্বিতীয়টি ও তৃতীয়টি মধ্যকার কোণ 120° হলে বলগুলোর অনুপাত কত।

Solⁿ: $\frac{P}{\sin 120°} = \frac{Q}{\sin(360-210°)} = \frac{R}{\sin 90}$

$\Rightarrow \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{1}$ $\quad \therefore P : Q : R = \sqrt{3} : 1 : 2$ **Ans.**

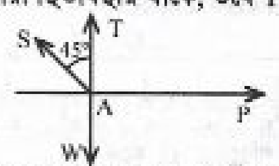
For practice:

01. P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়ারত। O, ΔABC-এর ভারকেন্দ্র। বলগুলি স্থিতাবস্থায় থাকলে দেখাও যে,
$\frac{P^2}{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{Q^2}{2(c^2+a^2)-b^2} = \frac{R^2}{2(a^2+b^2)-c^2}$

02. মসৃণ AB ও AC তলদ্বয় অনুভূমিক তলের সঙ্গে যথাক্রমে α ও β কোণে আনত। A বিন্দুর খাড়া উপরে মসৃণ ক্ষুদ্র পুলি D-এর উপর দিয়ে একটি দড়ি AB ও AC সমতলের উপরিস্থিত যথাক্রমে W ও 2W ওজন দুটির সঙ্গে বাঁধা আছে। দড়ি দুটির অংশ AB ও AC-এর সঙ্গে যথাক্রমে β ও α কোণে নত আছে। প্রমাণ কর যে, sin 2α = 2 sin 2β.

Type-02 : বলের লম্বাংশ উপপাদ্য ও ত্রিভুজ সূত্র সংক্রান্ত

Ex-01 যদি A বিন্দুতে একটি কণা নিম্নের চিত্রানুযায়ী কার্যরত T, S, P ও W পরিমাণ বল দ্বারা স্থিতাবস্থায় থাকে, তবে T = ?



Solⁿ: যেহেতু একই বিন্দুতে বলগুলো কার্যরত সেহেতু লম্বাংশ উপপাদ্য প্রয়োগ করা যায়।
এখন P বলের দিকের সাথে লম্বাংশ নিয়ে বলের অংশক সূত্র প্রয়োগ করে পাই,
$P\cos0° + T\cos90° + S\cos(90° + 45°) + W\cos270° = 0$
$\Rightarrow P - \frac{S}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow P = \frac{S}{\sqrt{2}}$ ------- (i)
এখন P বলের লম্ব দিকের সাথে লম্বাংশ নিয়ে পাই,
$P\sin0° + T\sin90° + S\sin(90° + 45°) + W\sin270° = 0$
$\Rightarrow T + S\frac{1}{\sqrt{2}} - W = 0 \Rightarrow T + P - W = 0$ [$\because P = \frac{S}{\sqrt{2}}$]
$\therefore T = W - P$ **Ans.**

Ex-02 কোন বিন্দুতে P, Q, R মানের তিনটি বলের মান একই ক্রমে গৃহিত ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত হলে লব্ধি কত?

Solⁿ: বলের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী, বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে বলে লব্ধি R = 0. **Ans.**

Ex-03 $\sqrt{3}$N, 2N এবং 1N তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থায় আছে। প্রথম দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ কত?

Solⁿ: যেহেতু সমবিন্দুগামী তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে সুতরাং যেকোন একটি বল অপর দুইটি বলের লব্ধির মানের সমান হয়।
$\therefore \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2\times\sqrt{3}\times2\cos\theta} = 1 \Rightarrow 3 + 4 + 4\sqrt{3}\cos\theta = 1$
$\Rightarrow 4\sqrt{3}\cos\theta = -6 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 150°$ **Ans.**

Ex-04 কোন বিন্দুতে $60°$ কোণে ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9 N বলের সাহায্যে ভারসাম্য রাখা হয়েছে। সমান বলদ্বয় নির্ণয় কর।

Sol^n: $P = Q$ হলে, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

প্রশ্নমতে, $9 = 2P\cos\frac{60°}{2} \Rightarrow 9 = 2P\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow P = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ **Ans.**

For practice:

01. সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়ারেখা ΔABC-এর BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল। বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4, 5 ইঞ্চি। প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের সমষ্টি 42 পা. ও.। বলগুলোর মান নির্ণয় কর।
Ans: 18 পাউন্ড-ওজন, 24 পাউন্ড-ওজন, 30 পাউন্ড-ওজন

02. O, ΔABC-এর পরিকেন্দ্র। A, B, C শীর্ষসমূহ হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের পাদবিন্দুসমূহ যথাক্রমে D, E ও F। OA, OB, OC বরাবর কার্যরত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে দেখাও যে,
$P : Q : R = EF : FD : DE$

সমাধানসহ কিছু গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যাবলি

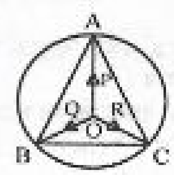
Ex-01 ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে OA, OB, OC বরাবর P, Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$

(ii) $\frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{R}{c\cos C}$

(iii) $\frac{P}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}} = \frac{Q}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}} = \frac{R}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}}$

Sol^n: ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে OA, OB, OC বরাবর যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি বল ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্যে আছে। তাহলে লামীর সূত্রানুসারে,



$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ .... (i)

[যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ = $2\times$ পরিধিস্থ কোণ]

$\Rightarrow \frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$

$\Rightarrow \frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{R}{c\cos C}$ ...... (ii)

$\Rightarrow \frac{P}{a\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{Q}{b\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)} = \frac{R}{c\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$

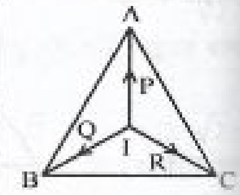
$\therefore \frac{P}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}} = \frac{Q}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}} = \frac{R}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}}$ .....(iii)

(Proved)

Ex-02 ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I হতে IA, IB, IC বরাবর যথাক্রমে ... Q, R বল তিনটি ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। প্রমাণ কর ...

$P:Q:R = \cos\frac{1}{2}A : \cos\frac{1}{2}B : \cos\frac{1}{2}C$

Sol^n: ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I হলে IA, IB, IC রেখাত্রয় যথাক্রমে A, B, C কোণত্রয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। সুতরাং লামির সূত্রানুসারে,



$\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin CIA} = \frac{R}{\sin AIB}$

$\therefore \angle BIC = \pi - \left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$

অনুরূপভাবে, $\angle CIA = \frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}$ এবং $\angle AIB = \frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}$

$\therefore \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)}$

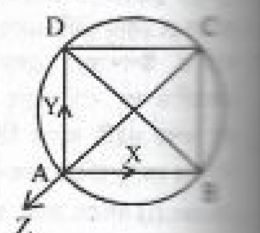
$\Rightarrow \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

$\therefore P:Q:R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

(Proved)

Ex-03 ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB, AD বরাবর যথাক্রমে X, Y ... ক্রিয়ারত আছে। C হতে A দিকে CA বরাবর ক্রিয়ারত Z ... তদের সমতা রক্ষা করা হলে, দেখাও যে, $\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$

Sol^n: ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও AD বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু A। AB, AD, CA বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়ারত X, Y, Z বলত্রয় ভারসাম্যে আছে। তাহলে লামীর সূত্রানুসারে,



$\frac{X}{\sin(\pi - DAC)} = \frac{Y}{\sin(\pi - BAC)} = \frac{Z}{\sin BAD}$

$\Rightarrow \frac{X}{\sin DAC} = \frac{Y}{\sin BAC} = \frac{Z}{\sin BAD}$

$\Rightarrow \frac{X}{\sin DBC} = \frac{Y}{\sin BDC} = \frac{Z}{\sin BCD}$ ...... (i) [বৃত্তের একই ... অবস্থিত কোণগুলো পর...]

ΔBCD হতে, $\frac{BD}{\sin BCD} = \frac{BC}{\sin BDC} = \frac{CD}{\sin DBC}$ .... (ii)

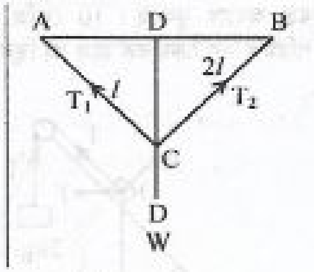
(i) ও (ii) নং হতে,

$\therefore \frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$

(Shown)

$2l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AB অনুভূমিক সরলরেখার A ও B প্রান্তে l ও $2l$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি প্রান্তদ্বয় আবদ্ধ আছে। তাদের অপর প্রান্তদ্বয় গিট দিয়ে C বিন্দুতে বেধে W ওজনের বস্তু বহন করে। সুতাদ্বয়ের টান নির্ণয় কর।

মনে করি, সুতাদ্বয়ের টান T_1 ও T_2 এবং C বিন্দুগামী খাড়া রেখা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। T_1, T_2, W বলত্রয় ভারসাম্যে আছে, তাই লামির সূত্রানুসারে,



$$\frac{T_1}{\sin(\pi - BCD)} = \frac{T_2}{\sin(\pi - ACD)} = \frac{W}{\sin ACB}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin BCD} = \frac{T_2}{\sin ACD} = \frac{W}{\sin ACB}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos CBD} = \frac{T_2}{\cos CAD} = \frac{W}{\sin ACB} \text{ ------- (i)}$$

AB ও CD পরস্পর লম্ব হওয়ায় $\cos CBD = \sin BCD$

$\cos CAD = \sin ACD$

$$\cos CBD = \cos CBA = \frac{4l^2 + 4l^2 - l^2}{2.2l.2l} = \frac{7}{8}$$

$$\therefore \cos CAB = \frac{4l^2 + l^2 - 4l^2}{2.2l.l} = \frac{1}{4}$$

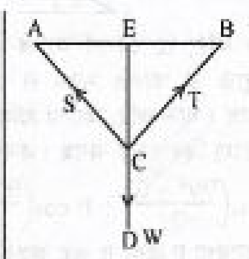
$$\therefore \cos ACB = \frac{4l^2 + l^2 - 4l^2}{2.2l.l} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin ACB = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(i) নং হতে, $\frac{T_1}{\frac{7}{8}} = \frac{T_2}{\frac{1}{4}} = \frac{W}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$ $\therefore T_1 = \frac{7W}{2\sqrt{15}}$; $T_2 = \frac{W}{\sqrt{15}}$ **Ans.**

Ex-05 ACB সুতাটির দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় A ও B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির C বিন্দুতে W ওজনের একটি বস্তুকে গিট দিয়ে বাঁধা হয়েছে। ABC ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং তার ক্ষেত্রফল Δ হলে দেখাও যে CA অংশের টান $\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2+a^2-b^2)$

মনে করি, রশির অংশদ্বয় CA ও CB এর টান যথাক্রমে S ও T, W এর উল্লম্ব কার্যরেখা CD, AB কে বহিঃস্থভাবে E বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে। যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে, লামির সূত্রানুসারে, $\frac{S}{\sin BCD} = \frac{W}{\sin ACB}$



$$\Rightarrow S = \frac{W}{\sin C}\sin BCE \Rightarrow S = \frac{W}{\sin C}\cos CBA$$

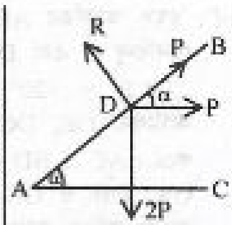
$$\Rightarrow S = \frac{W}{\sin C}\cos B$$

$$\Rightarrow S = \frac{W}{\frac{2\Delta}{ab}}.\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\therefore S = \frac{Wb(c^2 + a^2 - b^2)}{4c\Delta} \textbf{ (Showed)}$$

Ex-06 কোন হেলানো তলের উপর 2P ওজনের একটি বস্তুকে ভূমিতলের সমান্তরাল P এবং ঐ তলের সমান্তরাল P বলের সাহায্যে স্থিরাবস্থায় রাখা হয়েছে। দেখাও যে, তলের উপর ক্রিয়ারত চাপের পরিমাণ 2P।

Sol^n: মনে করি, অনুভূমিকের সাথে α কোণে হেলানো AB তলের বিন্দুতে স্থাপিত 2P ওজনের একটি বস্তুকে ভূমির সমান্তরালে P এবং ঐ তলের সমান্তরাল P বলের সাহায্যে স্থিরাবস্থায় রাখা হয়েছে। বস্তু কর্তৃক তলের উপর ক্রিয়ারত চাপ মনে করি R যা তলের সাথে লম্বিক দিকে ক্রিয়াশীল।



D বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 2P, P, P এবং R বল ভারসাম্য সৃষ্টি করে অর্থাৎ তাদের লব্ধি শূন্য। সুতরাং যে কোন দিকে তাদের লম্বাংশের বীজগাণিতিক যোগফল একই দিকে লব্ধির লম্বাংশের সমান। অনুভূমিক দিকে বিভাজিত করে,

$P\cos0° + P\cos\alpha + R\cos(90+\alpha) + 2P\cos270° = 0$

$\Rightarrow P(1+\cos\alpha) = R\sin\alpha$ ------ (i)

আবার উর্ধ্বমুখী উল্লম্ব দিকে বিভাজিত করে,

$P\sin0° + P\sin\alpha + R\sin(90+\alpha) + 2P\sin270° = 0$

$\therefore P\sin\alpha + R\cos\alpha - 2P = 0$

$\therefore P(2-\sin\alpha) = R\cos\alpha$ -------- (ii)

(i) ও (ii) নং হতে, $\frac{1+\cos\alpha}{2-\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \cos\alpha + \cos^2\alpha = 2\sin\alpha - \sin^2\alpha$

$\Rightarrow 1 + \cos\alpha = 2\sin\alpha$ -------- (iii)

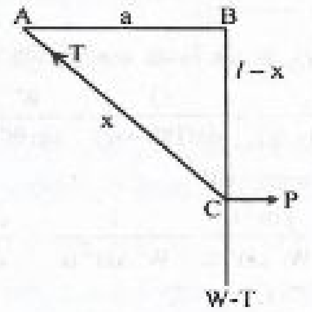
(i) ও (iii) নং হতে পাই, $P \times 2\sin\alpha = R\sin\alpha$ $\therefore R = 2P$ **(Showed)**

Ex-07 একই অনুভূমিক রেখার a দূরত্বে অবস্থিত A ও B বিন্দুতে l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি মসৃণ ও অপ্রসারী রশির দুই প্রান্তে বাধা আছে। W ওজনের একটি আংটা গড়িয়ে যখন B বিন্দুর ঠিক খাড়া নিচে অবস্থান করে তখন তাকে অনুভূমিক P বলের সাহায্যে স্থির অবস্থায় রাখা হয়। প্রমাণ কর যে, $P = \frac{aW}{l}$; সুতার টান $= \frac{W(a^2 + l^2)}{2l^2}$

Sol^n: মনে করি, রশির টান = T, AC = x। তাহলে BC = l − x। যেহেতু CB বরাবর T এবং BC বরাবর W বল ক্রিয়াশীল সুতরাং BC বরাবর লব্ধি বল (W − T) ক্রিয়াশীল। [এখানে W >T]

এখন $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + (l - x)^2 = a^2 + l^2 - 2lx + x^2$

$$\Rightarrow 2lx = a^2 + l^2 \therefore AC = x = \frac{a^2 + l^2}{2l}$$



সুতরাং ΔABC-এ বল ত্রিভুজের বিপরীত সূত্রানুসারে, $\frac{P}{AB} = \frac{T}{AC} = \frac{W - T}{BC}$

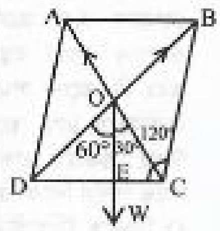
$$= \frac{W - T + T}{AC + BC} = \frac{W}{AC + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{T}{\frac{a^2 + l^2}{2l}} = \frac{W}{l}$$

$$\therefore p = \frac{aW}{l} \text{ এবং } T = \frac{W(a^2 + l^2)}{2l^2}$$ **(proved)**

Ex-08 রম্বসাকৃতি একটি সুষম পাতের একটি ধার ভূমিতলের সমান্তরাল ও একটি কোন $120°$, রম্বসটির কেন্দ্র হতে কর্ণ বরাবর P ও Q বলদ্বয় ক্রিয়ারত থেকে তাকে খাড়াভাবে রেখেছে, $P>Q$ হলে দেখাও যে, $P^2 = 3Q^2$.

Solⁿ: রম্বস আকৃতির ABCD পাতের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O এবং DC ধার অনুভূমিক যেন $\angle DCB = 120°$। এর ওজনের উল্লম্ব কার্যরেখা OE, DC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। $AC \perp BD$ এবং $\angle COE = 30°$। OA, OB ও OE রেখা বরাবর কার্যরত বলত্রয় সুস্থিত আছে, OA ও OB বরাবর কার্যকরত বলদ্বয়ের অনুপাত $\sin\angle BOE : \sin\angle AOE$



$= \sin(90°+30°) : \sin(90°-60°)$

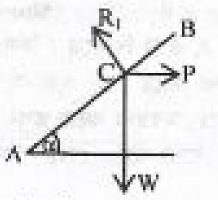
$= \cos30° : \cos60° = \sqrt{3} : 1$

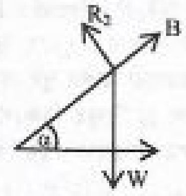
$\because P>Q \therefore P:Q = \sqrt{3} : 1$

$\therefore P^2 = 3Q^2$ **(Showed)**

Ex-09 একটি হেলানো সমতলের ভূমি ও দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে যথাক্রমে ক্রিয়াশীল দুটি পৃথক বল P ও Q এর প্রত্যেকে এককভাবে W ওজনের কোন বস্তুকে সমতলের উপর স্থির অবস্থায় ধরে রাখে। প্রমাণ কর যে, $W = \dfrac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$

Solⁿ:





প্রথম চিত্রে α কোণে হেলানো তল AB এর উপর C বিন্দুতে W ওজনের বস্তুকে ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত P বল স্থির অবস্থায় রাখে। হেলানো তলটির উপর বস্তুটির চাপ R_1 ধরা হলে R_1, P, W বলত্রয় ভারসাম্য সৃষ্টি করে। লামীর সূত্র অনুসারে,

$$\frac{R_1}{\sin 90} = \frac{P}{\sin(180-\alpha)} = \frac{W}{\sin(90°+\alpha)}$$

$\therefore P = \dfrac{W\sin\alpha}{\cos\alpha}$ -------- (i)

দ্বিতীয় চিত্রে R_2, Q, W বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করবে তাই লামীর সূত্র অনুসারে, $\dfrac{R_2}{\sin(90-\alpha)} = \dfrac{Q}{\sin(180-\alpha)} = \dfrac{W}{\sin 90}$

$\therefore Q = W\sin\alpha$ -------- (ii)

$$\therefore \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{\cos^2\alpha}{W^2\sin^2\alpha} - \frac{1}{W^2\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - 1}{W^2\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = -\frac{1}{W^2}$$

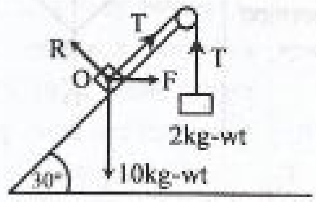
$$\Rightarrow \frac{1}{W^2} = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W^2} = \frac{P^2 - Q^2}{P^2Q^2}$$

$\therefore W = \dfrac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$ **(Proved)**

Ex-10 ভূমিতলের সাথে $30°$ কোণে হেলানো একটি তলের উপর ... কেজি ভরের একটি বস্তুকে ঐ তলের শীর্ষস্থ মসৃণ কপিকলের উপর ... একটি সুতার একপ্রান্তে বাধা হয়েছে, সুতাটির অপর প্রান্তে 2 কেজি ... বস্তু অবাধে ঝুলছে। 10 কেজি ভরের উপর ভূমিতলের সমান্তরালে ... পরিমাণ বল ক্রিয়ারত হলে তা স্থিরাবস্থায় থাকবে।

Solⁿ:



মনে করি, F মানের অনুভূমিক বলের দ্বারা 10kg.wt ওজনের বস্তুটি স্থির ... ধরি, সুতার টান T, তলের প্রতিক্রিয়া R (হেলানো তলের অভিলম্ব ... ক্রিয়াশীল)।

সুতরাং অবাধে ঝুলন্ত 2kg-wt ওজনের বস্তুর জন্য সুতার টান, T = 2kg-wt

আবার, O বিন্দুতে চারটি বল (F, T, R, 10 kg-wt) সাম্যাবস্থায় আছে।

সুতরাং আনত তলের উপরের দিক বরাবর এই চারটি বলের উপাংশ নিয়ে পাই, $R\cos90° + T + F\cos30° + 10\cos(90° + 30) = 0$

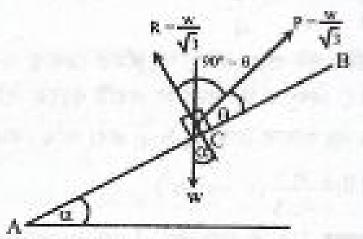
$$\Rightarrow 0 + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}F - 10\sin30° = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}F = 10 \times \frac{1}{2} - 2 = 3$$

$\therefore F = 2\sqrt{3}$ kg-wt

Ex-11 একটি মসৃণ হেলানো তলের উপর W ওজনের একটি বস্তুকে তলের ... আনত P বলের সাহায্যে স্থিতাবস্থায় রাখা হয় এবং তলে তা R ... করে। $P = R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}W$ হলে P এর দিক নির্ণয় কর।

Solⁿ:



মনে করি, α কোণে আনত AB তলের উপর W ওজনের বস্তুটি ... বিন্দুতে ঐ তলের সাথে θ কোণে আনত P বলের সাহায্যে স্থিরাবস্থায় রয়েছে। মনে করি, তলের প্রতিক্রিয়া R। তাহলে বস্তুটি P, W, R বলত্রয়ের সাহায্যে স্থিরাবস্থায় আছে। এখন W বরাবর বলত্রয়ের উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos\left(\dfrac{90°-\theta}{2}\right) + P\cos\left(\dfrac{90°-\theta}{2}\right) - W = 0$ [$\because R = P$ ... ক্রিয়ারেখা P এবং R এর অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

$$\Rightarrow \frac{W}{\sqrt{3}}\cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right) + \frac{W}{\sqrt{3}}\cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right) = W$$

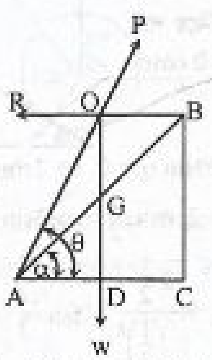
$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(45° - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos30°$$

$$\Rightarrow 45° - \frac{\theta}{2} = 30° \therefore \theta = 30°$$

$\therefore$ P বলের দিক তলের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে।

Ex-12 W ওজনের একটি সমরূপ দণ্ড AB, A বিন্দুতে স্থাপিত একটি কব্জার দিকে অবাধে ঘুরতে পারে। এর অপর প্রান্ত একটি উলম্ব মসৃণ দেওয়ালের সংস্পর্শে আছে। ভূমির সাথে দণ্ডটি α কোণে আনত হলে, দেখাও যে কব্জার প্রতিক্রিয়ার মান $W\sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\alpha}$ এবং এর দিক নির্ণয় কর।



সমরূপ দণ্ড AB-এর A প্রান্ত কব্জার সাথে আটকানো এবং B প্রান্ত মসৃণ দেওয়ালে স্পর্শ করে আছে। B বিন্দুতে দেওয়ালের প্রতিক্রিয়ার কার্যরেখা এবং AB-এর মধ্যবিন্দু G গামী ওজনের উলম্ব কার্যরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। দণ্ডটি স্থির বলে কব্জার প্রতিক্রিয়া O গামী। OG-এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব আঁকি যা C বিন্দুগামী। ΔAOD-এ বল ত্রিভুজের বিপরীত সূত্রানুসারে

$$\frac{P}{OA}=\frac{W}{OD}\Rightarrow P=\sqrt{\frac{OA^2}{OD^2}}W\Rightarrow P=\sqrt{\frac{OD^2+AD^2}{OD^2}}W$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{AD}{OD}\right)^2}W=\sqrt{1+\left(\frac{\frac{1}{2}AC}{BC}\right)^2}W=\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{AC}{BC}\right)^2}W$$

$$\therefore P=W\sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\alpha}$$ **(Showed)**

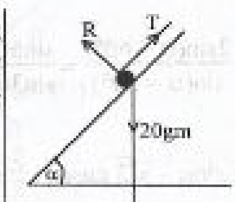
আবার $\tan\theta=\frac{OD}{AD}=\frac{BC}{\frac{1}{2}AC}=2\left(\frac{BC}{AC}\right)$

$\Rightarrow \tan\theta=2\tan\alpha \quad \therefore \theta=\tan^{-1}(2\tan\alpha)$

সুতরাং কব্জাটির প্রতিক্রিয়ার দিক ভূমির সাথে $\tan^{-1}(2\tan\alpha)$ কোণ উৎপন্ন করে। **Ans.**

Ex-13 ভূমির সাথে আনত একটি মসৃণ তলের উপর 20gm ভরের একটি বস্তুকে তল বরাবর একটি রশির সাহায্যে বেঁধে সুস্থির রাখা হয়েছে। রশিটি সর্বোচ্চ $10\sqrt{3}$gm ওজন সহ্য করতে পারে। তলের আনতি কত হলে রশিটি ছিড়ে যাবে।

Solⁿ: ধরি, তলের আনতি α রশির টান T এবং তলের প্রতিক্রিয়া R। যেহেতু বলত্রয় সুস্থিত আছে সেহেতু লামীর উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{20}{\sin 90}=\frac{T}{\sin(\pi-\alpha)}$



$\therefore T=20\sin\alpha$

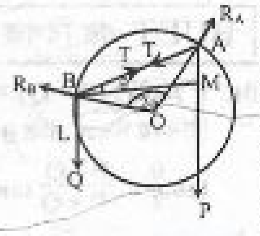
রশি $10\sqrt{3}$ gm ওজন সহ্য করতে পারে। টান $10\sqrt{3}$ gm ওজনের সামান্য বেশি হলে রশিটি ছিড়ে যাবে।

অর্থাৎ যদি 20sinα গ্রাম ওজন, $10\sqrt{3}$ গ্রাম ওজন অপেক্ষা সামান্য বেশি হয় অর্থাৎ যদি sinα, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ অপেক্ষা সামান্য বেশি হয় অর্থাৎ যদি α, 60° অপেক্ষা সামান্য বেশি হয়। **Ans.**

Ex-14 P ও Q ওজনের দুটি আংটি একটি খাড়া মসৃণ বৃত্তাকার তারের উপরের অংশে ওজনহীন একটি সুতার দুই প্রান্তে বাধা আছে। সুতার টান অবস্থায় এর দৈর্ঘ্য কেন্দ্রে 2φ কোণ তৈরি করে। অনুভূমিকের সাথে সুতা θ কোণ তৈরি করলে দেখাও যে, $\tan\theta=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\varphi$

Solⁿ:

ধরি, বৃত্তকার তলের কেন্দ্র O। বৃত্তের উপর P ও Q ওজনের আংটিদ্বয় যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে AB সুতা দ্বারা সুস্থিত রাখা হয়েছে। ধরি A ও B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R_A ও R_B। এদের কার্যরেখা O বিন্দুগামী। তারটি মসৃণ। BA অনুভূমিক রেখার সাথে θ কোন উৎপন্ন করে।



দেওয়া আছে, ∠AOB = 2ϕ

ধরি সুতার টান = T। এখন ∠OAB

$=\angle OAB=\frac{180°-2\phi}{2}=90°-\varphi$

আবার, ∠ABL = 90° + θ, ∠OBL

$=(90°+\theta)-(90°-\phi)=\theta+\phi$

B বিন্দুতে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। সুতরাং লামির উপপাদ্য হতে,

$$\frac{Q}{\sin(90°+\phi)}=\frac{T}{\sin(180°-\theta-\phi)}$$

$$\therefore T=\frac{Q\sin(\theta+\phi)}{\cos\phi}$$

অনুরূপভাবে A বিন্দু হতে লামির উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$$T=\frac{P\sin(\phi-\theta)}{\cos\phi}$$

$$\therefore \frac{Q\sin(\theta+\phi)}{\cos\phi}=\frac{P\sin(\phi-\theta)}{\cos\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\phi-\theta)}=\frac{P}{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{P-Q}{P+Q}=\frac{\sin(\theta+\phi)-\sin(\phi-\theta)}{\sin(\theta+\phi)+\sin(\phi-\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{P-Q}{P+Q}=\frac{2\sin\theta\cos\phi}{2\sin\phi\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan\phi}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\phi$$ **(Showed)**

For practice:

01. একটি দন্ডের ভারকেন্দ্র একে a : b অনুপাতে বিভক্ত করে। দণ্ডটি মসৃণ গোলকের ভিতর অবস্থিত এবং কেন্দ্রে 2φ কোণ উৎপন্ন করে। অনুভূমিকের সাথে দণ্ডটি আনতি θ হলে, দেখাও যে, $\tan\theta=\frac{a-b}{a+b}\tan\varphi$ যেখানে a > b

02. AD অনুভূমিক রেখার A ও D বিন্দুতে একটি সুতার দুই প্রান্ত বাঁধা আছে। এই ঝুলন্ত সুতার B ও C বিন্দুতে 3 ও 1 পা. ও. এর দুটি বস্তু বাঁধা আছে, যেন অনুভূমিকের সাথে AB, BC ও CD যথাক্রমে α, β ও γ সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। B বিন্দু C বিন্দুর উপরে থাকলে, দেখাও যে, tan α = 3 tan γ + 4 tan β

03. একটি হেলানো তলের উপর W ওজনের একটি বস্তু সুস্থিত আছে। একটি অনুভূমিক বল এবং তল বরাবর একটি বল পৃথকভাবে তলের উপর বস্তুটিকে সুস্থিত রাখে। এই দুই ক্ষেত্রে তলের প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R এবং R′ হলে, দেখাও যে, $RR'=W^2$

BUET, KUET, CUET & RUET

[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান] (সমবিন্দু বল)

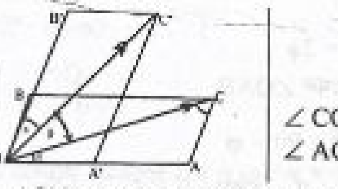
Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. **P এবং Q (P > Q) মানের দুটি বল α কোণে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি θ কোণে ঘুরে যায় প্রমান কর যে,**

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}$ [15-16]

Solve



$\angle COC' = \theta$

$\angle AOB = \alpha$

$\Delta AOC = \Delta C'OB'$ সুতরাং $\angle AOC = \angle B'OC' = x$ (ধরি)

$2x + \theta = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha - \theta}{2} = \angle AOC$ এবং $\angle BOC = x + \theta$

$= \frac{1}{2}(\alpha - \theta) + \theta = \frac{1}{2}(\alpha + \theta) = \angle ACO$

এখন, ΔOAC এ, $\frac{OA}{\sin\angle ACO} = \frac{AC}{\sin\angle AOC}$

$\Rightarrow \frac{P}{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}} = \frac{Q}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$

$\Rightarrow \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta) - \sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta) + \sin\frac{1}{2}(\alpha-\theta)}$

$\Rightarrow \frac{P-Q}{P+Q} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\theta}$

$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\alpha}{2}$ **(Proved)**

02. **কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q এবং R ভারসাম্য সৃষ্টি করে। P ও Q পরস্পর লম্ব এবং Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে, Q ও R এর অনুপাত কত?** [13-14]

Solve লামির সূত্র হতে, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$

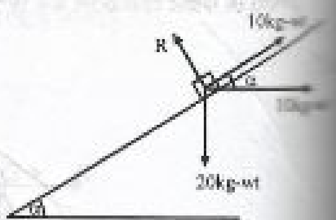
$\Rightarrow \frac{P}{\sin120^\circ} = \frac{Q}{\sin150^\circ} = \frac{R}{\sin90^\circ}$

$\Rightarrow \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{Q}{\frac{1}{2}} = \frac{R}{1}$

Q ও R এর অনুপাত, $\frac{Q}{R} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ $\therefore Q : R = 1 : 2$ **Ans.**

03. **ভূমির সাথে α কোণে হেলানো একটি সমতলের উপর একটি 20 ... ওজনের বস্তুকে তল ও ভূমির সমান্তরালে 10 kg-wt মানের দুইটি ... বল প্রয়োগে স্থির অবস্থায় রাখা হয়েছে। তলের উপর ক্রিয়ারত ... পরিমাপ নির্ণয় কর।** [14-15]

Solve যেহেতু বলগুলো স্থির আছে সুতরাং আনত তল বরাবর সবগুলো বলের উপাংশ নিয়ে পাই,



$R\cos90^\circ + 10\cos0^\circ + 10\cos\alpha + 20\cos(90^\circ + \alpha) = 0$

$\Rightarrow 10 + 10\cos\alpha - 20\sin\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\alpha = 1 + \cos\alpha$

$\Rightarrow 2.2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}$ ...

$\therefore \alpha = 2\tan^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}\frac{2\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = \sin^{-1}\frac{4}{5} = \cos^{-1}\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}$

আনত তলের উপর লম্ব বরাবর সবগুলো বলের উপাংশ নিয়ে পাই,

$R\cos0^\circ + 10\cos90^\circ + 10\cos(90^\circ + \alpha) + 20\cos(90^\circ + \alpha + 90^\circ)$ ...

$\Rightarrow R - 10\sin\alpha - 20\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow R = 10\sin\alpha + 20\cos\alpha = 10 \times \frac{4}{5} + 20 \times \frac{3}{5} = 20kg - wt$

04. **কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q (P > Q) মানের দু'টি বলের ... বলের দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। P বলটিকে দ্বিগুণ ... উক্ত কোণ 30° হয়। বল দু'টির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।** [11-12 ; KUET ...]

Solve



ধরি P এবং Q-এর অর্ন্তভুক্ত কোন α

১ম ক্ষেত্রে

$\frac{P}{\sin(\alpha - 60^\circ)} = \frac{Q}{\sin60^\circ}$ -------------- (i)

২য় ক্ষেত্রে

$\frac{2P}{\sin(\alpha - 30^\circ)} = \frac{Q}{\sin30^\circ}$ ------------ (ii)

(ii) ÷ (i) $\Rightarrow$

$\frac{2\sin(\alpha - 60^\circ)}{\sin(\alpha - 30^\circ)} = \frac{\sin60^\circ}{\sin30^\circ} \Rightarrow \frac{2\left(\sin\alpha\frac{1}{2} - \cos\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\alpha\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ...

$\Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3} = \tan120^\circ$ $\therefore \alpha = 120^\circ$

05. **3P এবং 2P মানের দুটি বলের লব্ধি R। প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ ... লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।** ...

Solve $R^2 = (3P)^2 + (2P)^2 + 2.(3P)(2P)\cos\alpha$ .....(i)

$(2R)^2 = (6P)^2 + (2P)^2 + 2(6P)(2P)\cos\alpha$ ......(ii)

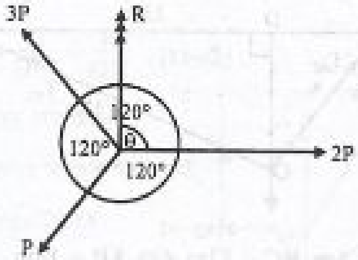
এখন, (i) × 4 − (ii) $\Rightarrow$

$4(3P)^2 + 4(2P)^2 - (6P)^2 - (2P)^2 + 48P^2\cos\alpha - 24P^2\cos\alpha$ ...

$\Rightarrow 24P^2\cos\alpha = -12 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos120^\circ \therefore \alpha = 120^\circ$ ...

P, 2P, 3P মানের তিনটি বল পরস্পর 120° কোণে আনত হয়ে একটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। এদের লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর। [01-02]

Solve



ধরি, বলত্রয়ের লব্ধি R, 2P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

এখন 2P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর বলত্রয়ের উপাংশ নিয়ে পাই,

$2P + 3P\cos120° + P\cos120° = R\cos\theta$

$\Rightarrow R\cos\theta = 2P - \frac{3P}{2} - \frac{P}{2} = 0 \therefore \theta = 90°$

∴ লব্ধি 2P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 90° কোণ উৎপন্ন করে।

আবার 2P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব বরাবর বলত্রয়ের উপাংশ নিয়ে পাই,

$2P\sin0° + 3P\sin120° + P\sin240° = R\sin\theta$

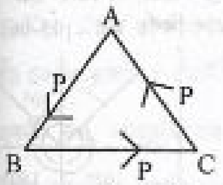
$\Rightarrow R\sin\theta = 3P\frac{\sqrt{3}}{2} - P\frac{\sqrt{3}}{2}$

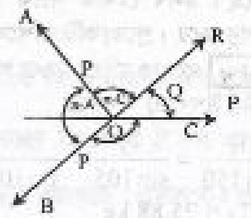
$\Rightarrow R\sin90° = P\sqrt{3} \therefore R = P\sqrt{3}$

∴ লব্ধির মান $P\sqrt{3}$ একক এবং দিক 2P এর দিকের সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 90° কোণে ক্রিয়াশীল। **Ans.**

ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান্তরাল P মানবিশিষ্ট তিনটি বল, একটি বিন্দুতে কার্যকর হলে, প্রমাণ কর যে লব্ধি বল R, এর জন্য $R^2 = P^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$, দ্বারা প্রকাশ করা যায়। [00-01]

Solve এখানে





OC বরাবর উপাংশ নিয়ে,

$R\cos\theta = P + P\cos(\pi - C) + P\cos\{-(\pi - B)\}$

$= P - P\cos A - P\cos B$ ..... (i)

OC এর লম্ব বরাবর উপাংশ নিয়ে,

$R\sin\theta = P\sin(\pi - C) + P\sin\{-(\pi - B)\}$

$= P\sin C - P\cos B$ ..... (ii)

$\therefore (i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$R^2 = 3P^2 - 2P^2\cos B - 2P^2\cos C + 2P^2(\cos B.\cos C - \sin B.\sin C)$

$= 3P^2 - 2P^2\cos B - 2P^2\cos C + 2P^2\cos(B + C)$

$= 3P^2 - 2P^2\cos A - 2P^2\cos B - 2P^2\cos C$

$= 3P^2 - 2P^2\cos B - 2P^2\cos C - 2P^2\cos(B + C)$

$R^2 = P^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$ **(Proved)**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 6 ও 8 meters দীর্ঘ দুটি সুতার সাহায্যে 60 kg ভরের একটি বস্তুকে ঝুলানো হয়েছে, সুতা দুটির অপর প্রান্তদ্বয় 10 meters দীর্ঘ একটি রডের দুই প্রান্তে বাঁধা আছে। রডটি এমনভাবে রাখা যে বস্তুটি রডটির মধ্যবিন্দুর ঠিক খাড়া নীচে অবস্থান করে। সুতাদ্বয়ের টান নির্ণয় কর। [08-09]

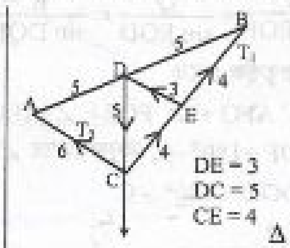
Solve

বলত্রিভুজের বিপরীত সূত্রমতে,

$\frac{4}{T_1} = \frac{3}{T_2} = \frac{5}{60}$

$\therefore T_1 = 48$ kg-wt

$T_2 = 36$ kg-wt **Ans.**



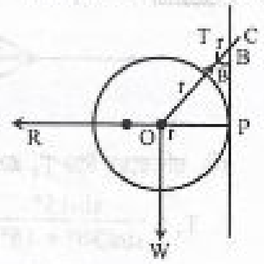
Δ DCE এর CE দ্বারা T_1, ED দ্বারা T_2 ও DC দ্বারা W প্রকাশ করা যায়।

$DC^2 = CE^2 + DE^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore DC = 5$

02. 'r' ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট W ওজনের একটি গোলক একটি মসৃণ খাড়া দেয়ালের সাথে P বিন্দুতে ঠেকিয়ে 'r' দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রশি দিয়ে গোলকের B বিন্দুতে ও দেয়ালের C বিন্দুতে সুস্থিতে বাঁধা আছে। রশির টান T ও দেয়ালের উপর প্রতিক্রিয়া R এর মান W এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [04-05]

Solve $PC = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$



এখন, বল ত্রিভুজে বিপরীত সূত্রমতে,

$\frac{W}{PC} = \frac{R}{PO} = \frac{T}{OC}$

$\Rightarrow \frac{W}{\sqrt{3}r} = \frac{R}{r} = \frac{T}{2r}$

$\Rightarrow R = \frac{W}{\sqrt{3}} \Rightarrow T = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$\therefore R = \frac{W}{\sqrt{3}}, T = \frac{2}{\sqrt{3}}W$ **Ans.**

03. বৃত্তচাপ আকারের একটি হালকা তারের দুই প্রান্ত এর কেন্দ্রের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। তারটির দুই প্রান্ত হতে P ও Q ওজনের দুটি বস্তু ঝুলছে এবং তারটির উত্তল দিক নীচের দিক থেকে স্থিতাবস্থায় আছে। কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রান্ত উলম্ব রেখা P ওজনের দিকের ব্যাসার্ধের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর। [04-05]

Solve $P.a = Q.b$

$\Rightarrow P.r\sin\theta - Q\,r\sin(\alpha - \theta) = 0$

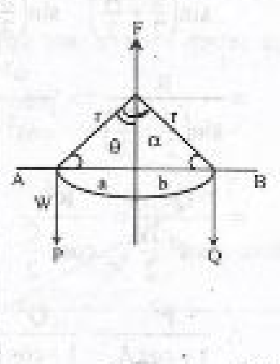
$\Rightarrow r(P\sin\theta - Q\sin\alpha\cos\theta + Q\sin\theta\cos\alpha) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta(P + Q\cos\alpha)$

$= Q\sin\alpha\cos\theta$

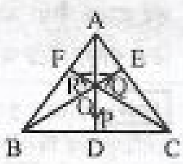
$\Rightarrow \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ **Ans.**



04. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল যথাক্রমে P, Q, R সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ কর যে, P:Q:R = a:b:c. [99-00]

Solve লামির উপপাদ্য অনুসারে,



$$\frac{P}{\sin R \hat{} Q} = \frac{Q}{\sin R \hat{} P} = \frac{R}{\sin P \hat{} Q}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin EOF} = \frac{Q}{\sin FOD} = \frac{R}{\sin DOE}$$

AEOF চতুর্ভুজ থেকে

$\angle A + \angle AFO + \angle FOE + \angle AEO = 2\pi$

$\therefore \angle EOF = 180° - A$, অনুরূপভাবে $\angle DOF = 180° - B$

এবং $\angle DOE = 180° - C$

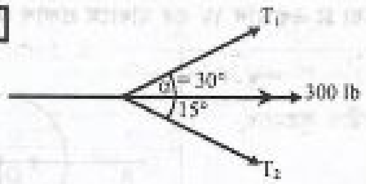
$$\therefore \frac{P}{\sin(180 - A)} = \frac{Q}{\sin(180 - B)} = \frac{R}{\sin(180 - C)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

$\therefore P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ **(Proved)**

05. একটি অচল মোটরযানকে চিত্রানুযায়ী দু'টি রশি দিয়ে টানা হচ্ছে। টানের ফলে মোটরযানে অক্ষ বরাবর 300 পাউন্ড বল সৃষ্টি হলে, রশিদ্বয়ের টানের পরিমাণ নির্ণয় কর। দেয়া আছে $\alpha = 30°$। [97-98]

Solve



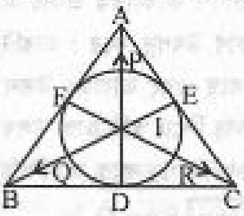
ধরি, রশিদ্বয়ের টান T_1 এবং T_2

$$\therefore T_1 = \frac{\sin 15°}{\sin(30° + 15°)} \times 300 = 109.80 lb$$

$$\text{এবং } T_2 = \frac{\sin 30°}{\sin(30° + 15°)} \times 300 = 212.132 lb$$ **Ans.**

06. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র I বিন্দুতে যথাক্রমে IA, IB, IC রেখা বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে, $P^2 : Q^2 : R^2 = (1 + \cos A) : (1 + \cos B) : (1 + \cos C)$. [96-97]

Solve লামির উপপাদ্য অনুসারে,



$$\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin CIA} = \frac{R}{\sin AIB}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)}$$

$$= \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}\right)} \Rightarrow \frac{P^2}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

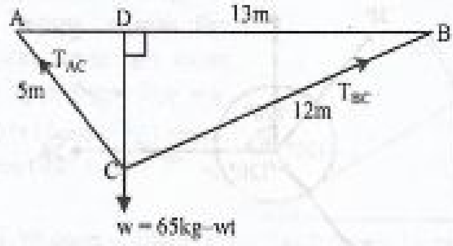
$$= \frac{Q^2}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{R^2}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \frac{P^2}{1 + \cos A} = \frac{Q^2}{1 + \cos B} = \frac{R^2}{1 + \cos C}$$

$\Rightarrow P^2 : Q^2 : R^2 = 1 + \cos A : 1 + \cos B : 1 + \cos C$ **(Proved)**

07. 13 মিটার দূরত্বে একই আনুভূমিক রেখার দুইটি বিন্দুতে 5 এবং 12 মি... দৈর্ঘ্যের রশি দ্বারা 65 kg ওজনের একটি বস্তু ঝুলানো আছে রশি... টান নির্ণয় কর। [95-96]

Solve



এখানে AC = 5m, BC = 12m এবং AB = 13m

এখন $AB^2 = 13^2 = 5^2 + 12^2 = AC^2 + BC^2$

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী যার $\angle C = 90°$।

বলত্রয় C বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় আছে। C বিন্দুতে 65kg - wt, খাড়া নিচের দি... একটি রশির টান T_{AC}, CA বরাবর এবং অপর রশির টান T_{BC}, CB ... ক্রিয়াশীল। C বিন্দু হতে AB এর উপর CD লম্ব টানি যা W ক্রিয়ারেখা ...

$\therefore$ C বিন্দুতে লামীর সূত্রানুসারে, $\frac{T_{AC}}{\sin(\pi - BCD)} = \frac{T_{BC}}{\sin(\pi - ACD)} = ...$

$$\Rightarrow \frac{T_{AC}}{\sin BCD} = \frac{T_{BC}}{\sin ACD} = \frac{65}{1} \Rightarrow \frac{T_{AC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} = \frac{T_{BC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{AC}}{\cos B} = \frac{T_{BC}}{\cos A} = 65 \therefore T_{AC} = 65 \cos B = 65 \times \frac{12}{13} = 60 \text{ kg-wt}$$

$$\therefore T_{BC} = 65 \cos A = 65 \times \frac{5}{13} = 25 \text{ kg - wt}$$

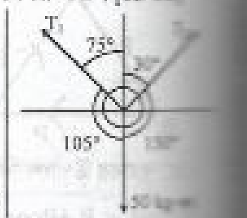
08. 3টি সমমানের সমতলীয় বল পরস্পরের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন ক... বল তিনটির লব্ধির মান নির্ণয় কর। [04-05]

Solve লামির বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে লব্ধি শূন্য।

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 50 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি রশিতে বেঁধে দুই ব্যক্তি ... করছে। উলম্ব রেখার সাথে একটি রশি 75° এবং অপরটি 30° ... উৎপন্ন করে। প্রত্যেকটি রশিতে টানের পরিমাণ নির্ণয় কর। [05-06]

Solve প্রত্যেক রশিতে টানের পরিমাণ T_1 ও T_2 লামির উপপাদ্য অনুসারে,



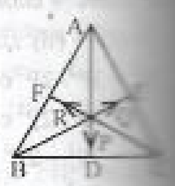
$$\frac{T_1}{\sin 150} = \frac{T_2}{\sin 105} = \frac{50}{\sin 105}$$

$\therefore T_1 = 25.88$ kg

এবং $T_2 = 50$ kg **Ans.**

02. ΔABC এর শীর্ষস্থ বিন্দুত্রয় হতে BC, CA, AB বাহুত্রয়ের উপর লম্ব বরাবর কার্যরত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। [03-04] দেখাও যে, P: Q: R = sinA : sinB : sin C

Solve লামির উপপাদ্য অনুসারে,



$$\frac{P}{\sin \angle EOF} = \frac{Q}{\sin \angle DOF} = \frac{R}{\sin \angle DOE}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)}$$

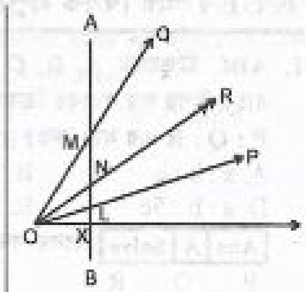
$$\Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

$\Rightarrow P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$ **(Showed)**

UET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

P, Q বলদ্বয় ও এদের লব্ধি R, O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি একটি ছেদক P, Q, R এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে $\frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$ । [11-12]

Solve AB ⊥ OX লম্ব আঁকি।



OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

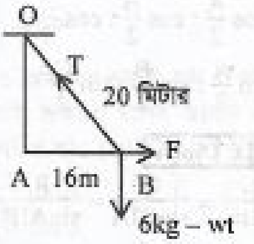
$P\cos XOL + Q\cos XOM = R\cos XON$

$\Rightarrow P.\frac{OX}{OL}+Q.\frac{OX}{OM}=R.\frac{OX}{ON}$

$\therefore \frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$ **(Showed)**

6 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে 20 মি. দীর্ঘ একটি হালকা সুতার সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে আবদ্ধ করা হয়েছে। তার ভূমি তলের সমান্তরাল F মানের বলের ক্রিয়ার ফলে তা নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত খাড়া করা হতে 16 মি. দূরে স্থিরাবস্থায় আছে। F এর মান এবং সুতার টান নির্ণয় কর। [10-11]

Solve



$OB = 20m,\ AB = 16m$

$OA = \sqrt{20^2 - 16^2}$

$= 12m$

বলের ত্রিভুজের সূত্রানুসারে

$\frac{T}{OB}=\frac{F}{AB}=\frac{6}{OA}$

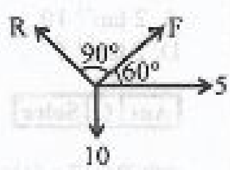
$\Rightarrow \frac{T}{20}=\frac{F}{16}=\frac{6}{12}$

$\therefore T = 10kg - wt$ এবং $F = 8kg - wt$ **Ans.**

10 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে অনুভূমিক দিকে কার্যরত 5 কেজি ওজনের একটি বল, অনুভূমিকের সঙ্গে 60° কোণে ক্রিয়ারত F বল এবং F এর উপর লম্বভাবে কার্যরত R বল সাম্যাবস্থায় রেখেছে। প্রমাণ কর যে,

$F - \sqrt{3}R + 10 = 0$ এবং $\sqrt{3}\ F + R - 20 = 0$ [03-04]

Solve আনুভূমিক উপাংশ নিয়ে পাই,



$5\cos 0° + F\cos 60° + R\cos(90° + 60°) + 10\cos 270° = 0$

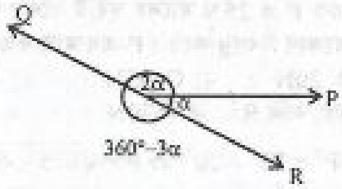
$\Rightarrow 5 + F\frac{1}{2} - R\frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \times 0 = 0$

$\therefore F - \sqrt{3}R + 10 = 0$ (Proved)

উলম্ব উপাংশ নিয়ে পাই, $\sqrt{3}F + R - 20 = 0$ **(Proved)**

04. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ P ও R এর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q-P)$. [07-08]

Solve



লামির উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin(360° - 3\alpha)}$

$= \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{P}{-\sin 3\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{P}{-3\sin\alpha + 4\sin^3\alpha}$

$= \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

$\therefore \frac{P}{-3 + 4\sin^2\alpha} = Q = \frac{R}{2\cos\alpha}$

$= \frac{Q - P}{1 + 3 - 4\sin^2\alpha}$

$\therefore Q = \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{Q-P}{4\cos^2\alpha}$

$\therefore R = 2Q\cos\alpha$ .... (i)

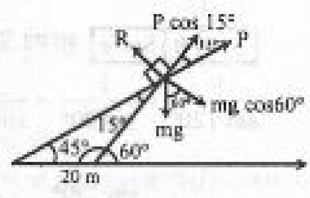
এবং $R = \frac{Q-P}{2\cos\alpha}$ .... (ii)

(i) × (ii) ⇒ R^2

$= 2Q\cos\alpha \times \frac{Q-P}{2\cos\alpha} = Q(Q-P)$ **(Proved)**

05. অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে আনত একটি মসৃণ তলের উপর 50 কেজি ভরের একটি বস্তু আছে। তলের পাদদেশ হতে 20 মিটার দূরে অনুভূমিকের উপর রক্ষিত একটি ব্লোয়ার দিয়ে আনুভূমিকের সাথে 45° কোণে বস্তুটির উপর সরাসরি বায়ু চালনা করে বস্তুটিকে স্থির রাখা হয়েছে। ব্লোয়ার হতে নির্গত বায়ু কর্তৃক প্রযুক্ত চাপ নির্ণয় কর। [04-05]

Solve ধরি, প্রযুক্ত চাপ = P



$P\cos 15° = mg \times \sin 60°$

$\therefore P = \frac{50 \times 9.81 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 15°} = 440N$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও 25N মানের দুইটি বলের লব্ধি 20 N যা P এর দিকের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। P-এর মান কত? [13-14]

A. 10N B. 20N C. 25N D. 15N

Ans D Solve ধরি, লব্ধি R ∴ R = 20N

$R^2 = 25^2 - P^2 \Rightarrow P^2 = 25^2 - 20^2 \Rightarrow P = \sqrt{625-400} = 15$ N

02. যদি কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির মানের এক-তৃতীয়াংশের সমান হয়, তবে বলদ্বয়ের মানের অনুপাত হবে- [12-13]

A. $2\sqrt{2}:3$ B. $3\sqrt{2}:2$ C. $2:3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}:4$

Ans A Solve P বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই,



$P + Q\cos\alpha = \frac{Q}{3} \times \cos 90° \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{P}{Q}$

$\therefore \left(\frac{Q}{3}\right)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(-\frac{P}{Q}\right) = Q^2 - P^2$

$\Rightarrow \frac{Q^2}{9} = Q^2 - P^2 \Rightarrow P^2 = \frac{8Q^2}{9} \Rightarrow \frac{P^2}{Q^2} = \frac{8}{9} \therefore \frac{P}{Q} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

03. যদি কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের তিনগুণ হয়, তাহলে বল দুটোর অন্তর্গত কোণের মান হবে- [10-11 ; CUET 10-11]

A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

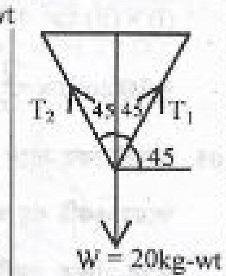
Ans B Solve $R^2 = P^2 + P^2 + 2.P.P.\cos\alpha$

$\Rightarrow 3P^2 = 2P^2(1+\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \therefore \alpha = 60°$

04. 20 কেজি ওজনের একটি বস্তুর সাথে দুটি রশি বেঁধে দুজন লোক তা বহন করছে। রশিদ্বয় খাড়া রেখার সাথে সমান 45° করে কোণ উৎপন্ন করে। রশিদ্বয়ের টান হবে- [09-10]

A. $10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}$ kg – wt B. $20\sqrt{2}, 20\sqrt{2}$ kg – wt
C. 20,20 kg- wt D. 10,10 kg-wt

Ans A Solve From lami's law,



$\frac{T_1}{\sin(90°+45°)} = \frac{T_2}{\sin(90°+45°)} = \frac{20}{\sin 90°}$

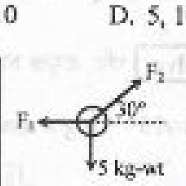
$\Rightarrow \frac{T}{\cos 45°} = \frac{T}{\cos 45°} = \frac{20}{1}$

$\therefore T_1 = T_2 = 20\cos 45° = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$ kg-wt

05. অনুভূমিক দিকে এবং অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল দু'টি বল 5 একক ওজনের বস্তুকে স্থিরভাবে ধরে রাখে। বল দু'টির মান কত? [06-07]

A. $\frac{5}{\sqrt{3}}, 10$ B. $5\sqrt{3}, 10$ C. 5, 10 D. $5, 10\sqrt{3}$

Ans B Solve লামির উপপাদ্য অনুসারে,



$\frac{F_1}{\sin 120°} = \frac{F_2}{\sin 90°} = \frac{5}{\sin 30°}$

$\therefore F_1 = 5 \times \frac{\sin 120°}{\sin 30°} = 5\sqrt{3}$ একক এবং $F_2 = 5 \times \frac{\sin 90°}{\sin 30°} = 10$ একক

06. 5 N, 7N, এবং 8N বলত্রয় একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে তারসাম্য ... করলে 8N এবং 5 N বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে? [05-06]

A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

Ans D Solve $7^2 = 8^2 + 5^2 + 2.8.5\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{40}{80}$ ...

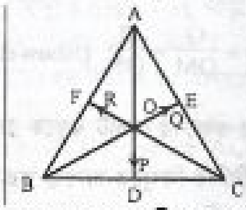
$\Rightarrow \cos\theta = \cos 120° \therefore \theta = 120°$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুগুলো হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে P : Q : R এর মান কত? [17-18,09-10]

A. a : b : c B. 2a : b : c C. 2a : 3b : c
D. a : b : 5c E. কোনোটিই নয়

Ans A Solve বলের লম্ব ত্রিভুজের বিপরীত সূত্রানুসারে,



$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$

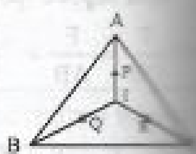
$\Rightarrow \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$

$\therefore P : Q : R = a : b : c$

02. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র I বিন্দুতে যথাক্রমে IA, IB, IC রেখা বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে তাহলে P : Q : R এর মান কত হবে? [16-17]

A. cos2A : cos2B : cos2C B. cosA : cosB : cosC
C. $\cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ D. sin A : sin B : sin C
E. $\sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}$

Ans C Solve



$\frac{P}{\sin BIC} = \frac{Q}{\sin CIA} = \frac{R}{\sin AIB}$

$\therefore \angle BIC = \pi - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$

অনুরূপভাবে, $\angle CIA = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$ এবং $\angle AIB = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$

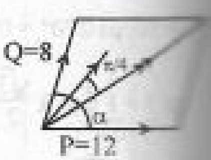
$\therefore \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)} \therefore \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \ldots$

$\Rightarrow P : Q : R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

03. যদি 12 ও 8 এর একক মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে এমন কোণে ক্রিয়া করে যেন তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সাথে ... কোণ উৎপন্ন করে, তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? [15-16]

A. $2\tan^{-1}10$ B. $2\tan^{-1}4$ C. $2\tan^{-1}2$
D. $2\tan^{-1}5$ E. কোনটিই নয়

Ans C Solve এখানে, $\theta = \frac{\pi}{4}$



এখন, $P\tan\theta = Q\tan\alpha \Rightarrow 12\tan\frac{\pi}{4} = 6\tan\alpha$

$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}2$

∴ বলদ্বয়ের মধ্যকার কোণ = $2\alpha = 2\tan^{-1}2$

...টি একই মাত্রার বল এক বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়াশীল যেন তাদের লব্ধির ...ও তাদের সমান, সেক্ষেত্রে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হলো– [14-15]

A. $\frac{\pi}{3}$ B. π C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$ E. $\frac{5\pi}{6}$

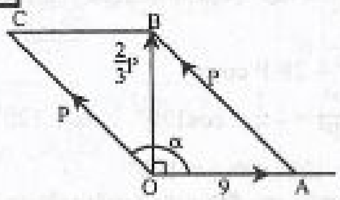
| Ans | D | Solve | $p^2 = p^2 + p^2 + 2p^2\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{p^2}{2p^2} = -\frac{1}{2} = \cos 120° \therefore \theta = 120° = \frac{2\pi}{3}$

...দি 9 একক বিশিষ্ট একটি বল ও অজানা একটি বল একই বিন্দুতে ...ভাবে ক্রিয়া করে যে তাদের লব্ধি অজানা বলের দুই-তৃতীয়াংশ এবং ...না বলের লম্ব হয় তবে অজানা বলটি হবে– [13-14]

A. $27/\sqrt{5}$ units B. $27/\sqrt{2}$ units C. $18/\sqrt{5}$ units
D. 27 units E. $9/\sqrt{3}$ units

| Ans | A | Solve |



ধরি অজানা বল P এবং জানা বল ও অজানা বলের অর্ন্তভুক্ত কোণ α।

এখানে OA = 9 একক, OB = $\frac{2}{3}$P একক, AB = P একক

$\angle AOB = 90° \therefore AB^2 = OB^2 + OA^2$

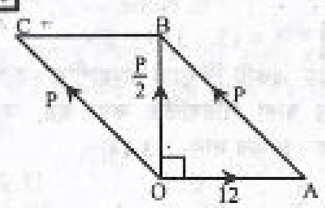
$\Rightarrow P^2 = \left(\frac{2}{3}P\right)^2 + 9^2 \Rightarrow P^2 - \frac{4}{9}P^2 = 81 \Rightarrow \frac{5}{9}P^2 = 81 = P^2 = \frac{81\times 9}{5}$

$\therefore P = \frac{27}{\sqrt{5}}$ একক $\therefore$ অজানা বল $\frac{27}{\sqrt{5}}$ একক

...দি 12 একক বিশিষ্ট একটি বল ও অজানা একটি বল একই বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তাদের লব্ধি অজানা বলের অর্ধেক এবং জানা বলের উপর লম্ব হয়, তবে অজানা বলটির মান কোনটি? [12-13]

A. $9\sqrt{2}$ units B. $8\sqrt{3}$ units C. $16\sqrt{3}$ units
D. $18\sqrt{2}$ units E. $4\sqrt{6}$ units

| Ans | B | Solve |



ধরি অজানা P বল এবং জানা বল ও অজানা বলের অর্ন্তভুক্ত কোণ α।

এখানে OA = 12 একক

OB = $\frac{P}{2}$ একক, AB = P একক এবং $\angle AOB = 90°$

$\therefore AB^2 = OB^2 + OA^2$

$\Rightarrow P^2 = \left(\frac{1}{2}P\right)^2 + 12^2$

$\Rightarrow P^2 - \left(\frac{P}{2}\right)^2 = 12^2 \Rightarrow P^2 - \frac{P^2}{4} = 12^2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}P^2 = 144 \Rightarrow P^2 = \frac{144\times 4}{3}$

$\therefore P = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ অজানা বল $8\sqrt{3}$ একক

07. কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির মান $\sqrt{10}$ N এবং তাদের মধ্যকার কোণ 45°। উহাদের একটি বলের মান $\sqrt{2}$ N হলে অন্যটি কত নির্ণয় কর। [13-14]

A. –5 N B. 2 N C. –3 N D. 7 N E. 3 N

| Ans | B | Solve | বলটি P হলে,

$\left(\sqrt{2}\right)^2 + P^2 + 2.P.\sqrt{2}\cos 45° = \left(\sqrt{10}\right)^2$

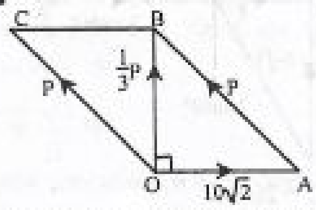
$\Rightarrow 2 + P^2 + 2P = 10 \Rightarrow P^2 + 2P - 8 = 0$

$\Rightarrow (P-2)(P+4) = 0$ কিন্তু $P \neq -4 \therefore P = 2N$

08. $10\sqrt{2}$ একক বিশিষ্ট একটি বল এবং অজানা একটি বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধি অজানা বলটির উপর লম্ব এবং এর মান অজানা বলের এক তৃতীয়াংশ, অজানা বলটির মান কত? [10-11]

A. 15 একক B. $5\sqrt{2}$ একক C. $15\sqrt{2}$ একক
D. 12 একক E. 10 একক

| Ans | A | Solve |



ধরি অজানা P বল এবং জানা বল ও অজানা বলের অর্ন্তভুক্ত কোণ α।

এখানে OA = $10\sqrt{2}$ একক

OB = $\frac{1}{3}$P একক

AB = P একক

$\angle AOB = 90° \therefore AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Rightarrow P^2 = \left(\frac{1}{3}P\right)^2 + (10\sqrt{2})^2 \Rightarrow P^2 - \frac{1}{9}P^2 = 200$

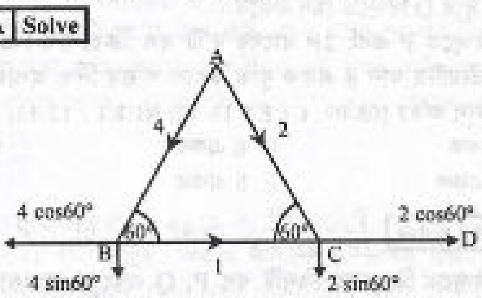
$\Rightarrow \frac{8}{9}P^2 = 200 \Rightarrow P^2 = \frac{9\times 200}{8} = 225$

$\therefore$ P = 15 একক

09. যদি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AB, AC ও BC বাহু বরাবর যথাক্রমে 4,2 এবং 1একক মানের বলত্রয় ক্রিয়ারত থাকে তাহলে বলগুলোর লব্ধির মান হবে- [09-10]

A. $3\sqrt{3}$ B. $\sqrt{31}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$ E. $\sqrt{43}$

| Ans | A | Solve |



BC বরাবর বলগুলোর উপাংশ নিয়ে, 1 + 2cos60° – 4cos60° = লব্ধি বলের উপাংশ

$\therefore$ লব্ধি বলের উপাংশ = $1 + 2\times\frac{1}{2} - 4\times\frac{1}{2} = 0$

সুতরাং BC বরাবর বলগুলো নিষ্ক্রিয় হয়ে যায়।

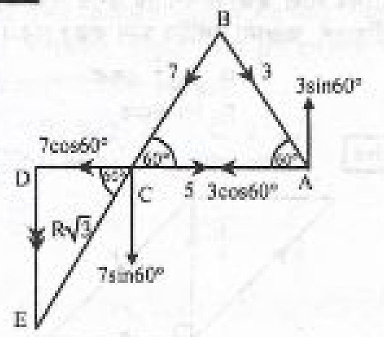
$\therefore$ লব্ধি বলের ক্রিয়া রেখা BC রেখার উপর লম্ব।

$\therefore$ লব্ধি বলের মান (4sin60° + 2sin60°) বা 6sin30° বা $3\sqrt{3}$ একক

10. 20 cm বাহু বিশিষ্ট সমবাহু ΔABC এর BC, CA এবং AB বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়াশীল 7, 5 ও 3 একক বলগুলির লব্ধির মান কত এবং উহার কার্যরেখা BC বাহুকে কোথায় ছেদ করে? [08-09]

A. 2 একক এবং বহিঃস্থভাবে BC কে 20 cm দূরে
B. $\sqrt{3}$ একক এবং বহিঃস্থভাবে BC কে 15 cm দূরে
C. $3\sqrt{3}$ একক এবং বহিঃস্থভাবে BC কে 25 cm দূরে
D. $2\sqrt{3}$ একক এবং বহিঃস্থভাবে BC কে 30 cm দূরে
E. 4 একক এবং বহিঃস্থভাবে BC কে 20 cm দূরে

Ans | D | Solve



AB = AC = BC = 20 cm
AC বরাবর বলগুলোর উপাংশ নিয়ে,

লব্ধি বলের উপাংশ $= 5 - 3\cos60° - 7\cos60° = 5 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = 0$

সুতরাং AC বরাবর বলগুলো নিষ্ক্রিয় হয়ে যায়।

$\therefore$ লব্ধি AC রেখার উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল।

$\therefore$ লব্ধির মান = বিসদৃশ $7\sin60°$এবং $3\sin60°$ বলদ্বয়ের লব্ধি
$= 7\sin60° - 3\sin60° = 2\sqrt{3}$ একক।

ধরি লব্ধির ক্রিয়ারেখা AC রেখাকে বহিঃস্থভাবে D বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore AD:CD = 7\sin60°; 3\sin60° = 7:3$

$\therefore CD = \frac{3}{7}AD = \frac{3}{7}(20 + CD) \quad \therefore CD = 15$ c.m

$\therefore$ লব্ধির মান $2\sqrt{3}$ এবং লব্ধি CA রেখাকে বহিস্থভাবে 7:3 অনুপাতে CA রেখার উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল।

সুতরাং লব্ধি BC রেখাকে বহিঃস্থভাবে C বিন্দু হতে $\frac{CD}{\cos60°}$ বা $\frac{15}{\cos60°}$ বা 30c.m দূরে D বিন্দুতে ছেদ করবে।

11. কোন বিন্দুতে P এবং 2P মানের দু'টি বল ক্রিয়াশীল। প্রথমটিকে দ্বিগুণ করে দ্বিতীয়টির মান 8 একক বৃদ্ধি করলে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P এর মান কত? [08-09; CUET 11-12; RUET : 12-13]

A. 4 একক B. 6 একক C. 12 একক
D. 16 একক E. 8 একক

Ans | A | Solve $\frac{P}{2P} = \frac{2P}{2P+8} \Rightarrow 4P + 8 = 6P \therefore P = 4$ একক

12. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q এবং R ভারসাম্য সৃষ্টি করে। P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 90° এবং Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 120°। Q ও R এর মানের অনুপাত হলো- [07-08]

A. 2 : 1 B. $\sqrt{3}:2$ C. 1 : 2 D. $\sqrt{3}:1$ E. $1:\sqrt{3}$

Ans | C | Solve

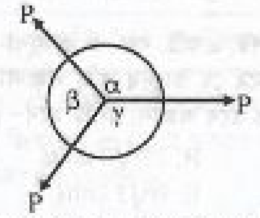
লামীর উপপাদ্য অনুযায়ী, $\frac{P}{\sin(Q\wedge R)} = \frac{Q}{\sin(P\wedge R)} = \frac{R}{\sin(P\wedge Q)}$

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\sin(P\wedge R)}{\sin(P\wedge Q)} = \frac{\sin(360-90-120)}{\sin 90} = \frac{1}{2} \quad \therefore Q:R = 1:2$

13. তিনটি সমান বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে ঐ বিন্দুকে সাম্যাবস্থায় রেখেছে। বলগুলির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির মান কোনটি? [06-07]

A. 60°,60° and 240° B. 90°,90° and 180°
C. 120°,120° and 120° D. 150°,150° and 160°
E. 45°,45° and 270°

Ans | C | Solve



বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে যেকোন বলদ্বয়ের লব্ধির মান অপর বলের মানের সমান হবে।

$\therefore P^2 = P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{P^2}{2P^2} = -\frac{1}{2} = \cos120° \quad \therefore \alpha = 120°$

অনুরূপভাবে $\beta = 120°$ এবং $\gamma = 120°$

$\therefore$ বলদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ গুলির মান হবে 120°, 120°, 120°

14. একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 2 একক এবং 3 একক মানের দুইটি বলের লব্ধির মান 4 একক। বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ হল- [05-06]

A. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ B. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ C. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ D. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

Ans | D | Solve $4^2 = 2^2 + 3^2 + 2\times2\times3\cos\theta$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 3N ও 5N মানের দুইটি বল এক বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কোনটি? [13-14]

A. 12 N B. 10 N C. 8 N
D. 2 N E. None

Ans | D | Solve লব্ধি = (5 − 3)N = 2N

02. দুইটি বল F ও 4F একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। যদি বল দুইটি যথাক্রমে 2F ও 4F + 8 দ্বারা পরিবর্তিত করা হয়, তবে লব্ধি বলের দিক অপরিবর্তিত থাকে। F এর মান- [13-14]

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. None

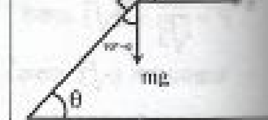
Ans | D | Solve $\frac{F}{4F} = \frac{2F}{4F+8} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2F}{4F+8} \Rightarrow 4F + 8 = 8F$

$\Rightarrow 8F - 4F = 8 \Rightarrow 4F = 8 \therefore F = 2$

03. আনুভূমিকের সাথে θ কোণ হেলানো একটি মসৃন তলে অবস্থিত m ভরের একটি ছোট বস্তু P এর উপর $\overline{F}$ পরিমান আনুভূমিক বল প্রয়োগ করা হলে $\overline{F}$ বলটি P বস্তুটিকে কেবলমাত্র সাম্যাবস্থায় রাখতে সামর্থ হয়, তাহলে $\overline{F}$ এর মান হলো। [10-11]

A. $mg\cos^2\theta$ B. $mg\sin^2\theta$ C. $mg\cos\theta$
D. $mg\tan\theta$ E. $mg\sin\theta$

Ans | D | Solve



$\frac{F}{\sin(180° - \theta)} = \frac{mg}{\sin(90° + \theta)}$

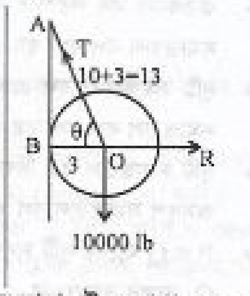
$\therefore F = mg\tan\theta$

...ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

... ft দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রাশির এক প্রান্ত একটি খাড়া দেওয়ালের সাথে ...টকানো আছে এবং অপর প্রান্ত একটি মসৃন গোলকের উপরিস্থিত একটি ...ন্দুতে সংযুক্ত রয়েছে। যদি গোলকটি দেওয়ালের সংস্পর্শে স্থিতিবস্থায় ...কে তবে রশির উপর টান কত হবে? ধর, গোলকটির ওজন 10000 lb ...ব্যাসার্ধ 3 ft. [15-16]

A. 11277 lb B. 10000 lb
C. 10277 lb D. 9731 lb

Ans **C** **Solve**



$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{10000}{\sin(180^\circ - \theta)}$

$T = \frac{10000}{\sin\theta} = \frac{10000}{\frac{\sqrt{160}}{13}} = 10277 \text{ lb}$

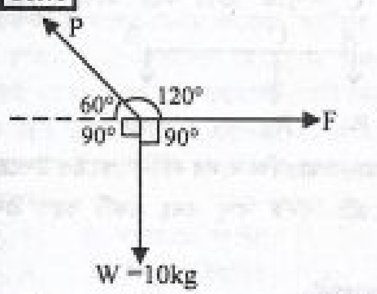
...এখানে, $AB = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{169-9}$

$= \sqrt{160}$ ft $\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{160}}{13}$]

... kg ওজনের একটি ঝুলন্ত বস্তুকে দুটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। ...দের একটি আনুভূমিক এবং অপরটি আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে ক্রিয়ারত আছে। আনুভূমিক দিকে ক্রিয়ারত বলের মান কত? [13-14]

A. $10\sqrt{3}$ kg-wt B. $10/\sqrt{3}$ kg-wt C. 10/3 kg-wt D. None

Ans **B** **Solve**

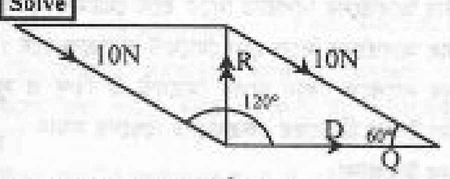


...অনুসারে, $\frac{F}{\sin 150^\circ} = \frac{10}{\sin 120^\circ}$ $\therefore F = \frac{\sin 150^\circ}{\sin 120^\circ} \times 10 = \frac{10}{\sqrt{3}}$ kg-wt

...কে বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়াশীল দুটি বলের মধ্যে বৃহত্তর বলটির মান ... N। তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলটির সাথে সমকোণ তৈরি করে। লব্ধির মান কত? [12-13]

A. $5\sqrt{3}$ N B. $5\sqrt{2}$ N C. $3\sqrt{3}$ N D. None

Ans **A** **Solve**



...লব্ধির মান R এবং ক্ষুদ্রতম বলটি Q।

...হতে $\sin 60^\circ = \frac{R}{10} \therefore R = 10\sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$N

...ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুর বরাবর তিনটি বল ...ক্রমে 2N, 4N ও 6N একই সময় কোন কণার উপর ক্রিয়াশীল। ...দের লব্ধির মান কত? [11-12]

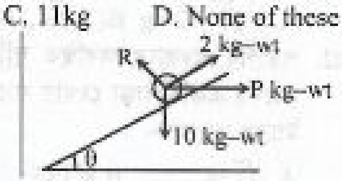
A. $2\sqrt{3}$N B. 12N C. 2N D. None of these

Ans **A** **Solve** যেকোন সমবাহু ত্রিভুজের বাহুত্রয় দ্বারা সূচিত তিনটি বল ...ন্তর ধারা গঠন করলে এদের লব্ধি = (সাধারণ অন্তর) $\times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ N

05. একটি আনত সমতলে 10 kg ওজনের একটি বস্তুকে সমতল বরাবর 2 kg ওজনের বল এবং একটি আনুভূমিক বল প্রয়োগ করে স্থিরভাবে রাখা হয়েছে। যদি ভূমির সাথে সমতলের নতি $\theta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ হয় তবে আনুভূমিক বলটি নির্ণয় কর। [11-12]

A. 10kg B. 5kg C. 11kg D. None of these

Ans **B** **Solve** সাম্যাবস্থায়,



$10\cos(90-\theta) = 2 + P\cos\theta$

$\therefore P = \frac{10\sin\theta - 2}{\cos\theta} = 5 \text{ kg} - \text{wt}$

SELF TEST [Written]

01. W ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি রশির সাহায্যে ঝুলানো হয়েছে। এদের একটি উল্লম্বের সাথে 30° কোণে আনত। অপর রশিটি উল্লম্বের সাথে কি পরিমাণ কোণে আনত হলে এতে টানের মান ক্ষুদ্রতম হবে? সেক্ষেত্রে প্রত্যেক রশিতে টান নির্ণয় কর।

Ans: 60°; $\frac{W}{2}$ ও $\frac{\sqrt{3}}{2}W$

02. ভূমির সাথে α কোণে হেলানো এক সমতলের উপর একটি ভারী বস্তুকে তল ও ভূমির সমান্তরালে যথাক্রমে P ও Q বল প্রয়োগ করে স্থির অবস্থায় রাখা হয়েছে। তলের নতি অর্ধেক করলে বস্তুটিকে স্থির অবস্থায় রাখতে P ও Q বলকে অর্ধেক করতে হয়। দেখাও যে, $\frac{P}{Q} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4}$

03. O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে। যদি কোন ছেদক তাদের ক্রিয়া রেখাগুলিকে যথাক্রমে $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ বিন্দুতে ছেদ করে তবে, দেখাও যে,

$$\frac{P_1}{OA_1} + \frac{P_2}{OA_2} + \frac{P_3}{OA_3} + \ldots\ldots + \frac{P_n}{OA_n} = 0$$

04. AB ও AC মসৃণ তল দুইটি ভূমির সাথে যথাক্রমে α ও β কোণে আনত। A বিন্দুর খাড়া উপরে রক্ষিত মসৃণ পুলি D এর উপর দিয়ে একটি দড়ি AB ও AC সমতলের উপরিস্থিত যথাক্রমে W ও 2W ওজন দুইটির সাথে বাধা আছে। দড়ির দুটি অংশ AB ও AC এর সাথে যথাক্রমে β ও α কোণে আনত। প্রমাণ কর যে, $\sin 2\alpha = 2\sin 2\beta$

05. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সুতার এক প্রান্ত কোন খাড়া দেয়ালে আটকানো আছে এবং তার অপর প্রান্ত a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের উপরস্থ কোন বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। গোলকটির ওজন W হলে দেখাও যে, সুতার টান $\frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$

06. একই অনুভূমিক রেখায় c একক দূরত্বে অবস্থিত l একক দীর্ঘ একটি সরু রশির প্রান্তদ্বয় বাধা আছে। অবাধে ঝুলানো W একক ওজন বিশিষ্ট একটি বস্তুকে বহন করে এমন একটি মসৃণ ওজনবিহীন আংটা ঐ রশির উপর দিয়ে গড়িয়ে যাচ্ছে। দেখাও যে, রশির টান $\frac{lW}{2\sqrt{l^2 - c^2}}$

07. 31 মি. দীর্ঘ একটি সুতার প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় 25 মি. দূরে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। সুতাটির এক প্রান্ত হতে 7 মি. দূরে তার সাথে 5 কেজি ওজনের একটি বস্তু সংযুক্ত করা হল। সুতাটির প্রত্যেক অংশের টান নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{24}{5}$ কেজি, $\frac{7}{5}$ কেজি

SELF TEST [MCQ]

01. 5 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। তাদের একটি অনুভূমিক এবং অপরটি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করেছে। বলদ্বয়-
A. $5\sqrt{3}$,12 kg B. $5\sqrt{3}$,10kg C. $10\sqrt{3}$,5kg D. 5,$10\sqrt{3}$ kg

02. পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুটি সুতা একটি বস্তুকে ধরে রাখলে এবং তাদের একটি খাড়া রেখার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করলে, সুতা দুইটির টানের অনুপাত-
A. $\sqrt{3}$:1 B. $\sqrt{3}$:2 C. 5 : 2 D. 10 : 3

03. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করে। তাদের প্রথমটি ও দ্বিতীয়টির মধ্যে কোণ 30° এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির মধ্যে কোণ 120° হলে, বলগুলোর অনুপাত-
A. $\sqrt{3}$:2:4 B. $\sqrt{3}$:1:2 C. 1: $\sqrt{3}$:4 D. $\sqrt{3}$:1:3

04. P, Q, R বল তিনটি কোন ত্রিভুজের A,B,C শীর্ষ বিন্দু হতে যথাক্রমে তাদের বিপরীত বাহুর লম্বাভিমুখী দিকে ক্রিয়ারত থেকে ভারসাম্য সৃষ্টি করলে-
A. P:Q:R = a:b:c B. P:Q:R = sinA:sinB:sinC
C. P:Q:R = cosA:cosB:cosC D. None

05. W ওজনের একটি বস্তুর সাথে দুইটি রশি বেঁধে দুইটি লোক তা বহন করছে। একটি রশি খাড়া রেখার সাথে 45° এবং অপরটি 30° কোণ উৎপন্ন করে- রশিদ্বয়ের টানের অনুপাত-
A. 1: $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$:1 C. $\sqrt{6}$:1 D. $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$

06. 15 cm দৈর্ঘ্যের একটি রশির একপ্রান্ত একটি মসৃন দেয়ালে এবং অপর প্রান্ত 5 cm ব্যাসার্ধের একটি গোলকের তলস্থিতে এক বিন্দুতে বাঁধা আছে। গোলকটির ওজন 2 kg হলে রশির টান–
A. 2.006 B. 1.5 C. 3 D. 2.05 kg

07. 1, 1 এবং 2 একক মানের তিনটি বল P, Q এবং R একটি বস্তুকে সাম্যাবস্থায় রেখে। P ^Q এবং Q ^R কোণগুলো–
A. 0°, 180° B. 60°, 135° C. 45°, 65° D. 120° ও 60°

08. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, $2\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ বলগুলো কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধির মান-
A. 2AC B. 5AB C. 0 D. None of these

09. 36 একক ওজনের একটি বস্তু 12 একক ও 16 একক দীর্ঘ দুইটি রশির সাহায্যে একটি অনুভূমিকের রেখার 20 একক দূরবর্তী দুইটি বিন্দুতে বাঁধা রয়েছে। রশিতে টানের পরিমাপ-
A. 28.4, 22.6 একক ওজন B. 28.4, 21.6 একক ওজন
C. 27.4, 21.6 একক ওজন D. 28.6, 21.6 একক ওজন

10. তিনটি P,Q এবং R একটি সমতলে কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। P এবং R এর মধ্যকার কোণ 90°, R এবং Q মধ্যকার কোণ 120°। সাম্যাবস্থায়, P, Q, R বলত্রয়ের অনুপাত কত?
A. 1:2:3 B. 1:2:$\sqrt{3}$ C.1:$\sqrt{2}$:3 D. $\sqrt{3}$:2:1

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

10.D	09.B	08.C	07.A	06.D	05.A	04.A	03.B	02.A	01.B

[২য় অংশ]

সমতলীয় বলজোট

এক নজরে গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি

□ কতগুলো বলের ক্রিয়া যদি যে কোন একটি তলের মধ্যে সীমাবদ্ধ ... তাহলে তাকে সমতলীয় বলজোট বলা হয়।

□ **সমান্তরাল বল:**

➤ কতগুলো বল পরস্পর সমান্তরাল রেখা বরাবর ক্রিয়ারত হলে ঐ বল... সমান্তরাল বল বলা হয়।

➤ দুটি সমান্তরাল বল একই দিকে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের সমমুখী ... সমান্তরাল বল বলা হয়।

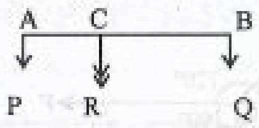
➤ দুটি সমান্তরাল বল বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত থাকলে তাদের বিপরীত ... অসদৃশ সমান্তরাল বল বলা হয়।

➤ P ও Q মানের দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি R = P + Q এবং দিক ... Q বলের সমান্তরাল।

➤ P ও Q মানের দুটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধির মান, R = P ... এবং দিক বৃহত্তর বলের সমান্তরাল। যেখানে P > Q

➤ দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q যদি AB রেখা A ও B বিন্দুতে ... তাদের লব্ধি যদি C বিন্দুতে ক্রিয়া করে তবে, P.AC = Q.BC ...

$\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$ হবে।



➤ দুটি অসদৃশ ও অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধির ক্ষেত্রেও উপরোক্ত সূত্র ...

➤ বস্তুর ভারকেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি বস্তুর একাধিক ... থাকতে পারে না।

□ **বলের ভ্রামক বা মোমেন্ট:**

➤ বলের যে ক্ষমতার ফলে বস্তু কোন বিন্দু বা কোন সরলরেখার ... আবর্তিত হয় তাকে ঐ বিন্দু বা ঐ সরল রেখার সাপেক্ষে বলের ... মোমেন্ট বলা হয়।

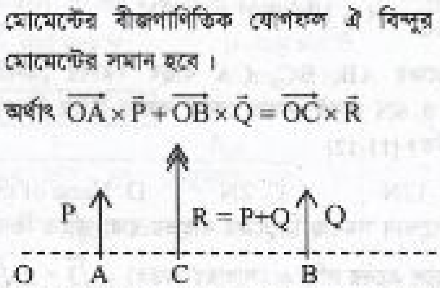
➤ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মোমেন্ট: কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়া ... তার উপরস্থ কোন বিন্দু বা অক্ষের চতুর্দিকে আবর্তন করে। এই ... ঘড়ির কাঁটার আবর্তনের বিপরীত দিকে হলে মোমেন্ট ধনাত্মক এবং ... ঘড়ির কাটার আবর্তনের দিকে হলে মোমেন্ট ঋণাত্মক হবে।

➤ কোন বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বলের মোমেন্ট ঐ বিন্দু ও সূচক ... প্রান্তদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণের সমান।

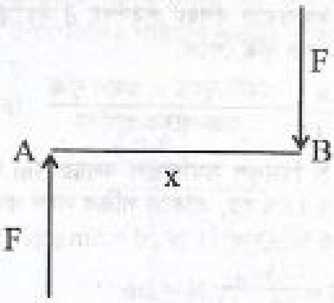
□ **ভেরিগননের উপপাদ্য:**

➤ দুইটি বলের সাথে একই সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর চতুর্দিকে ... মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল ঐ বিন্দুর চতুর্দিকে বলদ্বয়ের ... মোমেন্টের সমান হবে।

অর্থাৎ $\overrightarrow{OA} \times \vec{P} + \overrightarrow{OB} \times \vec{Q} = \overrightarrow{OC} \times \vec{R}$



...ল বা জোড়: দুইটি সমমানের বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি ভিন্ন রেখা ...বরে ক্রিয়ারত হলে, এরা একটি যুগল বা জোড় গঠন করে।



যুগল বা জোড়

...জোড়ের যে কোন একটি বল ও তার বাহুর গুণফলকে জোড়ের ভ্রামক বা ...মেন্ট বলে। সুতরাং, জোড়ের ভ্রামক = F.AB = Fx।

...একই সমতলে অবস্থিত দুইটি জোড়ের মোমেন্ট সমমানের এবং একই ...বিশিষ্ট হলে, ঐ জোড়দ্বয় একে অপরের সমতুল্য (equivalent) হবে।

...অনড় বস্তুর উপর একই সমতলে ক্রিয়ারত যে কোন সংখ্যক জোড় ...টি মাত্র জোড়ের সমান এবং জোড়ের মোমেন্ট প্রদত্ত জোড়সমূহের ...মেন্টের বীজগাণিতিক যোগফলের সমান।

...অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত এবং এই সমতলের অবস্থিত দুইটি জোড়ের ...মেন্ট সমান ও বিপরীত হলে, তারা ভারসাম্য সৃষ্টি করে।

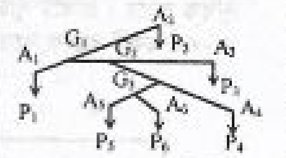
...একই সমতলে অবস্থিত একটি বল ও একটি জোড় প্রদত্ত বলের সমান ও ...ন্তরাল এবং একটি মাত্র বলের সমান।

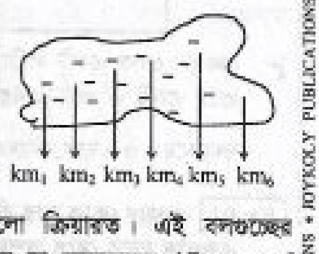
...বলগুলো একতলীয় বলের ক্ষেত্রে সমতলে অবস্থিত তিনটি অসমরেখ বিন্দুর ...প্রত্যেকটির চারিদিকে ঐ বলগুলোর মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য ...না হয়ে, একই মানের ধ্রুবক হলে বলগুলো একটি জোড়ের সমান হবে।

...অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত একগুচ্ছ একতলীয় বলকে একটি জোড় ও ...তলের যে কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত একটি একক বলে পরিণত করা যায়।

...কেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র:

...করি, $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ সমান্তরাল বলগুলো ... $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ বিন্দুতে ক্রিয়ারত। ... P_2 এর লব্ধির সাথে P_3 সংযোজন করে ...লব্ধি নির্ণয় করা যাবে। মনে করি, ঐ ...মান P এবং লব্ধির ক্রিয়াবিন্দুই উক্ত ...রাল বলগুচ্ছের কেন্দ্র।





...বার মনে করি, $m_1, m_2 \ldots m_n$ ভরের n ...বস্তু $A_1, A_2 \ldots A_n$ বিন্দুতে দৃঢ়ভাবে ...আছে। তাহলে মনে করা যায় যে ঐ ...বিন্দুতে $m_1, m_2 \ldots$ এর সমানুপাতিক ... $km_2 \ldots km_n$ সমমুখী সমান্তরাল বলগুলো ক্রিয়ারত। এই বলগুচ্ছের ...কে ঐ ভরগুলো দ্বারা গঠিত বস্তুর ভরকেন্দ্র বা জাড্যকেন্দ্র (Centre of ...tia) বলা হয়।

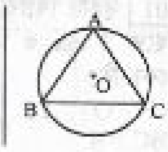
...টি বস্তুকনার উপর পৃথিবীর আকর্ষণের ফলে ঐ বস্তুর ভরের সমানুপাতিক একটি ...পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করছে। এই বলকে ঐ বস্তুর ওজন বলা হয়। কোন ...ভর m হলে তার ওজন w = mg. প্রতিটি জড় বস্তু অসংখ্য কণা দ্বারা গঠিত ...প্রতিটি কণার উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল ক্রিয়া করছে। পৃথিবীর তুলনায় ...অতি ক্ষুদ্র বিধায় এই বলগুচ্ছকে পরস্পর সমান্তরাল মনে করা যায়। এই ...কে পরস্পর সমান্তরাল মনে করা হয়। এই বলগুচ্ছের লব্ধি তাদের ...রাল এবং কণাগুলোর ওজনের সমষ্টি সমান।

...সুতরাং এই লব্ধি বল সমগ্র বস্তুটির ওজন বা ভার এবং বস্তুটিকে যেভাবে রাখা ...না কেন বস্তুটির যে বিন্দু দিয়ে এই লব্ধি খাড়া নিম্নমুখী দিকে ক্রিয়া করে সেই ...কে বস্তুর ভারকেন্দ্র (Centre of gravity) বলা হয়।

সুতরাং কোন বস্তু বা দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ কোন বস্তুকণা বা রাশির ভারের ক্রিয়ারেখা বস্তুটির সর্ব অবস্থানেই সর্বদা যে বিন্দুর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করে, সেই বিন্দুকে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র বলা হয়।

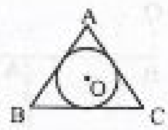
ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (Circumcentre):

কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়গামী বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (O) এবং ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ বলা হয়।



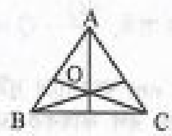
ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (Incentre):

কোন ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অঙ্কিত যে বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের বাহুত্রয় স্পর্শ করে সেই বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্ত এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (O) এবং ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ত্রিভুজের অন্তঃব্যাসার্ধ বলা হয়।



ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র (Circumcentre):

কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক কৌনিক বিন্দু থেকে তাদের বিপরীত বাহুর উপর লম্ব অংকন করলে এই লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র (O) বলা হয়।



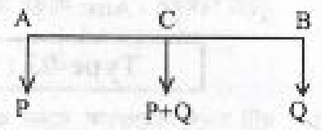
সমতলীয় বলজোট এর গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ অন্তর্ভুক্ত করা যায়

Type-01 : সদৃশ সমান্তরাল বল সংক্রান্ত

➢ কোন দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল দুটি পরস্পর সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q এর লব্ধি P+Q যার দিক P ও Q বলদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত এবং যার ক্রিয়াবিন্দু ঐ রেখাকে P ও Q বলদ্বয়ের ব্যস্তানুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore P.AC = Q.BC$

$\Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$



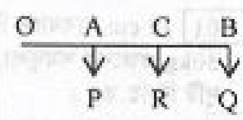
Ex-01 **একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 8, 6 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে শর্ত কোনটি?**

Sol[n]: এখানে, OA = 2m

OB = 8m

OC = 6m

$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$



$\Rightarrow \frac{P}{8-6} = \frac{Q}{6-2} = \frac{R}{8-2}$

$\Rightarrow \frac{P}{2} = \frac{Q}{4} = \frac{R}{6}$

$\therefore P:Q:R = 1:2:3$ **Ans.**

For practice:

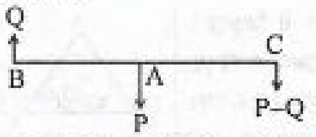
01. একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 3, 8, 15 মিটার দূরত্বে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকলে শর্ত কোনটি? **Ans:** P : Q : R = 5 : 7 : 12

Type-02 : বিসদৃশ অসমান সমান্তরাল বল সংক্রান্ত

➢ P ও Q মানের দুটি অসদৃশ অসমান সমান্তরাল বলের লব্ধির মান, R = P – Q এবং দিক বৃহত্তর বলের সমান্তরাল।

Ex-01 **দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 12 ডাইন তাদের একটি হতে 3 cm ও অপরটি হতে 4 cm দূরে ক্রিয়া করে। বলদ্বয়ের মান কোনটি?**

Sol^n: P – Q = 12 ......(i)
BC = 4
AC = 3

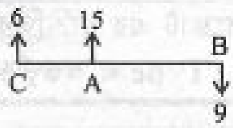


এখন, P.AC = Q.BC $\Rightarrow 3P = 4Q \Rightarrow P = \frac{4Q}{3}$

∴ (i) নং হতে, $\frac{4Q}{3} - Q = 12$ ∴ Q = 36 dyne এবং P = 48 dyne **Ans.**

Ex-02 **32 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 15 kg এবং 9 kg ওজনের দুইটি সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের লব্ধি ও তার প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর, যখন বল দুইটি বিসদৃশ।**

Sol : এখানে, AB = 32 cm
লব্ধি = 15 – 9 = 6 kg



$\therefore \frac{15}{BC} = \frac{9}{AC} = \frac{6}{32}$

∴ BC = 80 cm এবং AC = 48 cm অর্থাৎ লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু ক্ষুদ্রতম ওজন হতে 80 cm ও বৃহত্তম ওজন হতে 48 cm বাইরে। **Ans.**

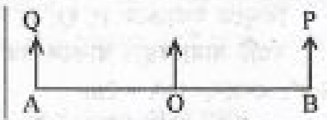
For practice:

01. 30 cm ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে 16 kg এবং 10 kg ওজনের দুইটি সমান্তরাল বল কার্যরত আছে। এদের লব্ধি ও তার প্রয়োগ বিন্দু নির্ণয় কর, যখন বল দুইটি বিসদৃশ। **Ans:** লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু ক্ষুদ্রতম ওজন হতে 80 cm বাইরে।

Type-03 : লব্ধির অবস্থান সংক্রান্ত

➢ দুটি সদৃশ সমান্তরাল বলের অবস্থান পরিবর্তন করলেও যদি লব্ধির অবস্থান একই থাকে তাহলে বলদ্বয় পরস্পর সমান।

* P × AO = Q × OB
** Q . AO = P . OB
∴ P = Q

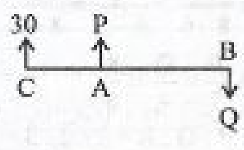


➢ দুটি সদৃশ বা বিসদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে লব্ধি বৃহত্তম বলের কাছাকাছি থাকে।

Ex-01 **12 cm ব্যবধানে ক্রিয়াশীল দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 30kg ওজনের সমতুল্য, যা বৃহত্তম বল থেকে 6 cm দূরে ক্রিয়া করে। বল দুটি নির্ণয় কর।**

Sol : এখানে, AB = 12 cm; AC = 6 cm

$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{30}{AB}$



$\Rightarrow \frac{P}{18} = \frac{Q}{6} = \frac{30}{12}$

∴ P = 45 kg-wt, Q = 15 kg-wt **Ans.**

For practice:

01. 16 cm ব্যবধানে ক্রিয়াশীল দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি 32 kg-wt, যা বৃহত্তম বল থেকে 8 cm দূরে ক্রিয়া করে। বল দুটি নির্ণয় কর। **Ans:** 48 kg-wt , 16 kg-wt

Type-04 : লব্ধির সরণ সংক্রান্ত

(i) P ও Q বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় পরস্পর d দূরত্বে অবস্থিত। ... বলের পরিমান x একক বৃদ্ধি পেলে,

লব্ধির সরণ $= \frac{d.x}{P-Q} = \frac{\text{মোট দূরত্ব} \times \text{ওজন বৃদ্ধি}}{\text{ওজনদ্বয়ের পার্থক্য}}$ [For M.C.Q]

Ex-01 **16N ও 11N বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় 5m দূরত্বে অবস্থিত ... পরবর্তীতে 18N ও 13N হয়, তাহলে লব্ধির সরণ কত?**

Sol^n: এখানে P = 16 N ,Q = 11 N , d = 5m , x = 18 – 16 = 2...

∴ লব্ধির সরণ $= \frac{5 \times 2}{16-11}$ N = 2m

For practice:

01. 12N ও 9N বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় 4m দূরত্বে অবস্থিত। যদি ... 15N ও 12N হয়, তাহলে লব্ধির সরণ কত? Ans ...

Type-05 : বলের সমান্তরাল অংশক ও বলের ভ্রামক

➢ F বলের ক্রিয়া রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু O হতে ঐ বলের ক্রিয়া রেখা... লম্বের দৈর্ঘ্য ON হলে, O বিন্দু সাপেক্ষে F বলের মোমেন্ট = F × ON

➢ ভ্রামক = বল × দূরত্ব × sinθ
যেখানে, θ = দণ্ড ও দণ্ডের উপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী ...

Ex-01 **15 পাউন্ড ওজনের একটি বল 20 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি দণ্ডের ... প্রয়োগ করা হলো। অপর প্রান্ত বিন্দুর চতুর্দিকে বলটির ভ্রামক ... ইহার ক্রিয়ারেখা দণ্ডের উপর লম্ব।**

Sol^n: ভ্রামক = বল × দূরত্ব × sin θ = 15 × 20 × sin 90°

$= 15 \times \frac{20}{12} \times \sin 90° = 25$ পাউন্ড-ফুট [∵ 12 ইঞ্চি = 1 ফুট]

For practice:

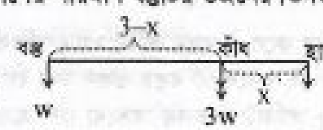
01. 6′ দীর্ঘ 3 পা. ও. -এর একটি সমরূপ দণ্ড, এর দুই প্রান্তস্থ দুটি খুঁটি ... সুস্থিত আছে। প্রতিটি খুঁটি সর্বোচ্চ 13 পা. ও. বহন করতে পারে ... ও.-এর একটি বস্তুকে দণ্ডের কোন অংশে ঝুলালে কোন খুঁটিই ... Ans ...

Type-06 :

➢ একজন লোক একটি লাঠিকে তার কাঁধের উপর আনুভূমিকভাবে নিয়ে ... প্রান্তে একটি w ওজনের বস্তু বহন করলে এবং তার কাঁধ হতে বস্তু ও হাতের ... যথাক্রমে a ও b হলে, কাঁধের উপর চাপের পরিমান $= \frac{w(a+b)}{b}$ [For M.C.Q]

Ex-01 **একজন লোক তার কাঁধে আনুভূমিকভাবে স্থাপিত 3m দীর্ঘ একটি ... একপ্রান্ত হাতে রেখে অপর প্রান্তে w ওজনের বস্তু বহন করছে। কাঁধের ... চাপের পরিমাণ বস্তুটির ওজনের তিনগুণ হলে কাঁধ হতে বস্তুর দূরত্ব ...**

Sol^n:

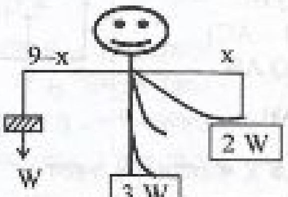


ধরি, কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব, b = x m
∴ কাঁধ হতে বস্তুর দূরত্ব, a = (3 – x) m
∴ কাঁধের উপর প্রযুক্ত বল $= \frac{w(a+b)}{b}$

প্রশ্নমতে, $3w = \frac{w(3-x+x)}{x} \Rightarrow x = 1$

∴ a = 3 – 1 = 2 m ∴ কাঁধ হতে বস্তুর দূরত্ব 2 মিটার।

একজন লোক তার কাঁধে আনুভূমিকভাবে স্থাপিত 9 ফুট দীর্ঘ একটি ... প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন ... করেন। কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুটির ওজনের তিনগুণ হলে কাঁধ ... হতে হাতের দূরত্ব-



..., কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব, b = x feet

কাঁধ হতে বস্তুর দূরত্ব, a = (9 − x) feet

কাঁধের উপর প্রযুক্ত বল $= \frac{w(a+b)}{b}$

...মতে, $3w = \frac{w(9-x+x)}{x} \Rightarrow x = 3$ feet

কাঁধ হতে হাতের দূরত্ব = 3 feet **Ans.**

For practice:

...জন লোক তার কাঁধে আনুভূমিকভাবে স্থাপিত 4m দীর্ঘ একটি লাঠির একপ্রান্ত ... রেখে অপর প্রান্তে w ওজনের বস্তু বহন করছে। কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুটির ওজনের দ্বিগুণ হলে কাঁধ হতে বস্তুর দূরত্ব কত? **Ans.** $\frac{1}{2}$ m

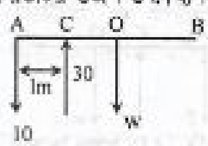
সমাধানসহ কিছু গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যাবলি

Ex-01 একটি সোজা সুষম রডের একপ্রান্তে 10kg ওজনের একটি বস্তু ঝুলানো ..., ঐ প্রান্ত হতে 1m দূরে একটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থির থাকে। খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 30kg ওজন হলে রডটির ওজন ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর

এখানে, AC = 1m

∴ 10 + w = 30

∴ w = 20kg



আবার, w ও 10 সমমুখী সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়ারত

10.AC = w.CO

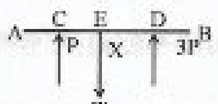
$\Rightarrow 10 \times 1 = 20(AO - AC) \Rightarrow 10 = 20(AO - 1)$

$\therefore AO = \frac{3}{2}$ মি. $\therefore$ রডটির দৈর্ঘ্য $AB = 2\times\frac{3}{2} = 3$ মি.

রডটির ওজন 20kg ও দৈর্ঘ্য 3 মি. **Ans.**

Ex-02 একটি ভারী সুষম বীমের প্রান্তদ্বয় হতে a ও b দূরত্বে কাঁধের ঠেস দিয়ে দুইটি লোক তাকে ভারসাম্যে রেখেছে। একজনের কাধের উপর চাপ অপর জনের কাধের উপর চাপের r গুণ হলে বীমটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, AB ভারী বীমের ওজন w। বলটি বীমের মধ্যবিন্দু E তে ক্রিয়ারত এবং মনে করি A হতে a দূরত্বে C বিন্দুতে এবং B হতে b দূরত্বে D বিন্দুতে অবস্থিত দুইজন লোকের কাধের উপর বীমটি স্থিরাবস্থায় আছে।



প্রশ্নমতে, A বিন্দুতে চাপ P হলে B বিন্দুতে চাপ হবে rP।

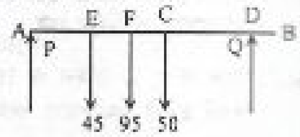
$\therefore P \times CE = rP \times DE \Rightarrow \frac{1}{2}AB - a = r\left(\frac{1}{2}AB - b\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}AB(1-r) = a - rb \therefore AB = \frac{2(rb-a)}{r-1}$ = বীমটির দৈর্ঘ্য **Ans.**

Ex-03 4 মি. দীর্ঘ এবং 50kg ওজনের একটি তক্তা AB দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে অবস্থান করে। একটি খুঁটি A বিন্দুতে এবং অপরটি B বিন্দু হতে 0.5 মি. ভিতরে। A হতে 0.8 মি. দূরে তক্তার উপর 45kg ওজনের একজন লোক দাড়িয়ে থাকলে খুঁটি দুইটির চাপ নির্ণয় কর।

Solⁿ: ধরি, A খুঁটির উপর চাপ P এবং D খুঁটির উপর চাপ Q।

মনে করি, লব্ধি বল F বিন্দুতে ক্রিয়াশীল



তাহলে P + Q = 45 + 50 = 95

আবার, 45 × EF = 50 × CF

$\Rightarrow 9 \times EF = 10 \times (CE - EF) \Rightarrow 19EF = 10(AC - AE)$

$\Rightarrow 19EF = 10\left(2 - \frac{4}{5}\right) \quad \therefore EF = \frac{12}{19}$

আবার, P × AF = Q × DF ------- (i)

$AF = \frac{4}{5} + \frac{12}{19} = \frac{136}{95}$

$DF = AD - AF = \frac{7}{2} - \frac{136}{95} = \frac{393}{190}$

(i) নং হতে, $(95 - Q).\frac{136}{95} = Q \times \frac{393}{190}$

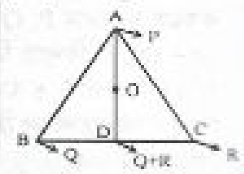
$\therefore Q = \frac{272}{7}$ Kg-wt $\therefore P = 95 - \frac{272}{7} = \frac{393}{7}$ Kg-wt **Ans.**

Ex-04 ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত; তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের লম্ব কেন্দ্রগামী হলে প্রমাণ কর যে,

i. $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

ii. $P(b^2 + c^2 - a^2) = Q(c^2 + a^2 - b^2) = R(a^2 + b^2 - c^2)$

Solⁿ: B ও C বিন্দুতে ক্রিয়ারত Q ও R বলের লব্ধি (Q + R) বল D বিন্দুতে ক্রিয়ারত।



∴ Q.BD = R.CD

$\Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{CD}{BD}$ ------- (i)

যেহেতু তাদের লব্ধি লম্বকেন্দ্রে ক্রিয়ারত সেহেতু লম্বকেন্দ্র AD রেখার উপর থাকবে কারণ AD রেখা BC রেখার উপর লম্ব।

$\frac{Q}{R} = \frac{\frac{CD}{AD}}{\frac{BD}{AD}} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\cot C}{\cot B} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{\tan B}{\tan C}$

$\therefore \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B}$

$\therefore \frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

ii. উপরের অংশ হতে, $\frac{P}{\tan A} = \frac{Q}{\tan B} = \frac{R}{\tan C}$

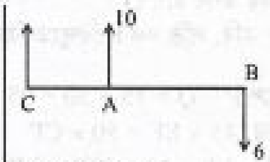
$\Rightarrow \frac{P\cos A}{\sin A} = \frac{Q\cos B}{\sin B} = \frac{R\cos C}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{P.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = \frac{Q \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}}{\frac{b}{2R}} = \frac{R \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{c}{2R}}$

$\therefore P(b^2+c^2-a^2) = Q(a^2+c^2-b^2) = R(a^2+b^2-c^2)$ **(Proved)**

Ex-05 কোন সরলরেখার উপর 24 সে.মি. ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে যথাক্রমে 6 ডাইন ও 10 ডাইন মানের দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করছে। প্রত্যেকের সাথে সমপরিমাণ বল যোগ করলে তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 12 সে.মি. দূরে সরে যায়। প্রত্যেকের সাথে কি পরিমাণ বল যোগ করা হয়েছে তা নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, 6 ডাইন ও 10 ডাইন বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলদ্বয় AB সরলরেখার উপর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যেখানে AB = 24cm।



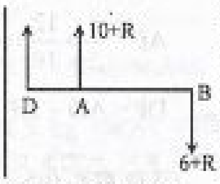
মনে করি, এদের লব্ধি BA রেখার C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

$\therefore 10.AC = 6.BC$

$\Rightarrow 10AC = 6(AB + AC) \Rightarrow 4AC = 6 \times 24$

$\therefore AC = 36cm$

মনে করি, প্রত্যেকের সাথে R পরিমাণ বল যোগ করা হলো এবং লব্ধি 12cm দূরে সরে যায়।



$\therefore AD = 12 + 36 = 48cm$

এবং $(10+R)AD = (6+R)BD$

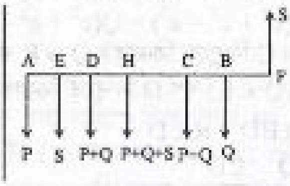
$\Rightarrow (10+R)AD = (6 + R)(AB+AD) \Rightarrow 4.AD = (6 + R) \times 24$

$\Rightarrow AD = (6 + R)6 \Rightarrow 48 = (6 + R)6$

$\therefore R = 2$ ডাইন **Ans.**

Ex-6 কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q এর সাথে একই সমতলে b দূরত্বে দুটি সমান S মানের বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলকে সংযুক্ত করলে, দেখাও যে, মিলিত বলগুলোর লব্ধি $\frac{bS}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

Sol^n: মনে করি, A ও B বিন্দুতে কার্যরত যথাক্রমে P, Q এর লব্ধি (P + Q), C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। E ও F বিন্দুদ্বয় S, S মানের দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে যেখানে EF = b.



ধরি, C ও E তে কার্যরত বলদ্বয়ের লব্ধি (P + Q + S), H বিন্দুগামী

অতএব, $(P+Q)CH = S \times EH$

$\therefore CH = \frac{S}{P+Q} EH$ ----- (i)

আবার, H ও F বিন্দুতে কার্যরত বিসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি

$(P + Q + S) - S = P + Q$, D বিন্দুগামী

$\therefore (P + Q + S)DH = S \times DF$

$\Rightarrow \frac{DF}{P+Q+S} = \frac{DH}{S} \Rightarrow \frac{DF-DH}{DH} = \frac{P+Q+S-S}{S}$

$\Rightarrow \frac{HF}{DH} = \frac{P+Q}{S}$

$\therefore DH = \frac{S}{P+Q}.HF$ ---------- (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow$

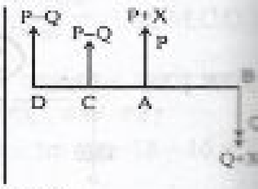
$DH + CH = \frac{S}{P+Q}(FH + EH)$

$\therefore CD = \frac{S}{P+Q}.EF \therefore CD = \frac{bS}{P+Q}$

$\therefore$ লব্ধি $\frac{bS}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যায়। **(Showed)**

Ex-07 দুটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q(P > Q) যথাক্রমে বিন্দুতে ক্রিয়ারত। P এবং Q এর প্রত্যেককে X পরিমাণে বৃদ্ধি দেখাও যে, লব্ধি $d = \frac{X}{P-Q}AB$ দূরত্বে সরে যাবে।

Sol^n: এখানে, $P.AC = Q.BC$



$\Rightarrow P.AC = Q(AB + AC)$

$\Rightarrow (P - Q)AC = Q.AB$

$\therefore AC = \frac{Q}{P-Q}AB$

P ও Q এর প্রত্যেককে X পরিমাণে বৃদ্ধি করলে

A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত বলদ্বয় যথাক্রমে P + X এবং Q + X

মনে করি, তাদের লব্ধি বর্ধিত BA এর উপরস্থ D বিন্দুতে ক্রিয়া করে

তাহলে, $(P + X)AD = (Q + X)BD \Rightarrow (P + X)AD$

$= (Q + X)AB + (Q + X)AD \Rightarrow (P - Q)AD = (Q + X)AB$

$\therefore AD = \frac{Q+X}{P-Q}AB$

ধরি, লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু যে দূরত্বে সরে যায় তার পরিমাণ d

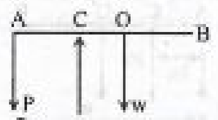
$d = AD - AC = \frac{Q+X}{P-Q}AB - \frac{Q}{P-Q}AB$

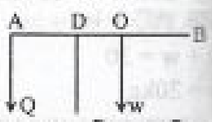
$\therefore d = \frac{X}{P-Q}AB$ **(Showed)**

Ex-08 একটি ভারী সুষম তক্তার একপ্রান্তে P মানের ওজন স্থাপন প্রান্ত থেকে a দূরত্বে একটি খুঁটির উপর তক্তাটি অনুভূমিকভাবে এবং একই প্রান্তে Q মানের ওজন স্থাপন করলে প্রান্তটি থেকে b খুঁটির উপর তক্তাটি স্থির থাকে দেখাও যে, তক্তার ওজন = $\frac{Pa-Qb}{b-a}$

তক্তার দৈর্ঘ্য $\frac{2ab(P-Q)}{Pa-Qb}$

Sol^n:





মনে করি, AB সুষম তক্তার ওজন w যা তার মধ্যবিন্দু O দিয়ে বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করে এবং তক্তার দৈর্ঘ্য l।

এখানে, AC = a এবং AD = b

$\therefore P.a = w.\left(\frac{l}{2} - a\right)$ ------- (i)

এখন তক্তার A বিন্দুতে Q ওজন স্থাপন করা হল। তক্তাটি b দূরত্বে D বিন্দুতে একটি খুঁটির উপর সাম্যাবস্থায় আছে।

$\therefore Q.b = w\left(\frac{l}{2} - b\right)$ ------------ (ii)

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $Pa - Qb = w\left(\frac{l}{2} - a - \frac{l}{2} \dots\right.$

$\therefore w = \frac{Pa-Qb}{b-a}$ (i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে, $\frac{Pa}{Qb} = \frac{w\left(\frac{l}{2} - a\right)}{w\left(\frac{l}{2} - b\right)}$

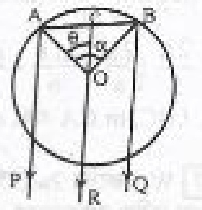
$\Rightarrow Pa\left(\frac{l}{2} - b\right) = Qb\left(\frac{l}{2} - a\right) \Rightarrow \frac{l}{2}(Pa - Qb) = ab(P - Q)$

$\therefore l = \frac{2ab(P-Q)}{Pa-Qb}$ **(Showed)**

দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q যথাক্রমে একটি উলম্ব বৃত্তের A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত। বল দুইটির লব্ধি বৃত্তের কেন্দ্র O গামী হলে এবং OA এর সাথে θ কোণে আনত থাকলে দেখাও যে,

$\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ যেখানে $\angle AOB = \alpha$

দুটি সদৃশ সমান্তরাল P ও Q যথাক্রমে উলম্ব বৃত্তটির A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। তাদের লব্ধি AB এর উপরিস্থিত C বিন্দু এবং বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দু দিয়ে যায়। $\angle AOC = \theta$ এবং $\angle AOB = \alpha$.



আমরা পাই, $P.AC = Q.BC$

$\Rightarrow P.\dfrac{AC}{OC} = Q.\dfrac{BC}{OC}$ ---------- (i)

ΔOCA এ, $\dfrac{AC}{\sin\theta} = \dfrac{OC}{\sin OAC}$ $\therefore \dfrac{AC}{OC} = \dfrac{\sin\theta}{\sin OAC}$

ΔOCB এ, $\dfrac{BC}{\sin(\alpha-\theta)} = \dfrac{OC}{\sin OBC}$ $\therefore \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin OBC}$

(i) নং হতে, $P.\dfrac{\sin\theta}{\sin OAC} = Q.\dfrac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin OBC}$

$\Rightarrow P\sin\theta = Q\sin(\alpha-\theta)$

[$\because OA = OB$; $\angle OAB = \angle OBA$ অর্থাৎ $\angle OAC = \angle OBC$]

$\Rightarrow P\sin\theta = Q\sin\alpha\cos\theta - Q\cos\alpha\sin\theta$

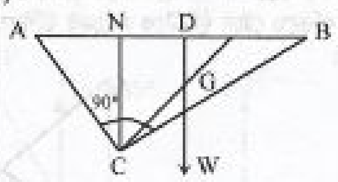
$\Rightarrow P\tan\theta = Q\sin\alpha - Q\cos\alpha\tan\theta$

$\Rightarrow P\tan\theta + Q\cos\alpha\tan\theta = Q\sin\alpha$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ **(Showed)**

Ex-10 ABC এর সমকোণী ত্রিভুজাকৃতি পাতটিকে এর অতিভুজ AB এর D বিন্দুতে ঝুলানো হয়েছে। স্থিতাবস্থায় AB অনুভূমিক হলে দেখাও যে, $AD : DB = (b^2+c^2) : (c^2+a^2)$

ধরি ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G এবং এর ওজন w. $AC \perp CB$ $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$ যেহেতু পাতটি D বিন্দুতে ঝুলানো এবং স্থিতাবস্থায় আছে,



এর ওজনের কার্যরেখা DG এবং উলম্ব। $CN \perp AB$, A, B, C বিন্দুতে W এর অংশক $\dfrac{W}{3}, \dfrac{W}{3}, \dfrac{W}{3}$। C বিন্দুতে $\dfrac{W}{3}$ ওজন NC বরাবর কার্যরত। A ও B বিন্দুতে এ বলের অংশক $\dfrac{W.BN}{3c}$ ও $\dfrac{W.AN}{3c}$।

A বিন্দুতে মোট ওজন $= \dfrac{W}{3} + \dfrac{W.BN}{3c}$ এবং B বিন্দুতে মোট ওজন $\dfrac{W}{3} + \dfrac{W.AN}{3c}$, এ বল দুটির লব্ধি D বিন্দুগামী।

সুতরাং, $\left(\dfrac{W}{3} + \dfrac{W.BN}{3c}\right).AD = \left(\dfrac{W}{3} + \dfrac{W.AN}{3c}\right).BD$

$\Rightarrow AD : BD = (c + AN) : (c + BN)$

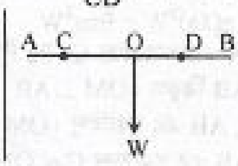
$\Rightarrow AD : BD = (c + b\cos A) : (c + a\cos B)$

$\Rightarrow AD : BD = \left(c + b.\dfrac{b}{c}\right) : \left(c + a.\dfrac{a}{c}\right) = \dfrac{b^2+c^2}{c} : \dfrac{c^2+a^2}{c}$

$\therefore AD : BD = (b^2+c^2) : (a^2+c^2)$ **(Showed)**

Ex-11 30cm দূরবর্তী একই অনুভূমিক রেখায় দুইটি কিলকের উপর একটি সমরূপ দণ্ড স্থাপিত। কিলকদ্বয়ের উপর চাপের অনুপাত 2 : 1 হলে দণ্ডের মধ্যবিন্দু হতে কিলক দুইটির দূরত্ব কত?

Sol^n: ধরি, C ও D বিন্দুতে অবলম্বনের উপর চাপের অনুপাত 2:1 এবং CD = 30cm। C ও D বিন্দুতে W এর অংশক $\dfrac{W}{CD}\times OD$ এবং $\dfrac{W}{CD}\times OC$ $\therefore \dfrac{\frac{W}{CD}\times OD}{\frac{W}{CD}\times OC} = \dfrac{2}{1}$

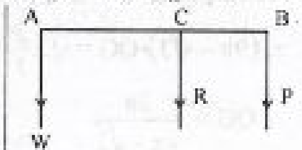


$\Rightarrow \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow \dfrac{OD+OC}{OC} = \dfrac{2+1}{1} \Rightarrow \dfrac{CD}{OC} = \dfrac{3}{1}$

$\therefore OC = 10$ সে.মি. $\therefore OD = 20$ সেমি **Ans.**

Ex-12 এক ব্যক্তি তাঁর কাঁধে অনুভূমিকভাবে স্থাপিত 9 মিটার দীর্ঘ একটি লাঠির এক প্রান্তে W ওজনের বস্তু বহন করে। তার কাধ হতে হাতের দূরত্ব কত হলে কাঁধের চাপ 3W হবে? কখন তার কাঁধে চাপের পরিমাণ ক্ষুদ্রতম হবে? ক্ষুদ্রতম চাপ কত?

Sol^n: AB দণ্ডের দৈর্ঘ্য 9 মি, A প্রান্তে W ওজনের বস্তু বাঁধা আছে। C কাঁধের অবস্থান এবং B প্রান্তে হাত দ্বারা P বলের চাপ দেয়। এর ফলে কাঁধে যে চাপ পরে তার পরিমাণ R।



$\therefore W + P = R$ এবং $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{P}{W}$

$\dfrac{AC+BC}{BC} = \dfrac{P+W}{W} \Rightarrow \dfrac{9}{BC} = \dfrac{R}{W}$

কাধে চাপ 3W হলে $\dfrac{9}{BC} = \dfrac{3W}{W}$

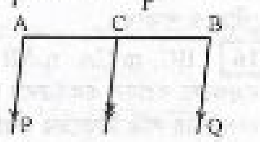
$\therefore BC = 3$ মিটার $\quad \therefore BC \le 9$ মিটার

$R = \dfrac{9W}{BC} \ge \dfrac{9W}{9} = W$

$\therefore$ R এর ক্ষুদ্রতম মান = W এবং তখন BC = 9 মি. **Ans.**

Ex-13 সদৃশ সমান্তরাল P ও Q বলের লব্ধি যে বিন্দু দিয়ে যায়, P কে R এবং Q কে S পরিমাণ বাড়ালে অথবা P ও Q কে Q ও R দ্বারা প্রতিস্থাপন করলেও লব্ধির অবস্থান পরিবর্তিত হয় না। দেখাও যে, $R = \dfrac{Q^2}{P}$ এবং $S = \dfrac{Q^3}{P^2}$

Sol^n: ধরি, P ও Q এর কার্যবিন্দু যথাক্রমে A ও B এবং এদের লব্ধি AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।



$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{Q}{P}$ ------------- (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{Q+S}{P+R}$ ---------- (ii)

তৃতীয় ক্ষেত্রে, $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{R}{Q}$ -------- (iii)

(i), (ii), (iii) নং হতে, $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{Q+S}{P+R} = \dfrac{R}{Q} = \dfrac{S}{R}$ [১ম ও ২য় অনুপাত হতে]

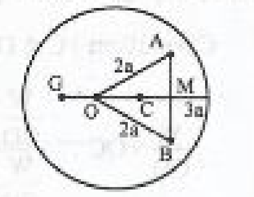
১ম এবং ৩য় অনুপাত হতে $R = \dfrac{Q^2}{P}$

৩য় এবং ৪র্থ অনুপাত হতে $S = \dfrac{R^2}{Q}$

$= \dfrac{1}{Q}\times\dfrac{Q^4}{P^2}$ [R এর মান বসিয়ে] $= \dfrac{Q^3}{P^2}$ $\therefore S = \dfrac{Q^3}{P^2}$ **(Showed)**

Ex-14 O কেন্দ্রবিশিষ্ট 3a ব্যাসার্ধের একটি সুষম বৃত্তাকার পাতের মধ্যে 2a দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজাকার ছিদ্র আছে। ত্রিভুজের একটি শীর্ষ O হলে প্রমাণ কর যে, O বিন্দু হতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{2a}{9\pi-\sqrt{3}}$

Sol^n: ধরি, একক ক্ষেত্রের ওজন = W



$\therefore$ বৃত্তাকার পাতের ওজন

$= \pi(3a)^2W = 9\pi a^2 W$

এবং এর ভারকেন্দ্র O. 2a দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট OAB ত্রিভুজ। $OM \perp AB$

$\therefore$ M, AB এর মধ্যবিন্দু। OM মধ্যমা।

ΔOAB এর ভরকেন্দ্র $C \in OM$ এবং এর ওজন

$= \frac{1}{2} \times 2a.2a\sin60°.\ W = a^2\sqrt{3}.W$

ΔOAB অপসারণ করলে অবশিষ্টাংশের ওজন

$= 9\pi a^2 W - a^2\sqrt{3}\ W$ এবং এর ভারকেন্দ্র $G \in$ বর্ধিত CO.

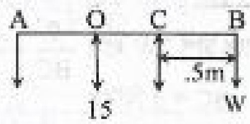
শর্তমতে, $(9\pi a^2 W - a^2\sqrt{3}\ W)OG = a^2\sqrt{3}\ W.CO$

$\Rightarrow (9\pi - \sqrt{3})\ OG = \sqrt{3}.\frac{2}{3}.\ OM = \sqrt{3}.\frac{2}{3}.2a\sin60° = 2a$

$\therefore OG = \frac{2a}{9\pi-\sqrt{3}}$ **(Proved)**

Ex-15 4 মিটার দীর্ঘ এবং 15 কেজি ওজনের একটি সুষম তক্তা AB দুইটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে স্থির আছে। একটি খুঁটি A প্রান্তে এবং অন্যটি B প্রান্ত হতে 0.5 মিটার ভিতরে অবস্থিত। তক্তাটিকে না উল্টিয়ে যে বালকটি তক্তাটির B প্রান্তে পৌঁছতে পারবে তার সর্বোচ্চ ওজন কত হবে?

Sol^n: মনে করি, সর্বোচ্চ W ওজনের বালকটি B প্রান্তে অবস্থানকালে A বিন্দুতে খুঁটির উর্ধ্বচাপ শূন্য হয়। তখন, 15 কেজি,



W কেজি ও C বিন্দুতে খুঁটির উর্ধ্বচাপ, এই তিনটি বল ভারসাম্য সৃষ্টি করে। এখন C বিন্দু সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে, $15.OC - W.BC = 0$

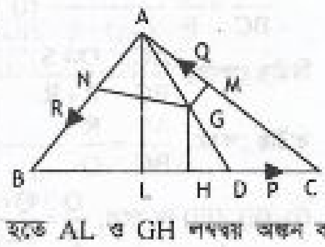
$\Rightarrow 15.OC = W.BC \Rightarrow W \times 0.5 = 15\left(\frac{1}{2}AB - BC\right)$

$\Rightarrow W \times 0.5 = 15\ (2-0.5)\ \therefore W = 45$ কেজি

$\therefore$ তক্তাটিকে না উল্টিয়ে সর্বোচ্চ 45 কেজি ওজনের একটি বালক B প্রান্তে পৌঁছতে পারবে। **Ans.**

Ex-16 l.BC, m.CA, n.AB বলত্রয় ABC ত্রিভুজের A, B, ও C ত্রিভুজের বাহুগুলো বরাবর একইক্রমে ক্রিয়া করে। $l + m + n = 0$ হলে দেখাও যে, বলগুলোর লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র দিয়ে যাবে।

Sol^n: ΔABC এর ভরকেন্দ্র G বিন্দু হলে তা মধ্যমা AD এর উপর থাকবে এবং 2:1 অনুপাতে মধ্যমাটিকে বিভক্ত করবে।



$\therefore \frac{GD}{AD} = \frac{1}{3}$

BC এর উপর A এবং G বিন্দুদ্বয় হতে AL ও GH লম্বদ্বয় অঙ্কন করি। ALD ও GHD ত্রিভুজের সদৃশ।

$\therefore \frac{GD}{AD} = \frac{GH}{AL} = \frac{1}{3}$ ধরি, $P = l$BC, Q = m.CA এবং R = n. AB

$\therefore$ ABC ত্রিভুজ হতে, $\Delta = \frac{1}{2} \times BC \times AL$

$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} \times a \times 3\ GH\ \therefore GH = \frac{2\Delta}{3a}$

অনুরূপভাবে, $GM = \frac{2\Delta}{3b}$ এবং $GN = \frac{2\Delta}{3c}$

l.BC, m.CA, n.AB বল তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল হলে ভরকেন্দ্র G এর সাপেক্ষে বল তিনটি মোমেন্টের যোগফল

$= P.\ GH + Q.GM + R.GN$

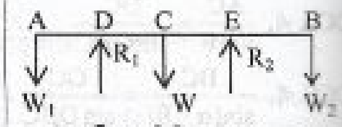
$= (l.\ BC)\ \frac{2\Delta}{3a} + (m.CA).\ \frac{2\Delta}{3b} + (n.AB).\ \frac{2\Delta}{3c}$

$= \frac{2\Delta}{3}\left(\frac{l.a}{a} + \frac{m.b}{b} + \frac{n.c}{c}\right) = \frac{2\Delta}{3}(l + m + n) = \frac{2\Delta}{3} \times 0 = 0$

$\therefore l$.BC, m.CA এবং n.AB বলত্রয়ের লব্ধি ভরকেন্দ্র G দিয়ে যাবে। (Showed)

Ex-17 W ওজনের 2a দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একখানা সুষম তক্তা b ব্যবধানে দুইটি খুঁটির উপর ভূমির সমান্তরালে অবস্থান করছে। তক্তাটিকে উল্টিয়ে না ফেলে এর প্রান্তদ্বয়ে একে একে বৃহত্তম যে পরিমাণ ওজন রাখা যায় তা যথাক্রমে W_1 ও W_2 হলে দেখাও যে, $\frac{W_1}{W+W_1} + \frac{W_2}{W+W_2} = \frac{b}{a}$

Sol^n: D ও E বিন্দুতে দুইটি খুঁটির উপর তক্তাটি রাখা হলে এই দুটি খুঁটির চাপ মনে করি R_1 এবং R_2



D বিন্দু সাপেক্ষে বলসমূহের মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হবে।

$\therefore W_1.\ AD - W.\ CD = 0 \Rightarrow W_1\ (AC - CD) - W.\ CD = 0$

$\Rightarrow W_1.\ a - CD(W+W_1) = 0\ \therefore CD = \frac{W_1 a}{W+W_1}$ ------(i)

E বিন্দুর সাপেক্ষে বলসমূহের মোমেন্টের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হবে।

$-W_2.\ BE + W.\ CE = 0$

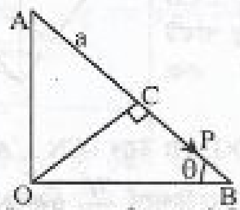
$\Rightarrow -W_2\ (BC - CE) + W.\ CE = 0 \Rightarrow -W_2.\ a + CE\ (W+W_2)$

$\therefore CE = \frac{W_2 a}{W+W_2}\quad \therefore CD + CE = \frac{W_1 a}{W+W_1} + \frac{W_2 a}{W+W_2} = b$

$\therefore \frac{W_1}{W+W_1} + \frac{W_2}{W+W_2} = \frac{b}{a}$ (Showed)

Ex-18 a দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দড়ির এক প্রান্ত খাড়া একটি খুঁটির সাথে ভূমি হতে কত উচ্চে বাঁধতে হবে যাতে ভূমির উপর একজন লোক দড়ির অপর প্রান্ত ধরে ন্যূনতম শক্তিতে টেনে খুঁটিটিকে সহজেই উল্টিয়ে ফেলতে পারে?

Sol^n:



মনে করি B বিন্দুতে দাঁড়ানো লোকটি a দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দড়ির এক প্রান্ত ধরে টানে এবং অপর প্রান্ত খুঁটিটির A বিন্দুতে বাধা আছে।

মনে করি $\angle OBA = \theta$ এবং $OC \perp AB$।

ধরি O বিন্দুর সাপেক্ষে P বলের মোমেন্ট M।

$\therefore M = P.OC = P\ OB\ \sin\theta = Pa\ \cos\theta\sin\theta$

$\Rightarrow P = \frac{M}{a\sin\theta\cos\theta} = \frac{2M}{a\sin2\theta}$

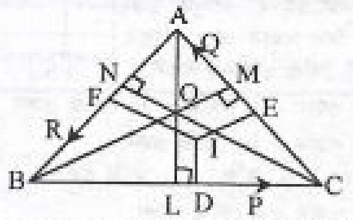
এখন নির্দিষ্ট মোমেন্ট M-এর ক্ষেত্রে সহজেই উল্টিয়ে ফেলার জন্য P-এর মান সর্বনিম্ন হবে। আবার P-এর মান সর্বনিম্ন হলে অবশ্যই $\sin2\theta$ সর্বোচ্চ হবে।

অর্থাৎ $\sin2\theta = 1$ i.e. $2\theta = \frac{\pi}{2}$ i.e. $\theta = \frac{\pi}{4}$ হবে। এইক্ষেত্রে খুঁটি দিয়ে বাধতে হবে OA উচ্চতায়।

$\therefore OA = AB\sin45° = \frac{a}{\sqrt{2}}$

ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর যথাক্রমে P, Q, R মানের ...লো ক্রিয়া করছে। তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা- ...কেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র দিয়ে গেলে দেখাও যে,

$$\frac{P}{\cos A(\cos B-\cos C)}=\frac{Q}{\cos B(\cos C-\cos A)}=\frac{R}{\cos C(\cos A-\cos B)}$$



...ABC এর BC, CA, AB বাহু বরাবর যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি ... ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র I এবং লম্ববিন্দু O বিন্দুগামী।

∴ অন্তকেন্দ্র I এর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্ট নিয়ে,

$Pr + Qr + Rr = 0$ [r = অন্তঃ ব্যাসার্ধ]

$\therefore P + Q + R = 0$ -------- (i)

∴ লম্বকেন্দ্র O বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলোর মোমেন্ট নিয়ে,

$P.OL + Q.OM + RON = 0$

$\Rightarrow P.BL \cot C + Q\, CM \cot A + R.AN\cot B = 0$

$\Rightarrow P.c.\cos B\frac{\cos C}{\sin C} + Q.a.\cos C\frac{\cos A}{\sin A} + R.b.\cos A\frac{\cos B}{\sin B} = 0$

$\Rightarrow 2R'(P\cos B\cos C + Q\cos C\cos A + R\cos A\cos B) = 0$

$[\because \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = 2R'$ (পরিব্যাসার্ধ)]

$\therefore P\cos B \cos C + Q\cos C\cos A + R\cos A\cos B = 0$ ----(ii)

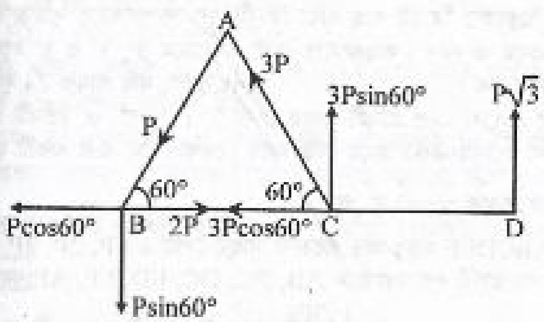
(i) নং ও (ii) নং হতে বজ্রগুণন করে,

$$\frac{P}{\cos A(\cos B-\cos C)}=\frac{Q}{\cos B(\cos C-\cos A)}=\frac{R}{\cos C(\cos A-\cos B)}$$

(Showed)

...20 একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু বরাবর P, 2P এবং 3P মানের তিনটি বল একইক্রমে ক্রিয়া করে। বলগুলির লব্ধির মান ও দিক এবং এটি দ্বিতীয় বলের ক্রিয়ারেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

Sol:



P, 2P এবং 3P মানের বলত্রয় যথাক্রমে AB, BC এবং CA বরাবর ক্রিয়াশীল। Δ ABC সমবাহু ত্রিভুজ। BC বরাবর বলগুলোর উপাংশ নিয়ে,

$2P - 3P\cos 60° - P\cos 60°$ = লব্ধি বলের উপাংশ

∴ লব্ধি বলের উপাংশ $= 2P - \frac{3P}{2} - \frac{P}{2} = 0$ অর্থাৎ BC বরাবর লব্ধি বলের উপাংশ শূন্য বলে লব্ধি বল BC রেখার উপর লম্ব। বাকী বিসদৃশ সমান্তরাল $3P\sin 60°$ এবং $P\sin 60°$ বলদ্বয়ের লব্ধিই হবে চূড়ান্ত লব্ধি।

∴ চূড়ান্ত লব্ধির মান $= 3P\sin 60° - P\sin 60° = P\sqrt{3}$ একক।

ধরি লব্ধির ক্রিয়ারেখা BC বাহুকে বহিস্থভাবে D বিন্দুতে ছেদ করে।

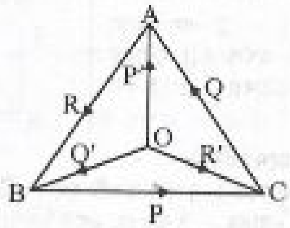
$\therefore P\sin 60°\, BD = 3P\sin 60°\, CD \therefore BD:CD = 3:1$

∴ লব্ধি BC রেখাকে বহিস্থঃভাবে 3:1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

∴ লব্ধির মান $P\sqrt{3}$ এবং লব্ধি 2P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব এবং 2P বলের ক্রিয়ারেখাকে বহিস্থঃভাবে 3:1 অনুপাতে বিভক্ত করে। **Ans.**

Ex-21 O, ΔABC এর পরিকেন্দ্র। P, Q, R, P′, Q′, R′ যথাক্রমে BC, CA, AB, OA, OB, OC বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে, $\frac{PP'}{a} + \frac{QQ'}{b} + \frac{RR'}{c} = 0$

Sol^n:



ধরি $OA = OB = OC = 2K$ (K = পরিব্যাসার্ধ)

A বিন্দুর চারদিকে মোমেন্ট নিয়ে,

$\frac{P}{a}(2\Delta ABC) + \frac{R'}{OC}(2\Delta AOC) - \frac{Q'}{OB}(2\Delta AOB) = 0$

$\Rightarrow \frac{PP'}{a}(\Delta ABC) + \frac{P'R'}{K}\Delta AOC - \frac{P'Q'}{K}\Delta AOB = 0$ ------ (i)

[উভয়পক্ষে P′ দিয়ে গুণ করে]

B বিন্দুর চারদিকে মোমেন্ট নিয়ে,

$\frac{Q}{b}(2\Delta ABC) + \frac{P'(2\Delta AOB)}{OA} - \frac{R'(2\Delta BOC)}{OC} = 0$

$\Rightarrow \frac{QQ'}{b}\Delta ABC + \frac{P'Q'\Delta AOB}{K} - \frac{Q'R'\Delta BOC}{K} = 0$ ------ (ii)

[উভয়পক্ষে Q′ দিয়ে গুণ করে]

C বিন্দু চারিদিকে মোমেন্ট নিয়ে

$\frac{R}{c}(2\Delta ABC) + \frac{Q'}{OB}(2\Delta BOC) - \frac{P'}{OC}(2\Delta AOC) = 0$

$\Rightarrow \frac{RR'}{c}\Delta ABC + \frac{Q'R'}{K}\Delta BOC - \frac{P'R'}{K}\Delta AOC = 0$ ------ (iii)

[উভয়পক্ষে R′ দিয়ে গুণ করে]

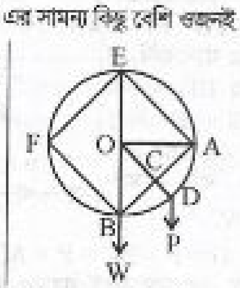
(i) + (ii) + (iii) ⇒

$\frac{PP'}{a}\Delta ABC + \frac{QQ'}{b}\Delta ABC + \frac{RR'}{C}\Delta ABC = 0$

$\therefore \frac{PP'}{a} + \frac{QQ'}{b} + \frac{RR'}{C} = 0$ **(Showed)**

Ex-22 W ওজনবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার টেবিলের চারটি পায়া টেবিলটির কিনারায় পরস্পর সমান দূরত্বে লাগান আছে। দেখাও যে, টেবিলটির উল্টিয়ে ফেলার জন্য $(\sqrt{2}+1)W$ এর সামান্য কিছু বেশি ওজনই যথেষ্ট।

Sol^n: AB বৃত্তাকার চাপের মধ্যবিন্দু D ও সর্বাধিক P বল প্রয়োগ করি যেন টেবিলটি উল্টায়।



ধরি, প্রয়োজনীয় বল P, AB রেখার সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে,

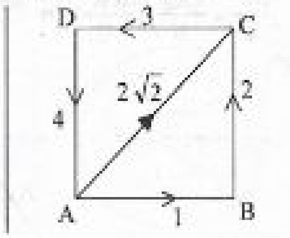
$P.CD > W.OC \Rightarrow P(OD - OC) > W.OA\sin 45°$

$\Rightarrow P(OA - OA\sin 45°) > W\, OA\sin 45°$

$\Rightarrow P > \frac{\frac{W}{\sqrt{2}}}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \Rightarrow P > \frac{W}{\sqrt{2}-1} \therefore P > W(\sqrt{2}+1)$ **(Showed)**

Ex-23 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$ মানের বলগুলি যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বাহু এবং AC কর্ণ বরাবর ক্রিয়ারত। দেখাও যে, বলগুলি সম্মিলিতভাবে একটি যুগল সৃষ্টি করে; যুগলটির ভ্রামক নির্ণয় কর।

Solⁿ: AC কর্ণ বরাবর $2\sqrt{2}$ মানের বলকে AB ও AD বরাবর $2\sqrt{2}\cos45° = 2$ এবং $2\sqrt{2}\sin45° = 2$ বল দ্বারা পরিবর্তন করা হল। এখন AB বরাবর 1+2=3 এবং DA বরাবর 4–2=2 বল ক্রিয়াশীল হবে।



প্রত্যেক বাহু দৈর্ঘ্য মনে করি, a

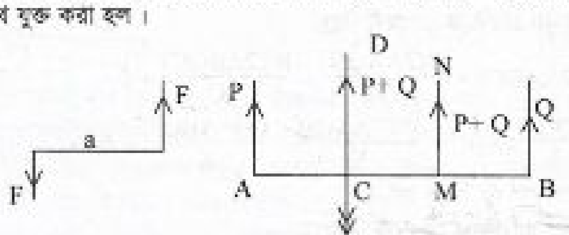
এখন AB ও CD বরাবর 3, 3 বল একটি যুগল সৃষ্টি করে যার ভ্রামক 3a.

আবার BC ও DA বরাবর 2, 2 বল যে যুগল উৎপন্ন করে তার ভ্রামক 2a.

এ যুগলের লব্ধি একটি যুগলের সমতুল্য যার ভ্রামক = 3a + 2a = 5a **Ans.**

Ex-24 P, Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল। একই সমতলে কার্যরত (F, a) যুগলকে উক্ত বল দুইটির সাথে যুক্ত করা হল। দেখাও যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা $\frac{Fa}{P+Q}$ দূরত্বে সরে যাবে।

Solⁿ: P, Q সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটি A ও B বিন্দুতে এবং তাদের লব্ধি P+Q বল, C বিন্দুতে CD বরাবর কার্যরত। একই তলে (F, a) যুগলকে তাদের সাথে যুক্ত করা হল।



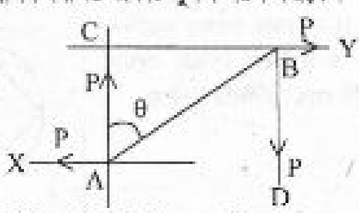
এখন, (F, a) যুগলটিকে (P+ Q, x) সমতুল্য যুগলে রূপান্তর করি এবং নতুন যুগলের একটি অংশক বল P+ Q কে DC বরাবর কার্যরত ধরি। সুতরাং অপর অংশক P+ Q বল CD হতে x দূরত্বে MN বরাবর কার্যরত। CD ও DC বরাবর কার্যরত P+ Q মানের বল দুইটি পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় করবে এবং লব্ধি হিসেবে আমরা MN রেখা বরাবর (P + Q) বলটি পাব।

যেখানে MC = x। এখন, $F.a = (P+Q)x \therefore x = \frac{Fa}{P+Q}$

সুতরাং P, Q বল দুইটি ও (F, a) যুগলের লব্ধি P ও Q বলের লব্ধি ক্রিয়া রেখা হতে $\frac{Fa}{P+Q}$ দূরত্ব সরে যাবে। **(Showed)**

Ex-25 G ভ্রামকবিশিষ্ট একটি যুগল গঠনকারী বল A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। বলের ক্রিয়ারেখা দুইটিকে এক সমকোণে ঘুরিয়ে দিলে তারা H ভ্রামকবিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করে। দেখাও যে, বল দুটি AB এর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করলে তারা $\sqrt{G^2+H^2}$ ভ্রামক বিশিষ্ট একটি যুগল গঠন করবে।

Solⁿ: প্রথম ক্ষেত্রে মনে করি, P বল AC ও BD বরাবর ক্রিয়া করে। B বিন্দু থেকে AC এর উপর BC লম্ব অঙ্কন করি। মনে করি, ∠BAC = θ



প্রশ্নানুযায়ী, $G = P \times BC = P \times AB\sin\theta$ ------ (i)

যুগল বলদ্বয় এক সমকোণে ঘুরালে বলগুলি মনে করি AX ও BY বরাবর ক্রিয়া করে। এক্ষেত্রে বল দুটির লম্বদূরত্ব AC।

$\therefore H = P \times AC = P \times AB\cos\theta$ -------- (ii)

(i) এবং (ii) বর্গ করার পর যোগ করে পাই,

$P^2.AB^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = G^2 + H^2$

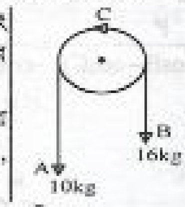
$\Rightarrow P^2.AB^2 = G^2 + H^2 \quad \therefore P.AB = \sqrt{G^2+H^2}$

[P.AB হচ্ছে AB এর উপর লম্বভাবে কার্যরত P, P বল দ্বারা গঠিত যুগলের ভ্রামক।] **(Showed)**

Ex-26 দুই প্রান্তে 10 কেজি ও 16 কেজি ওজন নিয়ে একটি মসৃণ ভারি শিকল এক মসৃণ পুলি অতিক্রম করে স্থিতাবস্থায় আছে। যদি শিকলে সৃষ্ট ... টান 20 কেজি ওজন হয়, তবে শিকলের ওজন নির্ণয় কর।

Solⁿ: শিকলের A প্রান্তে 10 কেজি ওজন এবং B প্রান্তে 16 কেজি ওজন ঝুলছে। পুলির উপর শিকলের উচ্চতম বিন্দু C।

C বিন্দু স্থির, কাজেই C বিন্দুর উভয় দিকে শিকলের টান সমান এবং বৃহত্তম, শিকলের টান 20 কেজি ওজনের সমান।



∴ AC অংশের ওজন +10 কেজি = 20 কেজি ওজন

∴ AC অংশের ওজন = 10 কেজি ওজন

BC অংশের ওজন +16 কেজি = 20 কেজি ওজন

∴ BC অংশের ওজন = 4 কেজি ওজন

∴ সম্পূর্ণ শিকলের ওজন = 10 + 4 = 14 কেজি ওজন

For practice:

01. O, ΔABC- এর পরিকেন্দ্র। একটি বল P, AO বরাবর ক্রিয়া করে ... দেখাও যে, B ও C বিন্দুতে P-এর সমান্তরাল উপাংশদ্বয়ের অনুপাত sin 2B : sin 2C.

02. একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলো বরাবর একইক্রমে P, 2P, 3P, 4P মানের বল কার্যরত। এদের লব্ধির মান ও ক্রিয়াদিক নির্ণয় কর।
Ans: $2\sqrt{2}P$, যা একটি কর্ণের সমান্তরালে P-এর কার্যরেখাকে ... অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

03. একটি বিন্দু হতে দুটি সমান দৈর্ঘ্যের রশি দ্বারা W ওজনবিশিষ্ট একটি সুষম দণ্ডের দুই প্রান্ত বেঁধে দণ্ডটিকে ঝুলানো হল। দণ্ডের মধ্যবিন্দু ও এক প্রান্ত হতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দুতে w ওজনের একটি বস্তু রাখা হল। দেখাও যে, রশি দুটির টানের অনুপাত (2W + 3w) : (2W + w).

04. তিনটি সমদূরবর্তী পায়াবিশিষ্ট একটি গোলাকার টেবিলের ওজন ... দেখাও যে, এর উপর যে কোন স্থানে সর্বোচ্চ W ওজন স্থাপন করলে টেবিল উল্টাবেনা।

05. 1, 2, 4, 5 পা. ওজনের চারটি বল কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি বরাবর ক্রমে ক্রিয়া করছে। দেখাও যে, এদের লব্ধি একটি কর্ণের সমান্তরাল ... লব্ধি প্রথম বলের ক্রিয়ারেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, তা নির্ণয় কর।
Ans: 2:3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত ...

06. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা তিনটি বল সম্পূর্ণভাবে সূচিত এবং একই ক্রমে কার্যরত। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5′, 5′ ও 8′ হলে, লব্ধি নির্ণয় কর। **Ans.** যুগল, যার ভ্রামক 24 ...

07. সমবাহু ΔABC-এর প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3′। 5 পা. ও. তিনটি সমান বল বাহুগুলো বরাবর একই ক্রমে কাজ করে। দেখাও যে, এরা একটি যুগল ... করে যার ভ্রামক $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ ফু. পা.।

08. সুষম ABCDEF ষড়ভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a। P, 2P, 3P, ... 6P মানের ছয়টি বল যথাক্রমে AB, BC, DC, ED, EF, AF বরাবর ... করলে, প্রমাণ কর যে, এরা $\frac{3\sqrt{3}Pa}{2}$ মোমেন্টের একটি যুগল সৃষ্টি করে।

09. n বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের (n – 1) কৌণিক বিন্দুর প্রত্যেকটিতে ... ওজনের একটি কণা স্থাপিত হয়েছে। এর পরিব্যাসার্ধ r হলে দেখাও যে, পরিকেন্দ্র হতে এদের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{r}{n-1}$.

10. ΔABC পাত হতে ΔADE অংশ অপসারিত হল, যেখানে D ∈ AB, E ∈ AC, DE || BC. BC ও DE হতে A-এর দূরত্ব যথাক্রমে a ... দেখাও যে, BC হতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র দূরত্ব = $\frac{a^2+ab-2b^2}{3(a+b)}$

11. R ব্যাসার্ধের একটি সুষম বৃত্তাকার চাকতিতে r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার ... করা হল। এদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব c হলে দেখাও যে, চাকতি ... হতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব = $\frac{cr^2}{R^2-r^2}$, যেখানে c + r < R

UET, KUET, CUET & RUET

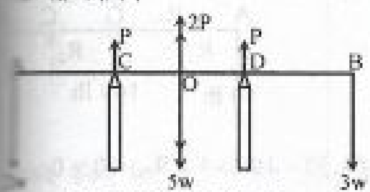
বিগত প্রশ্ন ও সমাধান] (সমতলীয় বল জোট)

Written Part

ET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

cm দৈর্ঘ্যের হালকা AB দণ্ডটি 10 cm ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর আনুভূমিক ভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W ও 3W ওজন ঝুলানো হলে, পেরেক দুইটির কোন অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে? [17-18]

Sol^n ধরি, C এবং D বিন্দুতে দুটি পেরেক অবস্থিত এবং এই বিন্দুদ্বয়ে চাপ পরস্পর সমান।



এখানে AB = 20 cm, CD = 10 cm

আবার,

যদি C, D বিন্দুদ্বয়ে চাপের মান P একক এবং A এবং B বিন্দুতে 2W ও 3W ওজনদ্বয়ের লব্ধি AB দণ্ডের O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। সাম্যাবস্থার জন্য C এবং D বিন্দুতে সমান P একক চাপের জন্য প্রতিক্রিয়াদ্বয়ের লব্ধির মান A এবং B বিন্দুতে 2W ও 3W ওজনের লব্ধির মানের সমান এবং একই রেখায় বিপরীত দিকে। সুতরাং সেই ক্ষেত্রে, $OC = OD = \frac{10}{2} = 5$ cm

এবং 2W. OA = 3W.OB

$\Rightarrow \frac{OA}{3} = \frac{OB}{2} = \frac{OA+OB}{3+2} = \frac{AB}{5} = \frac{20}{5} \Rightarrow \frac{OA}{3} = \frac{OB}{2} = 4$

OA = 12 cm এবং OB = 8 cm

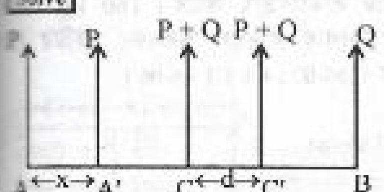
AC = OA – OC = 12 – 5 = 7cm.

এবং BD = OB – OD = 8 – 5 = 3 cm.

সুতরাং একটি পেরেক A বিন্দু থেকে 7cm এবং অপর পেরেকটি B বিন্দু থেকে 3cm ভিতরে অবস্থান করবে। **Ans.**

P এবং Q সমান্তরাল ও সদৃশ বল। P বলের ক্রিয়া রেখাকে এর সমান্তরাল বরাবর Q বলের দিকে x দূরত্বে সরানো হলে এদের লব্ধি d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{Px}{P+Q}$। [16-17]

Solve



$\frac{P}{BC} = \frac{P+Q}{AB}$

$\Rightarrow BC = \frac{P}{P+Q}AB$

আবার, $\frac{P}{BC'} = \frac{P+Q}{A'B} \quad \Rightarrow BC' = \frac{P}{P+Q}A'B$

$d = BC - BC' = \frac{P}{P+Q}(AB - A'B) = \frac{Px}{P+Q}$ **(Proved)**

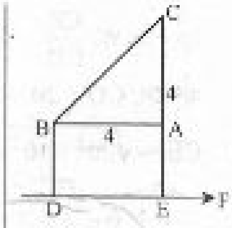
03. ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। সমান বাহু AB এবং AC প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার। A, B এবং C বিন্দুতে একটি বলের ভ্রামক যথাক্রমে 8, 8 এবং 16 kg-m। বলটির মান ও গতিপথ নির্ণয় কর। [12-13]

Solve এই অংকটির ক্ষেত্রে চিত্র সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ। চিত্র সমাধান করতে পারলে অংকটা সহজ।

ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB = AC = 4 মিটার।

ধরি, বলটির মান = F।

A ও B বিন্দু থেকে বলটির ভ্রামক যেহেতু সমান



∴ AE.F = BD.F

∴ AE = BD; আবার C তে ভ্রামক A ও B বিন্দুর ভ্রামকের দ্বিগুণ

∴ CE.F = 2.AE.F ∴ CE = 2AE

∴ AC = AE = 4 মিটার

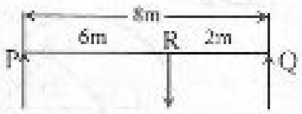
আবার, $F.AE = 8 \therefore F = \frac{8}{4} = 2N$

∴ বলটির মান, F = 2N এবং বলটি AB এর সমান্তরালে কাজ করে। **Ans.**

04. ভূমিতলের সমান্তরাল একই রেখাস্থ দু'টি মসৃণ পেরেক P ও Q এর উপর 8 মিটার দীর্ঘ একটি বাঁশের প্রান্তদ্বয় অবস্থান করছে। বাঁশটির উপরস্থ R বিন্দুতে একটি ভারী বোঝা ঝুলানো হল, যদি PR = 3RQ হয় এবং Q বিন্দুতে চাপ P বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 গ্রাম-ওজন বেশি হয়, তবে বোঝাটির ওজন কত। [09-10]

Solve ধরি, P বিন্দুতে চাপ W

∴ Q বিন্দুতে চাপ =(W+325)gm–wt



এখন, PR + QR = 8

⇒ 3QR + QR = 8 ∴ QR = 2m

অতএব, PR = 6m

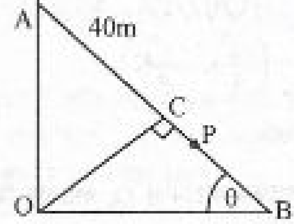
এখন, W × 6 = (W + 325) × 2 ⇒ 6W = 2W + 650

$\therefore W = \frac{650}{4} = 162.5$ gm-wt ∴ বোঝাটির ওজন,

R = W + W + 325 = 2 × 162.5 + 325 = 650 gm–wt **Ans.**

05. ভূমির উপর খাড়াভাবে দণ্ডায়মান একটি টেলিগ্রাফ থামের সাথে 40 মিটার দীর্ঘ একটি শক্ত দড়ির এক প্রান্ত বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত ধরে একটি লোক নির্দিষ্ট বলপ্রয়োগে টানছে। থামটির কোন স্থানে দড়ি বাঁধলে লোকটির পক্ষে তা উল্টিয়ে ফেলা সহজতম হবে? [06-07]

Solve



মনে করি B বিন্দুতে 40m দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দড়ির এক প্রান্ত P বলে টানে এবং অপর প্রান্ত টেলিগ্রাফ থামের A বিন্দুতে বাধা আছে। মনে করি ∠OBA = θ এবং OC ⊥ AB। ধরি, O বিন্দুর সাপেক্ষে P বলের মোমেন্ট M।

$\therefore M = P.OC = P.OB\sin\theta = P.40\cos\theta\sin\theta$

$\Rightarrow P = \frac{M}{40\sin\theta\cos\theta} = \frac{M}{20\sin 2\theta}$

এখন নির্দিষ্ট মোমেন্ট M -এর ক্ষেত্রে সহজেই উল্টিয়ে ফেলার জন্য P এর মান সর্বনিম্ন হবে।

এখন P এর মান সর্বনিম্ন হলে অবশ্যই sin2θ সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ

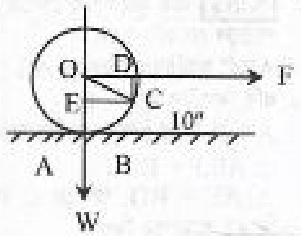
$\sin 2\theta = 1$ i.e. $2\theta = \frac{\pi}{2}$ i.e. $\theta = \frac{\pi}{4}$ হবে।

এইক্ষেত্রে টেলিগ্রাফ থামটি দড়ি দিয়ে বাধতে হবে OA উচ্চতায়।

$\therefore OA = AB\sin 45° = 40\frac{1}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$m. **Ans.**

06. একটি ভারী গাড়ির চাকার ওজন W এবং ব্যাসার্ধ 20 ইঞ্চি। চাকার কেন্দ্র বিন্দুতে ন্যূনতম কি পরিমাণ বল ভূমির সমান্তরালে প্রয়োগ করলে চাকাটি 10 ইঞ্চি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি খাড়া প্রতিবন্ধক পার হতে পারবে? [05-06]

Solve C বিন্দুর চারদিকে মোমেন্ট নিয়ে পাই, F.CD > W.CE



$\Rightarrow F > W.\dfrac{CE}{CD}$

এখানে, $CD = 20 - 10 = 10$

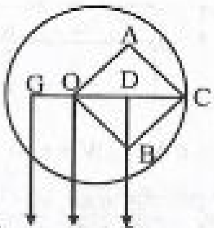
$CE = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300}$

$\therefore F > W.\dfrac{\sqrt{300}}{10}$

$\therefore$ ন্যূনতম বল $W.\dfrac{\sqrt{300}}{10}$ একক বা $\sqrt{3}W$ একক **Ans.**

07. একটি বৃত্তাকার পাতে একটি বর্গাকৃতির ছিদ্র করা হল যাতে বর্গের একটি কর্ণ বৃত্তের ব্যাসার্ধ হল। বৃত্তের ব্যাস 'a' হলে, দেখাও যে, বৃত্তের কেন্দ্র হতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\dfrac{a}{8\pi - 4}$ [99-00,95-96]

Solve



$OD = \dfrac{a}{4}$

$\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{8}\right)a^2k$ $\quad \dfrac{\pi a^2}{4}k$ $\quad \dfrac{a^2}{8}k$

ধরি, বৃত্তাকার পাতের প্রতি একক ক্ষেত্রের ওজন K।

সুতরাং পূর্ণ বৃত্তাকার পাতের ওজন $\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 K$ বা $\dfrac{\pi a^2}{4}K$ একক।

বর্গাকৃতি ছিদ্রের ওজন $= \left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 K = \dfrac{a^2}{8}K$ একক

অবশিষ্টাংশের ওজন $= \left(\dfrac{\pi a^2}{4}K - \dfrac{a^2}{4}K\right)$

$= \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{8}\right)a^2K$ একক

ধরি, পূর্ণ বৃত্তাকার পাতের ভারকেন্দ্র O, বর্গাকার ছিদ্রের ভারকেন্দ্র D এবং অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র G। তাহলে G বিন্দুতে $\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{8}\right)a^2K$ একক এবং D বিন্দুতে $\dfrac{a^2}{8}$ K একক বলদ্বয়ের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়ারত $\dfrac{\pi a^2}{4}$ K একক বল। সুতরাং সদৃশ সমান্তরাল বলের নীতি অনুসারে,

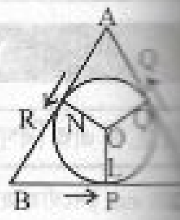
$\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{8}\right)a^2K.OG = \dfrac{a^2}{8}K.OD$

$\therefore OG = \dfrac{\frac{1}{8}\frac{a}{4}}{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}} = \dfrac{a}{8\pi - 4}$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র হতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\dfrac{a}{8\pi - 4}$ একক **(Showed)**

08. তিনটি বল কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির বরাবর একই ক্রমে ক্রিয়া... এদের যে কোন দুটির যোগফল তৃতীয়টির সমান কিন্তু বিপরীত ... হয়, তবে প্রমাণ কর যে, এদের লব্ধি ত্রিভুজটির অন্তঃকে... হবে? [98-99]

Solve দেওয়া আছে, $P + Q = -R$



$\Rightarrow P + Q + R = 0$

ধরি, ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র O,

$\therefore OL = OM = ON = r$

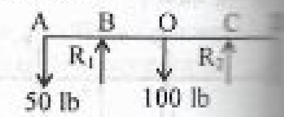
O বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলোর ভ্রামক নিয়ে পাই-

$P.r + Q.r + R.r = 0$

$\therefore$ এদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্রগামী **(Proved)**

09. একটি সমরূপ বার ABCD, যাহার দৈর্ঘ্য 20 ft এবং ওজন 100 ... এবং C বিন্দুতে দুটি অবলম্বনের উপর সুস্থিত আছে। দৈর্ঘ্য AB = ... BC = 10 ft এবং CD = 4 ft. A বিন্দুতে 50 পাঃ ওজন ঝুলিয়ে ... এবং C বিন্দুতে চাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। [95-96]

Solve AB = 6 ft
AO = 10 ft
BO = 4 ft
CD = 4 ft
OC = 6 ft



B বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে পাই, $6 \times 50 - 100 \times 4 + R_2 \times 10 = 0$

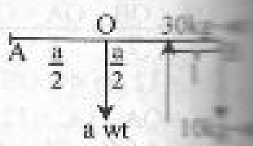
$\therefore R_2 = 10$ lb।

এখন, $R_1 = 150 - R_2 = (150 - 10)$ lb $= 140$ lb

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান

01. একটি সোজা সুষম রডের এক প্রান্তে 10 kg ওজনের একটি ... ঝোলানো হলে, ঐ প্রান্ত হতে 1m দূরে একটি খুঁটির উপর আনুভূমিক... স্থির থাকে। খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 30 kg wt হলে, রডটির ... ওজন নির্ণয় কর। [12-13]

Solve ধরি, রডটির প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ওজন = w এবং মোট দৈর্ঘ্য = a মি



$\therefore$ রডটির মোট ওজন = a.w kg–wt

$\therefore aw + 10 = 30$

$\Rightarrow a.w = 30 - 10 = 20$ kg-wt

আবার, $10 \times 1 = aw \times \left(\dfrac{a}{2} - 1\right)$

$\Rightarrow 10 = 20 \times \dfrac{a-2}{2}$

$\Rightarrow 10a - 20 = 10$

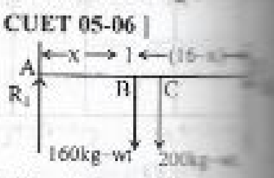
$\Rightarrow 10a = 30$

$\therefore a = 3m$ (দৈর্ঘ্য)

$\therefore$ ওজন = 20 kg-wt

02. 16 m দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট 200 kg ওজনের একটি সুষম বীমের দুই প্রান্তে ... দুইটি অবলম্বনের উপর বীমটি সাম্যাবস্থায় আছে। 160 kg ... একটি লোক বীমটির উপর কোথায় দাঁড়ালে অবলম্বন দুইটির ... পরিমাণের অনুপাত 1 : 2 হবে। [06-07 ; CUET 05-06]

Solve Here,



$R_1 + R_2 = 200 + 160 = 360$ kg-wt

A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে,

$0 + 160x + 200 \times 8 - R_2 \times 16 = 0 \Rightarrow R_2 = 10x + 100$

আবার $R_1 + R_2 = 360$

$\Rightarrow R_1 + 10x + 100 = 360$

$R_1 = 260 - 10x$

শর্তমতে, $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{10x + 100}{260 - 10x} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = 2m$ (A প্রান্ত হতে 2m দূরে)

ABC সমবাহু ত্রিভুজের CB, CA ও AB বাহু বরাবর যথাক্রমে তিনটি বল P, Q ও R ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি যদি ভরকেন্দ্রগামী এবং BC এর সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}P = Q = R$. [05-06]

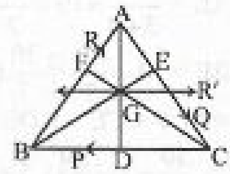
Solve ধরি, লব্ধি = R′

AD, BE ও CF মধ্যমা এবং G ভরকেন্দ্র

ধরি, AD = BE = CF = x

∴ মধ্যমা অপর বাহুর উপর লম্ব।

B বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে



$Q.BE = R' GD$

$\Rightarrow Qx = R'\frac{x}{3} \Rightarrow Q = \frac{R'}{3}$

A বিন্দুর চারদিকে মোমেন্ট নিয়ে

$P.AD = R'AG$

$Px = R'\frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{1}{2}P = \frac{R'}{3}$

C বিন্দুতে মোমেন্ট নিয়ে

$R.CF = R'.GD$

$\Rightarrow Rx = R'\frac{x}{3} \therefore R = \frac{R'}{3}$

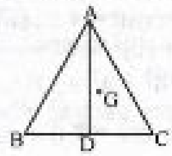
$\therefore \frac{1}{2}P = Q = R$ **(Proved)**

একই রকম দণ্ড দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের CA বাহু অপসারণ করা হলো এবং অবশিষ্টাংশকে A বিন্দুতে ঝুলানো হলো। সাম্যাবস্থায় BC বাহু অনুভূমিক হলে দেখাও যে, $\sin C = \sqrt{2}\sin\frac{1}{2}B$ [03-04]

Solve

ধরি, দণ্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ওজন W.

B বিন্দুর প্রেক্ষিতে মোমেন্ট নিয়ে

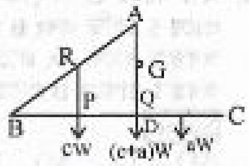


$cW \times BP + aW \times BQ$

$= (c + a)W \times BD$

$\Rightarrow c(BR\cos B) + a \times \frac{a}{2}$

$= (c + a)AB\cos B$



$\Rightarrow \frac{c^2}{2}\cos B + \frac{a^2}{2} = (c + a).c.\cos B$

$\Rightarrow 2ca\cos B = a^2 - c^2\cos B \Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = a^2 - c^2\cos B$

$\Rightarrow c^2(1 + \cos B) - b^2 \Rightarrow (2R)^2\sin^2 C \times 2\cos^2\frac{B}{2} = (2R)^2\sin^2 B$

$\Rightarrow 2\sin^2 C\cos^2\frac{B}{2} = 4\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \sin^2 C = 2\sin^2\frac{B}{2}$

$\therefore \sin C = \sqrt{2}\sin\frac{B}{2}$ **(Showed)**

একটি 2 ft লম্বা ও 30 lb ওজনের সমসত্ত্ব রড 1 ft দূরত্বের দুটি খুঁটির উপর অবস্থান করছে। যদি খুঁটি দুটির উপর চাপের অনুপাত 2:3 হয়, তবে রডের অবস্থান নির্ণয় কর। [99-00]

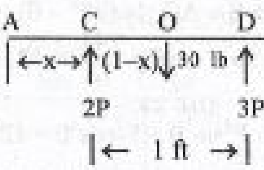
Solve $3P + 2P = 30$

$\Rightarrow P = 6$

A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$3P(1 + x) + x \times 2P = 30 \times 1$

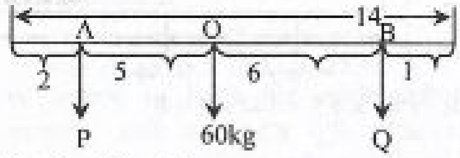
$\therefore x = \frac{12}{30}$ ft = 0.4ft



Ans.

06. 14 m দীর্ঘ ও 60 kg ওজনের একটি সুষম পাইপ A ও B দুই ব্যক্তি বহন করছে। A এর অবস্থান পাইপের এক প্রান্ত হতে 2m দূরে এবং B এর অবস্থান পাইপের অপর প্রান্ত হতে 1m দূরে। পাইপের ওজন A ও B এর মধ্যে কীভাবে ভাগ হবে তা নির্ণয় কর। [04-05]

Solve



$P + Q = 60$ .... (i)

$P.OA = Q.OB \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA} = \frac{6}{5} \Rightarrow P = \frac{6}{5}Q$ ... (ii)

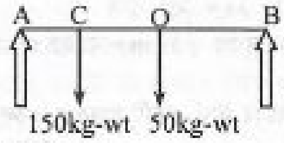
(i) নং হতে, $\frac{6}{5}Q + Q = 60 \Rightarrow 11Q = 60 \times 5 \therefore Q = 27.3$ kg-wt

$\therefore P = \frac{6}{5} \times 27.3 = 32.76$ kg-wt Ans.

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি লোহার দণ্ড AB যা 3 m লম্বা এবং যার ওজন 50 kg দুটি ভিত্তি A এবং B এর উপর অবস্থান করছে। 150 kg ওজনের একজন লোক উক্ত দণ্ডের উপর A হতে 1 m দূরত্বে অবস্থান করলে A ও B বিন্দুতে ভিত্তিদ্বয়ের উপর কি পরিমাণ চাপ প্রযুক্ত হবে? [13-14 ; RUET 07-08]

Solve



AB = 3m

AC = 1m

OA : OB = 1 : 1

AC : BC = 1 : (3–1) = 1 : 2

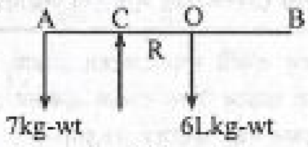
$\because$ A বিন্দুতে চাপের পরিমান $= \left(\frac{50}{2} + \frac{2}{3} \times 150\right)$ kg-wt = 125kg-wt

এবং B বিন্দুতে চাপের পরিমান $= \left(\frac{50}{2} + \frac{1}{3} \times 150\right)$ kg-wt = 75kg-wt

Ans.

02. 6 kg/m ওজনের একটি লৌহ দণ্ডের এক প্রান্তে 7 kg ওজনের একটি বস্তু ঝুলালে তার উক্ত প্রান্ত হতে 3 m দূরে একটি বিন্দুতে ভারসাম্য হয়। লৌহদণ্ডটির দৈর্ঘ্য বাহির কর। [09-10]

Solve



ধরি দণ্ডের দৈর্ঘ্য L m. ∴ দণ্ডের মোট ওজন = 6L kg-wt

$AC = 3,\ AB = L,\ OA = OB = \frac{L}{2};\ OC = \frac{L}{2} - 3$

শর্তমতে, $7 \times AC = 6L.OC$

$\Rightarrow 7 \times 3 = 6L\left(\frac{L}{2} - 3\right)$

$\Rightarrow 3L^2 - 18L - 21 = 0$

$\Rightarrow L^2 - 6L - 7 = 0 \therefore L = 7, -1$ কিন্তু $L \neq -1$

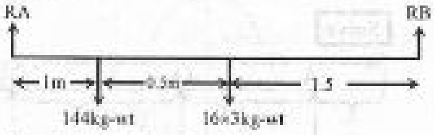
∴ দণ্ডের দৈর্ঘ্য, L = 7 m Ans.

03. 3m দীর্ঘ সমরূপ AB একটি বীমের ওজন 16 kg / m এবং তা A ও B বিন্দুতে দুটি খুটির উপর অবস্থান করছে। A বিন্দু হতে 1m দূরে বীমের উপর 144 kg ওজনের একটি লোক দাঁড়ালে, খুটির উপর কি পরিমাণ চাপ পড়বে তা নির্ণয় কর। [08-09]

Solve

A খুটির উপর চাপ = R_A

B খুটির উপর চাপ = R_B



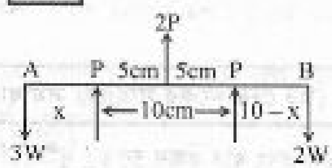
$\Sigma M_B = 0 \therefore -3 \times R_A + 48 \times 1.5 + 144 \times 2 = 0$

$\therefore R_A = 120$kg-wt

$R_B = (144 + 48 - 120)$ kg–wt = 72 kg-wt **Ans.**

04. 20 সে.মি দীর্ঘ একটি হালকা সোজা রড 10 সে.মি ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর এমনভাবে স্থাপিত যেন রডটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে 2 W ও 3 W ওজন ঝুলিয়া দিলে পেরেক দুইটির উপর সমান চাপ পড়ে। পেরেকদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় কর। [04-05]

Solve



$P + P = 2W + 3W \therefore P = \frac{5}{2}W$

$\therefore 3W \times (x + 5) = 2W \times (10 - x + 5)$

$\Rightarrow 3x + 15 = 30 - 2x \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$cm

$\therefore$ 2W ওজন থেকে $(10 - 3) = 7$cm দূরে

$\therefore$ A থেকে ১ম পেরেকের দূরত্ব = 3 cm এবং ২য় পেরেকের দূরত্ব 13cm

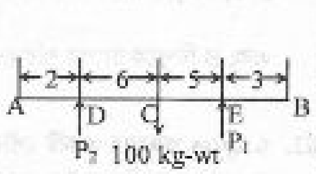
Ans.

05. 100 kg ওজনের 16 মিটার দীর্ঘ একটি সমরূপ তক্তা দুজন লোক মাথায় করে বহন করে। একজন এর একপ্রান্ত থেকে 2 মিটার দূরে এবং অন্যজন অপর প্রান্ত থেকে 3 মিটার দূরে থাকলে প্রত্যেকে কি পরিমাণ ওজন বহন করবে তা নির্ণয় কর। [03-04]

Solve $\frac{P_2}{5} = \frac{100}{11} = \frac{P_1}{6}$

$\therefore P_2 = \frac{500}{11}$ kg-wt

$\therefore P_1 = \frac{600}{11}$ kg-wt **Ans.**



RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. দুজন লোক 70kg ভরের একটি বস্তু একটি নগণ্য ভরের তক্তার উপর রেখে বহন করছে। কিরূপে বস্তুটিকে তক্তার উপর রাখলে একজন লোক অপরজনের চেয়ে 10kg-wt বেশী ওজন বহন করবে? [09-10]

Solve ধরি, তক্তার দৈর্ঘ্য = l

শর্তমতে, $p + 10 + p = 70$

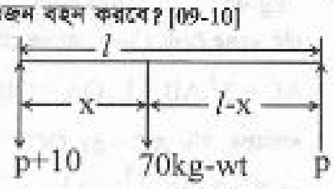
$\therefore p = 30$kg – wt

চিত্র হতে, $40x = 30\,(l - x)$

$\Rightarrow 70x = 30\,l \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{3}{7}$

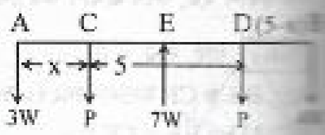
$\therefore x : l = 3:7 \therefore x:(l - x) = 3:(7 - 3) = 3:4$

এরূপ শর্ত মেনে রাখতে হবে। **Ans.**



02. 10ft দীর্ঘ একটি ওজনশূন্য সোজা দণ্ড 5ft ব্যবধানে দুইটি [illegible] উপর এমনভাবে স্থাপিত যেন দণ্ডটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে 3W এবং [illegible] ঝুলাইয়া দিলে পেরেক দুইটির উপর সমান চাপ পড়ে। [illegible] অবস্থান নির্ণয় কর। [08-09]

Solve



$AE = \frac{4}{3+4} \times 10 = \frac{40}{7}$ ft

$BE = 10 - \frac{40}{7} = \frac{30}{7}$ ft

এখন, $P \times CE = P.DE$

$\Rightarrow \frac{40}{7} - x = \frac{30}{7} - 5 + x \Rightarrow \frac{45}{7} = 2x$

$\therefore x = \frac{45}{14}$ ft, $BD = 5 - \frac{45}{14} = \frac{25}{14}$ ft

$\therefore$ পেরেকদ্বয়ের অবস্থান যথাক্রমে A বিন্দু হতে $\frac{45}{14}$ ft এবং B বিন্দু [illegible] দূরে অবস্থিত।

03. ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে [illegible] 3 একক। A, B, C বিন্দুতে একটি বলের ভ্রামক যথাক্রমে 0, [illegible] 16 একক। বলটির মান, দিক নির্ণয় কর। [06-07]

Solve ধরি, নির্ণেয় বল, P $\therefore -P \times BM = -12$

$\Rightarrow -P \times AB \sin\theta = -12$

$\Rightarrow P \sin\theta = 4$ ...(i)

আবার, $P \times CN = 16$

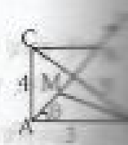
$\Rightarrow P\,AC \sin(CAN) = 16 \Rightarrow P \sin(90 - \theta) = 16$

$\Rightarrow P \cos\theta = 4$ .... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$ নং হতে

$P^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \therefore P = 4\sqrt{2}$ একক

(i) নং হতে পাই $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = 45°$, AB রেখার সাথে।

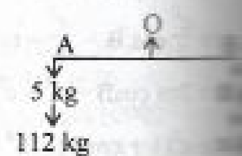


04. AB দণ্ডের O বিন্দুতে সুতা বেঁধে ঘরের ছাদ হতে ঝুলানো [illegible] প্রান্তে 5 কেজি এবং B প্রান্তে 8 কেজি ওজনের বস্তুকে ঝুলালে [illegible] অবস্থায় থাকে। A প্রান্তে 112 কেজি ওজনের বস্তু ঝুলালে দণ্ডটিকে [illegible] অবস্থায় রাখতে B প্রান্তে কত ওজনের বস্তু ঝুলাতে হবে? [05-06]

Solve

$\frac{AO}{BO} = \frac{5}{8}$ এবং $\frac{AO}{BO} = \frac{112}{x}$

$\therefore \frac{112}{x} = \frac{5}{8} \therefore x = 179.2$ kg **Ans.**



05. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, [illegible] একক। A, B, C বিন্দুতে F বলের মোমেন্ট যথাক্রমে 0, –25 [illegible] F এর মান, দিক নির্ণয় কর। [05-06]

Solve

এখানে $BC^2 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = CA^2 + AB^2$

$\therefore \angle BAC = 90°$।

এখানে, B বিন্দুতে ভ্রামক: $-F \times BL = -25$

$\Rightarrow F \times AB \sin\theta = 25 \Rightarrow F \sin\theta = 5$

এবং C বিন্দুতে ভ্রামক: $F \times CM = 144$....(i)

$\Rightarrow F \times AC \sin \angle CAM = 144$

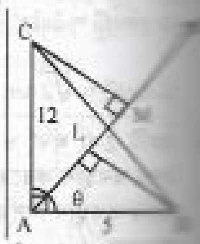
$\Rightarrow F \times AC \sin(90° - \theta) = 144$ $F \times AC \cos\theta = 144$

$\Rightarrow F \cos\theta = \frac{144}{12} = 12$......(ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow$

$\therefore F^2\sin^2\theta + F^2\cos^2\theta = 12^2 + 5^2$

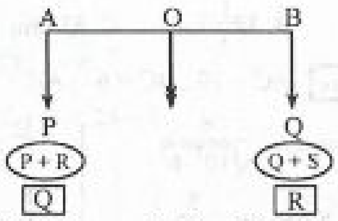
$\Rightarrow F^2 = 13^2 \therefore F = 13$ একক এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{5}{12} = 22.62°$



P ও Q মানের দুটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণ এবং Q কে S পরিমাণ বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P ও Q কে যথাক্রমে Q ও R দ্বারা পরিবর্তন করলেও লব্ধি একই বিন্দুতে কাজ করে। দেখাও যে,

$S = R - \dfrac{(Q-R)^2}{P-Q}$ । [03-04]

Solve



১ম ক্ষেত্রে, $\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}$, ২য় ক্ষেত্রে, $\frac{P+R}{Q+S} = \frac{OB}{OA}$, ৩য় ক্ষেত্রে, $\frac{Q}{R} = \frac{OB}{OA}$

$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{P+R}{Q+S} = \frac{Q}{R} = \frac{OB}{OA} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{P+R-P}{Q+S-Q} = \frac{Q}{R}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} = \frac{Q}{R} = \frac{Q-R}{R-S} = \frac{P-Q}{Q-R} \Rightarrow \frac{(Q-R)^2}{P-Q} = R - S$

$\therefore S = R - \frac{(Q-R)^2}{P+Q}$ **(Showed)**

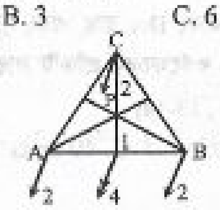
MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

ABC ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু A, B, C তে তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল 2, 2, P ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রগামী হলে, P- এর মান কত? [13-14]

A. 2 B. 3 C. 6 D. 4

Ans A Solve



$\therefore 4 \times 1 = 2 \times P \therefore P = 2$ unit

8 ডাইন ও 3 ডাইন মানের দু'টি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল একটি বারের 12 সে.মি দূরত্বে অবস্থিত দু'টি বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। একটি মাত্র বলের ক্রিয়ায় বারটিকে ভারসাম্যে রাখতে হলে, বারের ন্যূনতম দৈর্ঘ্য হবে। [11-12]

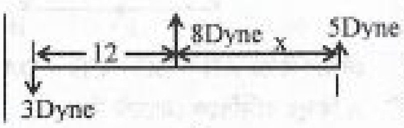
A. $19\frac{1}{2}$ cm B. $19\frac{1}{5}$ cm C. $7\frac{1}{2}$ cm D. $7\frac{1}{5}$ cm

Ans B Solve

$\therefore 3 \times (12 + x) = 8 \times x$

$\Rightarrow 36 + 3x = 8x$

$\Rightarrow 5x = 36 \therefore x = 7.2$ cm



$\therefore$ বারের ন্যূনতম দৈর্ঘ্য $C = 12 + x = 19.2 = 19\frac{1}{5}$ cm

12 m লম্বা একটি ভারী সুষম দন্ডের এক প্রান্তে 9 kg ওজন ঝুলানো আছে। উক্ত প্রান্ত থেকে 5.25 m দূরে যদি একটি খুঁটির উপর দন্ডটি সমান্তরালে অবস্থান করে তবে দন্ডটির ওজন হবে? [12-13 ; CUET 11-12]

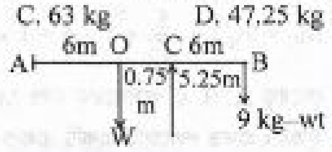
A. 65 kg B. 61 kg C. 63 kg D. 47.25 kg

Ans C Solve

ধরি, দন্ডটির ওজন W kg-wt

$\therefore W \times 0.75 = 9 \times 5.25$

$\therefore W = 63$ kg-wt



04. 5 মিটার দীর্ঘ একটি হালকা রডের দুই প্রান্তে 10.5 kg ও 24.5 kg ওজনের দু'টি বস্তু ঝুলানো আছে। একজন লোক বস্তু দুটি সমেত রডটি আনুভূমিক অবস্থায় বহন করতে চায়। সে রডটির কম ওজন ঝুলানো স্থান থেকে কত দূরে ধরবে? [11-12]

A. 0.5 meter B. 2 meter C. 3.5 meter D. 3 meter

Ans C Solve



$\therefore 24.5 \times (5-x) = x \times 10.5 \Rightarrow 122.5 - 24.5x = 10.5x \therefore x = 3.5$ m

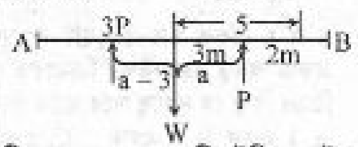
05. W ওজনের 10 মিটার দীর্ঘ একটি ভারী সুষম বারকে ভূমিতলের সমান্তরাল একই সরলরেখাস্থ দু'টি পেরেকের উপর এমনভাবে রাখা হয়েছে যে, এর এক প্রান্ত একটি পেরেক হতে 2 মিটার বাইরে আছে। পেরেক দু'টির দূরত্ব কত হলে, তাদের একটির উপর চাপ অপরটির উপর চাপের তিনগুণ হবে? [11-12]

A. 1 m B. 2 m C. 3 m D. 4 m

Ans D Solve একটি চাপ P হলে, অন্যটির উপর চাপ 3P

$\therefore 3P \times (a-3) = 3P$

$\Rightarrow 3a - 9 = 3 \therefore a = 4$m



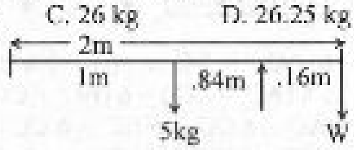
06. 2m দীর্ঘ এবং 5 kg ওজনের একটি সুষম রডকে একটি টেবিলের উপর এমনভাবে রাখা হয়েছে যে রডটির দৈর্ঘ্যের 16 cm ধারের বাইরে আছে। রডটি পড়ে যাওয়ার পূর্বে ঐ প্রান্তে কত ওজন ঝুলানো যাবে? [10-11]

A. 25 kg B. 25.25 kg C. 26 kg D. 26.25 kg

Ans D Solve

$\therefore 5 \times 0.84 = w \times 0.16$

$\Rightarrow w = 26.25$ kg-wt



07. দুইজন লোক 6 m লম্বা ও 30 kg ওজনের একটি ভারী সুষম বার বহন করছে। একজন বারটির এক প্রান্ত থেকে 1 m ও অন্যজন অপর প্রান্ত থেকে 2 m দূরত্বে বারটি বহন করে নিয়ে যাচ্ছে। তাদের প্রত্যেকে কত ওজন বহন করে? [10-11]

A. 10 kg, 20 kg B. 15 kg, 15 kg

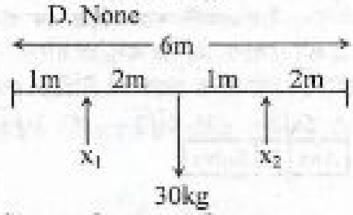
C. 12 kg, 18 kg D. None

Ans A Solve

$\therefore \frac{30}{3} = \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2}$

$x_1 = 10$ kg-wt

$x_2 = 20$ kg-wt



08. একটি লোক লাঠির একপ্রান্তে বাঁধা একটি বোঝা কাঁধে বহন করছে। বোঝাটির ওজন W এবং লোকটির কাঁধ হতে বোঝাটির ও লোকটির হাতের দূরত্ব যথাক্রমে 1 metre এবং $\frac{1}{2}$ metres লোকটির কাঁধের উপর চাপ কত? [07-08]

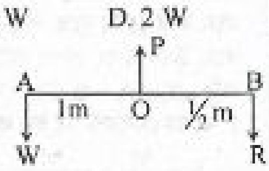
A. W B. 3 W C. 1.5 W D. 2 W

Ans B Solve $W + R = P$

আবার, $W \times 1 = R \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R = 2W \Rightarrow W + 2W = P$

$\therefore P = 3W$



09. একজন লোক তার কাঁধের উপর একটি লাঠির প্রান্তে বেঁধে বোঝা বহন করবে। তার হাত ও কাঁধের উপরে চাপ কিভাবে পরিবর্তিত হবে? [05-06]

A. $R \propto x^2$ B. $R \propto \frac{1}{x^2}$ C. $R \propto \frac{1}{x}$ D. $R \propto x$

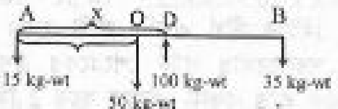
Ans C Solve $R \propto \frac{1}{x}$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 12 মিটার দৈর্ঘ্যের সুষম একটি বীম AB এর ওজন 50 কেজি, যার A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 15 কেজি ও 35 কেজি ওজন ঝুলানো। A প্রান্ত হতে কত দূরত্বে শুধু একটিমাত্র অবলম্বন স্থাপন করলে ব্যবস্থাটি সুস্থিত থাকবে? [16-17]

A. 5 মিটার B. 35/6 মিটার C. 6 মিটার
D. 36/5 মিটার E. 7 মিটার

Ans | D | Solve



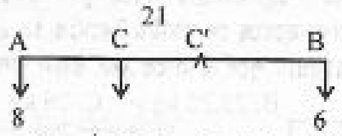
OA = OB = 6m, ধরি AD = x
A বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে,

$15\times0-50\times6-35\times12+100\,x=0 \Rightarrow x=\dfrac{720}{100}=\dfrac{36}{5}$ মিটার

02. 8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দৈর্ঘ্যের একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু যে দূরত্বে সরে যাবে তা কত একক? [15-16]

A. 1 একক B. 2 একক C. 3 একক D. 4 একক E. কোনটিই নয়

Ans | C | Solve

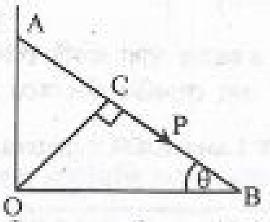


$8.\ AC=6.\ BC$ ...... (i) | $8\ BC'=6.\ AC'$ ..... (ii)
$\Rightarrow 8\ (AC'-CC')=6\ (BC'+CC')$
$8\ AC'-8\ CC'=6\ BC'+6\ CC'$
$8\ AC'=6\ BC'+14\ CC'$ .... (iii)
(ii) + (iii) $\Rightarrow 8\ (AC'+BC')=6\ (BC'+AC')+14\ CC'$
$8.\ AB=6.\ AB+14\ CC'$
$14\ CC'=2.\ AB\ \therefore\ CC'=\dfrac{2\times21}{14}=3$ একক

03. ভূমির উপর খাড়াভাবে দণ্ডায়মান একটি টেলিগ্রাফ পোস্টের সাথে 20 মিটার দীর্ঘ একটি শক্ত দড়ির এক প্রান্ত বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত ধরে একটি লোক নির্দিষ্ট বল প্রয়োগে টানছে। পোস্টটির কোন স্থানে দড়ি বাঁধলে লোকটির পক্ষে তা উল্টিয়ে ফেলা সহজতম হবে? [14-15, 07-08]

A. $5\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$ E. $10\sqrt{2}$

Ans | E | Solve



মনে করি B বিন্দুতে দাঁড়ানো লোকটি 20m দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দড়ির এক প্রান্ত P বলে টানে এবং অপর প্রান্ত টেলিগ্রাফ থামের A বিন্দুতে বাধা আছে। মনে করি $\angle OBA=\theta$ এবং $OC\perp AB$। যদি O বিন্দুর সাপেক্ষে P বলের মোমেন্ট M হয় তবে $M=P.OC$

$\Rightarrow P=\dfrac{M}{OC}=\dfrac{M}{OB\sin\theta}=\dfrac{M}{20\cos\theta\ \sin\theta}\ \therefore P=\dfrac{M}{10\sin2\theta}$

যখন P-এর মান ক্ষুদ্রতম তখন $\sin2\theta=1$

অর্থাৎ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ এবং সেইক্ষেত্রে টেলিগ্রাফ থামটি উল্টানো সবচেয়ে সহজ হবে।

$\therefore$ সহজে উল্টানোর জন্য দড়ি বাঁধতে হবে $OA=AB\sin45°$

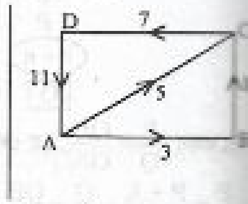
$=20\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$ মিটার উচ্চতায়।

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান

01. ABCD আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA এবং AC রেখা বরাবর যথাক্রমে 3, 8, 7, 11 ও 5 একক বলসমূহ কার্যরত আছে। যদি AC = 10 একক ও BC = 6 একক হয় তবে বলগুলো দ্বারা সৃষ্ট যুগলের ভ্রামক এর মান কত হবে? [15-16]

A. 106 unit B. $35\frac{1}{3}$ unit C. 53 unit D. None of them

Ans | A | Solve $AC=10,\ BC=6\ \therefore AB=8$



$\vec{F}_{AB}=3+5\cos\tan^{-1}\dfrac{6}{\sqrt{10^2-6^2}}$

$\Rightarrow \vec{F}_{AB}=3+5\cos\cos^{-1}\dfrac{8}{10}$

$\therefore \vec{F}_{AB}=3+4=7$ N

এবং $\vec{F}_{DA}=11-5\cos\left(90°-\tan^{-1}\dfrac{6}{\sqrt{10^2-6^2}}\right)$

$\Rightarrow \vec{F}_{DA}=11-5\sin\sin^{-1}\dfrac{6}{10}$

$=11-5\times\dfrac{6}{10}\ \therefore \vec{F}_{DA}=8$ N

$\therefore$ যুগলের ভ্রামক $=(8\times AB+7\times BC)=(8\times8+7\times6)=106$ একক

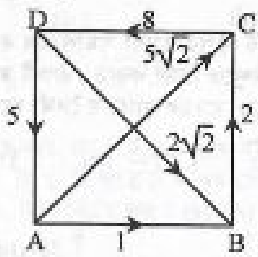
Shortcut: A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই,
$=AB.0+BC.8+CD.6+AC.0$
$=8\times8+7\times6=64+42=106$ unit

$\left[\begin{array}{l} AB=\sqrt{AC^2-BC^2} \\ =\sqrt{10^2-6^2}=8 \end{array}\right.$

02. 1, 2, 8, 5, $5\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt{2}$ একক মানের বলগুলি ABCD বর্গক্ষেত্রের যথাক্রমে AB, BC, CD এবং DA বাহু এবং দুটি কর্ণ AC এবং BD বরাবর ক্রিয়ারত। ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 একক হলে বলগুলির লব্ধি হবে: [14-15, 13-14]

A. 30 units B. 50 units C. 40 units D. None

Ans | C | Solve



দেওয়া আছে AB = BC = CD = DA = 5 একক
A বিন্দুর চারিদিকে মোমেন্ট নিয়ে,

$M_A=-2\sqrt{2}\times\dfrac{5}{\sqrt{2}}+2\times5+8\times5=40$ একক

$M_B=-5\sqrt{2}\times\dfrac{5}{\sqrt{2}}+5\times5+8\times5=40$ একক

$M_C=2\sqrt{2}\times\dfrac{5}{\sqrt{2}}+5\times5+1\times5=40$ একক

যেহেতু A, B, C অসমরেখ এবং $M_A=M_B=M_C=40$ একক
সুতরাং প্রদত্ত বলজোট একটি একক যুগলের সমতুল্য যার ভ্রামক 40 একক

...ভূমির সমান্তরাল 24m দীর্ঘ একটি সেতুর ওজন 5 ton। সেতুটি তার দুই প্রান্তে দুইটি থামের উপর অবস্থিত। যদি 3 ton ওজনের একটি গাড়ী সেতুটির এক প্রান্ত হতে $\frac{2}{3}$ অংশ পথ দূরে তার উপরে দাঁড়ায়, তবে থাম দুইটির উপর চাপের পরিমাণ বের কর। [14-15]

A. 4.5 ton-wt; 3.5 ton-wt　B. 5.5 ton-wt; 3.5 ton-wt
C. 4.5 ton-wt; 5.5 ton-wt　D. None

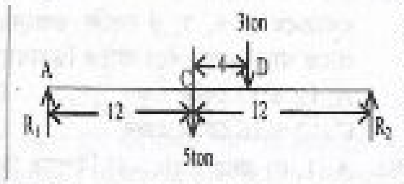
Ans A **Solve** $\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -5\times 12 - 3\times 16 + R_2\times 24 = 0$

$\therefore R_2 = 4.5$ ton.

এখন $R_1 + R_2 = 5 + 3$

$\therefore R_1 = 8 - 4.5 = 3.5$ ton.



...3m দৈর্ঘ্যের একটি সোজা সুষম ভারী রডের দুপাশে 50N ও 100N ভর আছে এবং রডটিকে তার মধ্যবিন্দু থেকে $\frac{1}{3}$ m দূরত্বে বেশি ভরের দিকে আলম্ব বিন্দুতে রাখা হলে তখন তা সাম্যাবস্থায় থাকে। রডটির ওজন কত? [12-13]

A. 25 N　B. 75 N
C. 125 N　D. None

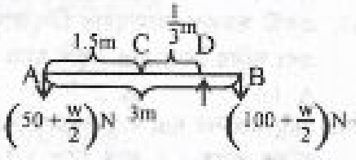
Ans B **Solve**

আলম্বিন্দু D এর সাপেক্ষে

ভ্রামক নিয়ে পাই,

$\left(50+\frac{w}{2}\right)\times\left(1.5+\frac{1}{3}\right)$

$= \left(100+\frac{w}{2}\right)\times\left(1.5-\frac{1}{3}\right)$

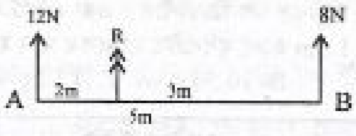


$\therefore$ w = 75N

...12N ও 8N মানের দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল যথাক্রমে কোন অনড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। তাদের অবস্থান বিনিময় করা হলে তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কতদূর সরে যাবে? দেওয়া আছে, AB = 5m. [13-14]

A. 2m　B. 1m　C. 1.5 m　D. None

Ans B **Solve**



$\therefore 12\times x = 8\,(5 - x)$

$\Rightarrow x = 2$m

আবার, বলদ্বয় স্থান বিনিময় করলে লব্ধি y মি. সরে যাবে।

$8\times(2 + y) = 12\,(3 - y)$

$\Rightarrow 16 + 8y = 36 - 12y$

$\therefore$ y = 1 m সুতরাং লব্ধির ক্রিয়ারেখা 1m দূরে সরে যাবে।

06. 20 মি. দীর্ঘ একটি ভারী সুষম তক্তা দুটি খুঁটির উপর আনুভূমিকভাবে সাম্যাবস্থায় রয়েছে। প্রথম খুঁটি তক্তাটির এক প্রান্তে এবং দ্বিতীয় খুঁটিটি তক্তাটির অপর প্রান্ত থেকে 5 মি. দূরে অবস্থিত। তক্তাটিকে না উল্টিয়ে দ্বিতীয় প্রান্তে যদি সর্বোচ্চ 50 কেজি ওজন ঝুলানো যায়। সেক্ষেত্রে তক্তাটির ওজন হবে- [10-11]

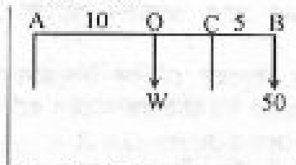
A. 33.33 kg　B. 50 kg
C. 25 kg　D. None

Ans B **Solve**

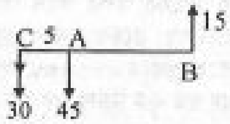
$W \times OC = 50 \times BC$

$\Rightarrow W(10 - 5) = 50 \times 5$

$\therefore$ W = 50 kg – wt



07. A ও B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের মান ও দিক চিত্র মাধ্যমে দিয়ে দেয়া হল। যদি লব্ধি বল C বিন্দুতে ক্রিয়াশীল এবং AC = 5 হয়, তবে AB এর মান হবে- [09-10]



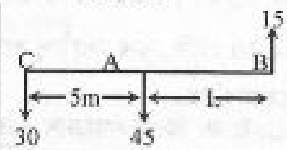
A. 15　B. 20
C. 10　D. None of them

Ans C **Solve**

ধরি AB-এর দৈর্ঘ্য AB = L m

$\therefore$ চিত্র অনুযায়ী $\frac{30}{L} = \frac{15}{5}$

$\therefore$ L = 10m

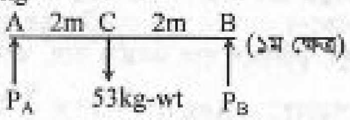


RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

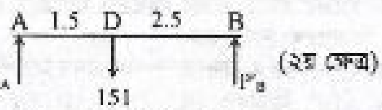
01. 4 মিটার দীর্ঘ সমরূপ AB তক্তার ওজন 53 kg এবং তা A ও B বিন্দুতে খুঁটির উপর অবস্থান করছে। A বিন্দু হতে 1.5 মিটার দূরে তক্তার উপর 151 kg ওজনের একটি লোক দাঁড়ালে খুঁটিদ্বয়ের উপর কি পরিমাণ চাপ পড়বে? [14-15]

A. (120.87 and 83.12) kg　B. (125.87 and 80.10) kg
C. (115.87 and 85.15) kg　D. (120 and 85) kg
E. (125 and 90) kg

Ans A **Solve**



$\Rightarrow P_A = P_B = \frac{53}{2}$ kg-wt



$\Rightarrow \frac{P'_A}{2.5} = \frac{P'_A + P'_B}{4} = \frac{151}{4} = \frac{P'_B}{1.5}$

$\therefore P'_A = 94.375$ kg-wt

$\therefore P'_B = 56.625$ kg-wt

$\therefore$ A তে মোট চাপ $= P_A + P'_A = 26.5 + 94.375 = 120.875$ kg-wt

এবং B " " " $= P_B + P'_B = 26.5 + 56.625 = 83.125$ kg-wt

SELF TEST [Written]-01

01. কোন অনড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে ক্রিয়ারত দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q (P > Q) এর পরস্পরের অবস্থান বিনিময় করলে দেখাও যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর d দূরত্বে সরে যাবে যখন $d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$

02. দুই জন লোককে 56 কেজি ওজনের একখণ্ড পাথর একখানা হালকা তক্তার উপর বসিয়ে বহন করতে হবে পাথর খণ্ডটি তক্তার উপর কিভাবে বসালে একজন লোক অপরজন অপেক্ষা 24 কেজি বেশি ভার বহন করবে? **Ans.** 2:5 অনুপাত।

03. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলোতে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। এদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে ক্রিয়ারত হলে দেখাও যে, P = Q = R।

04. দুইটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল P ও Q(P > Q) এর প্রত্যেকের মান যদি সমপরিমাণে বর্ধিত করা হলে দেখাও যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু P হতে আরও দূরে সরে যাবে।

05. এক ফেরিওয়ালা 8 ফুট দীর্ঘ একটি রডের দুই প্রান্তে দুটি সমান পাত্র ঝুলিয়ে প্রত্যেকটিতে 10kg দুধ কাধের উপর বহন করছে। একটি পাত্র হতে 4 কেজি দুধ বিক্রি হবার পর রডের কোন স্থানে হাত দিলে সে উহা অনুভূমিকভাবে বহন করতে পারবে। **Ans.** ভারী পাত্র হতে 3 ফুট দূরে।

06. 4 মি. দীর্ঘ একটি ভারী সুষম দণ্ড এক মিটার ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর ভূমির সমান্তরালে আছে। এর এক প্রান্তে 10kg ওজনের একটি ভার এবং অপর প্রান্তে 4 কেজি ওজনের একটি ভার ঝুলালে তার অন্য প্রান্তটি নিকটবর্তী পেরেক হতে সামান্য উপরে উঠে যায়। দণ্ডটির ওজন ও তার মধ্যবিন্দু হতে পেরেকদ্বয়ের দূরত্ব কত?

Ans. 20 কেজি, তার মধ্যবিন্দু হতে পেরেকদ্বয় যথাক্রমে $\frac{2}{3}$ মি. ও $\frac{1}{3}$ মি. দূরত্বে অবস্থিত।

07. P, Q, R বল তিনটি যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। দেখাও যে, তাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজের-

(i) ভরকেন্দ্র দিয়ে গেলে $\frac{P}{\sin A} + \frac{Q}{\sin B} + \frac{R}{\sin C} = O$

(i) পরিকেন্দ্র দিয়ে গেলে $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = O$

(i) লম্বকেন্দ্র দিয়ে গেলে $\frac{P}{\cos A} + \frac{Q}{\cos B} + \frac{R}{\cos C} = O$

08. একখানা ভারী গাড়ির চাকার ওজন W ও ব্যাসার্ধ r। চাকার কেন্দ্রবিন্দুতে প্রযুক্ত ভূমির সমান্তরাল বল F এর সাহায্যে h উচ্চতাবিশিষ্ট একটি প্রতিবন্ধকের উপর দিয়ে তাকে টেনে নিতে হবে। দেখাও যে, F বলটির মান $\frac{W\sqrt{2hr-h^2}}{r-h}$ অপেক্ষা কিছু পরিমাণ বৃহত্তর হবে।

09. ভূমির সাথে সমান্তরাল একটি সেতুর দৈর্ঘ্য 42 মিটার এবং ওজন 6 মেট্রিকটন। সেতুটি তার প্রান্তদ্বয়ে দুইটি অনুরূপ থামের উপর অবস্থিত। যদি 3 মেট্রিকটন ওজনের একখানি গাড়ি সেতুটির এক প্রান্ত হতে তার উপরে (i) অর্ধপথ (ii) দুই তৃতীয়াংশ দূরে অবস্থান করে, তবে থাম দুইটির উপর কি পরিমাণ চাপ পড়বে? **Ans.** (i) $\frac{9}{2}$ টন ও $\frac{9}{2}$ টন (ii) 4 টন ও 5 টন।

10. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12, 5 একক। A, B, C বিন্দুর চতুর্দিকে F মানের একটি বলের মোমেন্ট যথাক্রমে 0, 25, 144 হলে F এর মান, দিক, ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।
Ans. F = 13 বা ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক বরাবর ক্রিয়াশীল।

11. P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল। যদি A, B, C বিন্দুগুলোর সাপেক্ষে প্রদত্ত বলগুলোর ভ্রামক যথাক্রমে L, M, N হয় তবে দেখাও যে, P : Q : R = aL : bM : cN.

12. W ওজনবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজাকার পাতের C কোণটি স্থূলকোণ। পাতটি AC বাহুকে টেবিলের সংস্পর্শে খাড়া অবস্থানে আছে। পাতটিকে না উল্টিয়ে B বিন্দুতে সর্বোচ্চ X ওজন ঝুলানো সম্ভব হলে দেখাও যে,
$X = \frac{W}{3} \cdot \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$

SELT TEST [MCQ] -01

01. 3, 4, 5, 6 কেজি ওজন বল একটি বর্গের বাহু চারটি বরাবর ক্রিয়া ... লব্ধির মান-
A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

02. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর যথাক্রমে P, Q, R ... বল ক্রিয়া করে। বল তিনটির লব্ধি অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে-
A. P + Q + R = 0 B. $\frac{P}{a} + \frac{Q}{b} + \frac{R}{c} = 0$
C. PsecA + QsecB + RsecC = 0 D. PcosA + QcosB + RcosC ...

03. 4 কেজি 10 মি. দীর্ঘ একটি দণ্ডের একপ্রান্ত হতে 2, 4, 6, 8 মি. ... যথাক্রমে 3, 5, 7, 9 কেজি ওজনের ভার ঝুলানো আছে। দণ্ডটির ... প্রান্তে খাড়া সুতা বেঁধে তাকে স্থিরাবস্থায় রাখা হয়েছে। সুতাদ্বয়ের টান ...
A. 12 ও 17 কেজি ওজন B. 12 ও 18 কেজি ওজন
C. 12 ও 16 কেজি ওজন D. 16 ও 13 কেজি ওজন

04. A (1, 0) এবং B (0, –1) বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বিসদৃশ সমান ... একক ভ্রামকের একটি যুগল গঠন করে। যুগলের বাহুর দৈর্ঘ্য AB ... প্রতিটি বলের মান–
A. $5\sqrt{2}$ units B. $10\sqrt{2}$ units C. 20 D. $10\sqrt{2}$...

05. 2,5,2,5 এককের বলগুলো যথাক্রমে ABCD সামান্তরিকের AB, BC, CD, DA বাহু বরাবর ক্রিয়ারত। AB = 4cm, BC = 3cm এবং ... 60° হলে লব্ধির মান-
A. 13 মোমেন্ট একক B. 14 মোমেন্ট একক
C. $13\sqrt{3}$ মোমেন্ট একক D. $10\sqrt{3}$ মোমেন্ট একক

06. কার্তেসীয় সমতলে x অক্ষের ধনাত্মক এবং y অক্ষের ধনাত্মক ... যথাক্রমে 6w এবং 5w বলদ্বয় (3, 2) বিন্দুতে ক্রিয়া করে- মূল... সাপেক্ষে লব্ধি বলটির ভ্রামক–
A. 3w B. 4w C. 5w D. 8w

07. একটি সমরূপ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকৃতি পাতের সমান বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ... এবং ভূমির দৈর্ঘ্য 8m। ভূমি হতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব কত?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

08. 2kg ওজনের 6m দীর্ঘ সমরূপ AB দণ্ড। A ও B প্রান্তে দুইটি খুঁটির ... সুস্থিত আছে। A প্রান্ত হতে 1,2,3,4m দূরে যথাক্রমে 2,3,4,5kg ... ঝুলান হল। খুঁটি দুইটির উপর চাপ যথাক্রমে
A. 7, 7kg ওজন B. 8,8kg ওজন C. $\frac{25}{3}, \frac{23}{3}$kg ওজন D. $\frac{14}{3}, \frac{16}{3}$kg ...

09. 5, 3, 5, 3 kg ওজনের পরিমাপের চারটি বল একটি বর্গক্ষেত্রের ... বাহু বরাবর একই ক্রমে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধির মান নির্ণয় কর, ... প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 2m।
A. 16 kg-wt B. 32 kg-wt C. 26 kg-wt D. 22 kg-wt

10. ABCD বর্গের AB, CB, CD, AD এবং DB বরাবর যথাক্রমে ... 3 এবং $\sqrt{2}$ kg-wt বল ক্রিয়াশীল। এরা একটি যুগলের সমতুল্য ... বাহুর দৈর্ঘ্য 1.5m হলে, যুগলটির ভ্রামকের মান হল-
A. 6 kg-wt B. 10.5 kg-wt C. 4.5 kg-wt D. 7.5 kg-wt

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	04. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	10. Ⓐ...
02. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	11. Ⓐ...
03. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	12. Ⓐ...

Correct Answer

10.D	09.A	08.C	07.A	06.A	05.C	04.A	03.C	02.A

SELF TEST [MCQ]-02

BC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে P, Q, R মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়ারত আছে। তাদের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগামী হলে–

A. $\frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}$ B. P:Q:R = sinA:sinB:sinC
C. A ও B উভয়ই D. None

P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে (P + R) ও (Q + S) দ্বারা প্রতিস্থাপিত হলেও লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু অপরিবর্তিত থাকে নিচের কোনটি সত্য?

A. QR = PS B. $\frac{Q}{R}=\frac{P}{S}$
C. QS = PR D. None

দুটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল 10 ও 5N যথাক্রমে পরস্পর হতে 25 মি. দূরে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। এদের প্রত্যেককে 2N পরিমাণে বৃদ্ধি করলে তাদের লব্ধি যদি d দূরে সরে যায় তাহলে d = ?

A. 20 মিটার B. 10 মিটার C. 15 মিটার D. 30 মিটার

পরস্পর হতে 6 মি. দূরে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল 30 ও 15N। এদের অবস্থান বিনিময় করলে তাদের লব্ধি যদি d দূরে সরে যায় তাহলে d = ?

A. 5 মিটার B. 6 মিটার C. 2 মিটার D. 3 মিটার

পরস্পর হতে 6 মি. দূরে 30N ও 20N মানের দুটি বল ক্রিয়ারত। যদি 30 N বলকে 5 মিটার দূরে সরানো হয় তাহলে লব্ধি সরন হবে–

A. 2 মিটার B. 3 মিটার C. 4 মিটার D. 6 মিটার

2m দীর্ঘ একটি হালকা দণ্ডের এক প্রান্তে 21 kg এবং অপর প্রান্তে 7 kg ওজন বাঁধা আছে। দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে বহন করতে হলে একজন লোক 21 kg ওজন হতে তার হাত কত দূরে স্থাপন করবে –

A. $\frac{1}{4}$ m B. $\frac{1}{2}$ m
C. $\frac{1}{3}$ m D. None

P ও Q দুইটি সমান্তরাল বলের Q কে $\frac{P^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করে P এর সাথে স্থান পরিবর্তন করলে এদের–

A. লব্ধি P এর দিকে সরে যায় B. লব্ধি Q এর দিকে সরে যায়
C. লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু একই থাকে D. None

ABC ত্রিভুজের O যদি লম্বকেন্দ্র হয়, তাহলে লম্বকেন্দ্র হতে BC এর উপর লম্ব দূরত্ব কত?

A. 2R sinB cosC B. 2R cosB cosC
C. RcosB D. None

দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল P ও Q (P > Q) 3m দূরত্বে অবস্থিত এবং তাদের লব্ধি P হতে $\frac{1}{2}$ m দূরে ক্রিয়ারত 12N বলের সমান তাহলে P: Q = ?

A. 1 : 2 B. 2 : 3 C. 3 : 4 D. 5 : 1

একজন লোক তার কাঁধে অনুভূমিকভাবে স্থাপিত 1.5m দীর্ঘ লাঠির এক প্রান্তে হাত রেখে অপর প্রান্তে W ওজনের একটি বস্তু বহন করছে। তার কাঁধ থেকে হাতের দূরত্ব কত হলে, কাঁধের উপর চাপের পরিমাণ বস্তুর ওজনের তিনগুণ হবে?

A. 1m B. 1.5m
C. 0.5m D. 0.75 m

11. ক্রমানুসারে ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহু গুলো বরাবর P, 2P, 3P এবং 4P মানের বলগুলো ক্রিয়া করছে। তাদের লব্ধির মান, দিক নির্ণয় কর।

A. $2\sqrt{2}P$, CA –এর সমান্তরাল B. $3\sqrt{3}P$, CA –এর সমান্তরাল
C. $2\sqrt{2}P$, BA –এর সমান্তরাল D. 2P, BA –এর সমান্তরাল

12. একটি অনুভূমিক রড যার দৈর্ঘ্য AB দুটি রশি দ্বারা ভারসাম্যে আছে। রডের দৈর্ঘ্য 0.6 মিটার ও ওজন 3 N। রডের ভরকেন্দ্র A থেকে 0.4 মিটার দূরে হলে A বিন্দুতে রশির টান কত?

A. 0.2 N B. 1.4 N
C. 0.8 N D. 1.0 N

13. একটি অনুভূমিক রড যার দৈর্ঘ্য 5m ওজন 4m দুইপ্রান্তে দুটি রশি দ্বারা ঝুলে আছে। 8 kg, 12 kg, 16 kg, ও 20 kg ওজনগুলো রডের একপ্রান্ত থেকে যথাক্রমে 1m, 2m, 3m ও 4m দূরত্বে আছে। রশিদ্বয়ের টান?

A. 26, 34 kg-wt B. 20, 30 kg-wt
C. 10, 40 kg-wt D. None

14. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল 5N ও 15N একটি হাল্কা রডের উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে কাজ করে। (AB = 6m) লব্ধি বলের মান এবং A থেকে লব্ধির বলের ক্রিয়ারেখার দূরত্ব—

A. 10N, 4.5m B. 20N, 4.5m C. 20N, 1.5m D. 10N, 1.5m

15. একটি ভারী সুষম রড পরস্পর 90cm দূরত্বে দুইটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থির আছে। খুঁটিদ্বয়ের উপর চাপের অনুপাত 1: 2 হলে দণ্ডের ভরকেন্দ্র থেকে প্রত্যেক খুঁটির দূরত্ব —

A. 45 cm, 45 cm B. 30 cm, 60 cm
C. 20 cm, 70 cm D. 40 cm, 50 cm

16. একটি খুঁটির কোন বিন্দুতে AB রশির B প্রান্ত লাগিয়ে একজন লোক ভূমি থেকে নির্দিষ্ট বলে টেনে খুঁটিটিকে উল্টে ফেলবেন। যে উচ্চতায় রশি বা বলের টান সর্বনিম্ন হবে তা হল —

A. AB B. $\frac{AB}{2}$
C. $\frac{AB}{\sqrt{2}}$ D. None

17. ত্রিভুজ ABC এর A, B, C শীর্ষ P, P ও 2P মানের তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি কোন বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে?

A. ABC এর ভরকেন্দ্র B. ABC এর অন্তঃকেন্দ্র
C. ABC এর লম্বকেন্দ্র D. None of these

18. P ও Q দুটি সদৃশ সমান্তরাল বল কোন একটি বস্তুর উপর দুটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত। P ও Q পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলেও লব্ধির স্থান পরিবর্তন হয় না। নিম্নের কোনটি সঠিক?

A. P = 3Q B. P = 2Q
C. P = Q D. Q = 2P

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	
05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	

Correct Answer

18.C	17.D	16.C	15.B	14.B	13.A	12.D	11.A	10.C
09.D	08.B	07.C	06.B	05.B	04.B	03.B	02.A	01.C

৯ম অধ্যায়

দ্বিতীয় পত্র

সমতলে বস্তুকণার গতি (Motion of Particles in a Plane)

বলবিদ্যার যে শাখায় গতিশীল বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত বলগুলির বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করা হয় তাই গতিবিদ্যা। এই বইয়ে এই অধ্যায়কে চার ভাগে ভাগ করা হয়েছে।

সমতলে বস্তুকণার গতি

A (বেগ) B (ত্বরণ) C (অভিকর্ষজ ত্বরণ) D (প্রাস)

বেগ

এক নজরে বেগ-এর গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

➲ বেগের সামান্তরিক সূত্র:

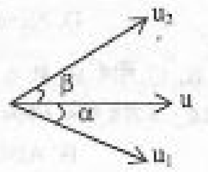
01. α কোণে আনত u ও v মানের দুটি সমবিন্দু বেগের লব্ধি w হলে $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ এবং u বেগের সাথে w এর আনতি θ হলে, $\tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

02. $\alpha = 0°$ হলে $R = R_{max} = u + v$ এবং $\alpha = 180°$ হলে $R = R_{min} = u \sim v$

03. $\alpha = 90°$ হলে $R = \sqrt{u^2 + v^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{v}{u}$

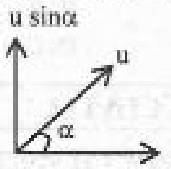
04. $u = v$ হলে $R = 2u\cos\dfrac{\alpha}{2}$ এবং $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$

➲ দুটি নির্দিষ্ট রেখা বরাবর বেগের অংশক: u বেগটির α ও β কোনে আনত রেখা বরাবর অংশকদ্বয় u_1 ও u_2 হলে, $\dfrac{u_1}{\sin\beta} = \dfrac{u_2}{\sin\alpha} = \dfrac{u}{\sin(\alpha + \beta)}$



$\therefore u_1 = \dfrac{u\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ এবং $u_2 = \dfrac{u\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

➲ u বেগটির α কোণে নত রেখা বরাবর লম্বাংশক $= u\cos\alpha$ এবং α কোনে নত রেখাটির লম্ব বরাবর লম্বাংশক $= u\sin\alpha$



➲ বেগের লম্বাংশের সূত্র: একটি নির্দিষ্ট দিকে কিছু সংখ্যক বেগের লম্বাংশের বীজগাণিতিক সমষ্টি একই দিকে এদের লব্ধির লম্বাংশের সমান।

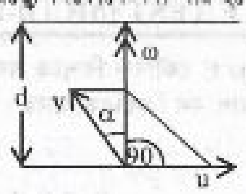
➲ তিনটি বেগের লব্ধি নির্ণয়: u, v, w বেগ তিনটি O বিন্দুতে পরস্পর α, β, ও γ কোনে কার্যকর হলে লব্ধি w হলে,

$w = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 + 2uv\cos\gamma + 2uw\cos\beta + 2vw\cos\alpha}$

➲ নদী পার হওয়া সংক্রান্ত আলোচনা :

ধরি, স্রোতের বেগ u, নৌকার বেগ v

01. সোজাসুজি/সর্বনিম্ন দূরত্বে/সমকোণে নদী পার হলে :



(i) $\cos\alpha = -\dfrac{u}{v}$

(ii) লব্ধি $w = \sqrt{v^2 - u^2}$

(iii) $t_1 = \dfrac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}$

02. স্রোতের অনুকূলে গেলে : $w = u + v$; $t_2 = \dfrac{d}{u + v}$

03. স্রোতের প্রতিকূলে গেলে : $w = v - u$; $t_3 = \dfrac{d}{v - u}$

04. স্বল্পতম সময়ে পার হলে : নদীর প্রশস্ততা বরাবর বেগ $= v\sin\alpha$

$\therefore d = v\sin\alpha t \Rightarrow t = \dfrac{d}{v\sin\alpha}$

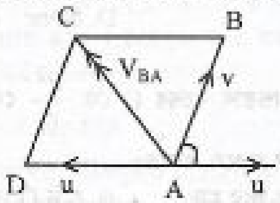
t এর মান ক্ষুদ্রতম হবে যদি $\sin\alpha = 1$ অর্থাৎ $\alpha = 90°$ হয়।

$\therefore t_{min} = \dfrac{d}{v}$

আপেক্ষিক বেগঃ

01. দুটি গতিশীল বস্তুকণার একটির সাপেক্ষে অপরটির বেগকে এর আ... বেগ বলে।

02. দুটি গতিবেগ পরস্পর α আনত কোণে ক্রিয়া করলে যে বস্তু... আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করতে হবে তার বেগের সমান ও বিপরী... বেগ অন্য বস্তুর বেগের ক্রিয়ারেখায় প্রয়োগ করতে হবে। এবার ... বেগ এবং অন্য বস্তুর বেগের লব্ধিই নির্ণেয় আপেক্ষিক বেগ।



চিত্রে AC রেখা A বেগের সাপেক্ষে B বেগের আপেক্ষিক বেগ প্রকা...

03. দুটি বস্তু u ও v বেগে একই দিকে অগ্রসর হলে একটির সাপেক্ষে... আপেক্ষিক বেগ $= u - v$ $[u > v]$

04. দুটি বস্তু u ও v বেগে বিপরীত দিকে অগ্রসর হলে একটির সাপেক্ষে... আপেক্ষিক বেগ $= u + v$.

05. দুটি বস্তু A ও B এর বেগ যথাক্রমে $\vec{V}_A$ ও $\vec{V}_B$ হলে A এর সাপেক্ষে... বেগ $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

$V_{BA} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2V_AV_B\cos\alpha}$

এবং $\vec{V}_B$ এর সাথে $\vec{V}_{BA}$ এর নতি θ

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{V_A\sin\alpha}{V_B - V_A\cos\alpha}\right)$

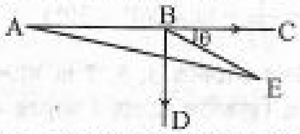
06. $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$ হতে লেখা যায় $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ এবং $\vec{V}_A = ...$

Type-01

একটি কণা প্রতি সেকেন্ডে 6 মি./সে. বেগে পূর্বদিকে চলছে। 3 সেঃ পর তার বেগের সঙ্গে দক্ষিণমুখী 2 মি./সে. বেগ সংযোজন করা হল। আরও 2 সেঃ পরে যাত্রাবিন্দু হতে তার দূরত্ব কত হবে?

মনে করি কণাটি A বিন্দু হতে যাত্রা করে 3 সেকেন্ড পরে পূর্বদিকে B বিন্দুতে পৌঁছায়। $\therefore AB = 6 \times 3 = 18$ মিটার। এরপর B বিন্দুতে কণাটির উপর দুইটি বেগ দুইটি : BC বরাবর 6 মি./সে. এবং BD বরাবর 2 মি./সে.।

বেগদ্বয়ের লব্ধি $= \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$ মি./সে.



মনে করি, আরও 2 সে. পরে কণাটি E বিন্দুতে পৌঁছায় এবং $\angle EBC = \theta$,

তাহলে $\tan\theta = \dfrac{2\sin 90^\circ}{6+2\cos 90^\circ} = \dfrac{1}{3}$ এবং $BE = 2\sqrt{10} \times 2 = 4\sqrt{10}$ মিটার

কণার প্রথম ও শেষ অবস্থানের দূরত্ব AE হলে,

$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB.BE.\cos ABE.$

$= 18^2 + \left(4\sqrt{10}\right)^2 - 2.18.4\sqrt{10}\cos(\pi - \theta)$

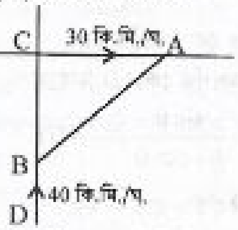
$= 324 + 160 + 144\sqrt{10}\cos\theta.$

$AE^2 = 484 + 144\sqrt{10}\,.\,\dfrac{3}{\sqrt{10}}\quad\left(\because \tan\theta = \dfrac{1}{3}\ \therefore \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$AE = \sqrt{916}$ মি. **Ans.**

পরস্পর লম্বভাবে মিলিত দুইটি সরল রেলপথের একটির উপর দিয়ে ঘণ্টায় 30 কি.মি. বেগে চলমান একটি ট্রেন সকাল 10 টায় জংশন অতিক্রম করে। অন্য একটি ট্রেন দ্বিতীয় রেলপথে ঘন্টায় 40 কি.মি. বেগে এসে বিকেল 3 টায় জংশনে পৌঁছে। কখন এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে? ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর।

মনে করি, AC এবং DC রেলপথ দুইটি জংশন C তে লম্বভাবে মিলিত হয়েছে। সকাল 10টায় একটি ট্রেন C তে এবং অন্য ট্রেনটি D তে অবস্থান করে। 10টা বাজার t সময় পরে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে। দ্বিতীয় ট্রেনটি 40 কি.মি./ঘ. বেগে চলে সকাল 10টা থেকে বিকাল 3টা মোট 5 ঘণ্টায় CD দূরত্ব অতিক্রম করে। সুতরাং $CD = 40 \times 5 = 200$ কি.মি.। ধরি, উক্ত t সময়ে ১ম ট্রেনটি 30 কি.মি./ঘ. বেগে CA এবং অন্য ট্রেনটি 40 কি.মি./ঘ. বেগে BD দূরত্ব অতিক্রম করে।



$CA = 30t$ এবং $BD = 40t$. সুতরাং $BC = 200 - 40t$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = (200-40t)^2 + (30t)^2$

$= 40000 + 1600t^2 - 16000t + 900t^2$

$= 100(25t^2 - 160t + 400)$

$= 100\,\{(5t)^2 - 2.5t.\,16 + (16)^2 + 144\}$

$= 100\,\{(5t-16)^2 + (12)^2\}$

যেহেতু $(5t-16)^2$ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক। সুতরাং AB দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে যখন $(5t-16)^2 = 0$

অর্থাৎ $t = \dfrac{16}{5} = 3\dfrac{1}{5}$ ঘন্টা = 3 ঘন্টা 12 মি.

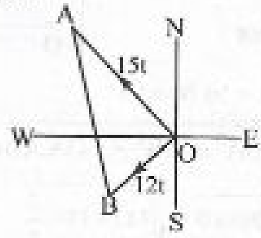
∴ সকাল 10টার 3 ঘন্টা 12 মি. পরে অর্থাৎ বেলা 1 টা 12 মিনিটে এদের মধ্যে দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে।

ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $AB = \sqrt{100 \times (12)^2} = 120$ কি.মি. **Ans.**

Ex-03 কোন বন্দর হতে একখানা জাহাজ উত্তর-পশ্চিম দিকে ঘন্টায় 15 কি.মি. বেগে যাত্রা করল। একই সময়ে একই স্থান হতে অপর একখানি জাহাজ দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে ঘন্টায় 12 কি.মি. বেগে যাত্রা করল। তাদের বেতার যন্ত্রের গ্রহণ শক্তির সীমা সর্বোচ্চ 500 কি.মি. হলে, কতক্ষণ তারা একে অপরের সাথে যোগাযোগ রক্ষা করতে পারবে?

মনে করি, প্রথম জাহাজ দুটি বন্দর O থেকে 15 km/h বেগে যাত্রা করে উত্তর-পশ্চিম দিক বরাবর চলে t সময়ে OA দূরত্ব অতিক্রম করে।

দ্বিতীয় জাহাজটি O থেকে 12 km/h বেগে দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে যাত্রা করে একই t সময়ে OB দূরত্ব যায়।



সুতরাং $OA = 15t$ এবং $OB = 12t$.

যখন $\angle AOB = 90^\circ$

∴ t সময়ে জাহাজ দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব AB = 500 কিলোমিটার।

এখন $AB^2 = OA^2 + OB^2 = (15t)^2 + (12t)^2$

$= 225t^2 + 144t^2 = 369t^2$

$\therefore AB = 3\sqrt{41}t$

$\Rightarrow 500 = 3\sqrt{41}t \;\therefore t = 26.02$ ঘন্টা। **Ans.**

Ex-04 কোন কণার উপর একই সময় ক্রিয়াশীল দুইটি বেগের লব্ধি 20 মিটার/সেঃ এবং তার দিক দ্বিতীয়টির দিকের সাথে লম্ব। প্রথম বেগ 25 মি./সে. হলে দ্বিতীয় বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

মনে করি, দ্বিতীয় বেগ v এবং বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α

তাহলে $20^2 = 25^2 + v^2 + 2.25.v.\cos\alpha$ বা, $v^2 + 50v\cos\alpha + 225 = 0$...(1)

আবার v এর দিক বরাবর বিভাজিত করে, $v + 25\cos\alpha + 20\cos 90^\circ = 0$

বা, $v + 25\cos\alpha = 0$ বা, $25\cos\alpha = -v$ -------- (2)

(1) এবং (2) হতে $v^2 + 2v(-v) + 225 = 0$ বা, $v^2 = 225 \;\therefore v = 15$ মি./সে.

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{-15}{25} = \dfrac{-3}{5}$, cos α ঋণাত্মক; সুতরাং $\alpha > 90^\circ$.

∴ দ্বিতীয় বেগ 15 মি./সে. এবং তা প্রথম বেগের সাথে $\left(\pi - \cos^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। **Ans.**

Ex-05 দুইখানা মোটর গাড়ি একই সময়ে A ও B বিন্দু থেকে যাত্রা করে। এদের গতিপথ AB এর সাথে 30° এবং 60° কোণে আনত। প্রথমটি $20\sqrt{3}$km / h বেগে চলছে। দ্বিতীয়টির বেগ কত হলে এরা মিলিত হবে? AB = 40 km হলে কতক্ষণ পরে এরা মিলবে?

Sol^n: t ঘন্টা পর C তে মিলিত হয়। প্রথম কণা A তে $20\sqrt{3}$ km / h বেগে AC বরাবর চলে।

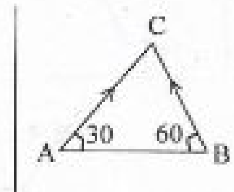
$AC = 20\sqrt{3}\,t$ km।

দ্বিতীয় কণার বেগ V km/h হলে,

$BC = Vt$ km। $\angle CAB = 30^\circ$;

$\angle ABC = 60^\circ \therefore BC = AC\tan 30^\circ$

$Vt = 20\sqrt{3}.\dfrac{t}{\sqrt{3}} \;\therefore V = 20$ km/h



আবার $BC = AB\sin 30^\circ \;\Rightarrow 20t = 40 \times \dfrac{1}{2}$

$\therefore t = 1 \;\therefore$ 1 ঘন্টা পর মিলিত হবে। **Ans.**

Ex-06 একটি কণা কোন সমতলস্থ একটি সরলরেখা বরাবর 3 ms^{-1} বেগে চলছে। 3 সেকেন্ড পরে কনার গতিপথের সাথে লম্বিক দিকে 4ms^{-1} গতি সংযোজন করা হল। গতি শুরু হওয়ার 5 সেকেন্ডে পরে কনাটি যাত্রাবিন্দু হতে কতদূরে থাকবে?

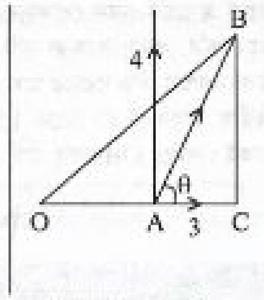
Sol^n: OA = 3 × 3 = 9 মি.

A বিন্দুতে ক্রিয়ারত 4 ও 3ms^{-1}

বেগদ্বয়ের লব্ধি $=\sqrt{4^2+3^2}=5\ ms^{-1}$

এবং লব্ধি বর্ধিত OA রেখার সাথে

$\theta=\tan^{-1}\frac{4}{3}$ উৎপন্ন করে।



$\therefore AB=(5-3)\times 5=10$ মি.

নির্ণেয় দূরত্ব, $OB=\sqrt{OA^2+AB^2-2.OA.AB\cos(\pi-\theta)}$

$=\sqrt{9^2+10^2+2.9.10\cos\theta}=\sqrt{181+180.\frac{3}{5}}$

$=\sqrt{289}=17$ মি. **Ans.**

Ex-07 দুইটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি এদের ক্ষুদ্রতম লব্ধির n গুন। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধিবেগের মান এদের সমষ্টির অর্ধেক হয়।

দেখাও যে, $\cos\alpha=-\frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$

Sol^n: ধরি, বেগদ্বয় u ও v যেখানে u>v

প্রশ্নমতে, u + v = n(u–v)

$\therefore u+v=nm$ [ধরি, u–v = m]

$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2=u^2+v^2+2uv\cos\alpha$

$\Rightarrow (u+v)^2=2[(u+v)^2+(u-v)^2]+2[(u+v)^2-(u-v)^2]\cos\alpha$

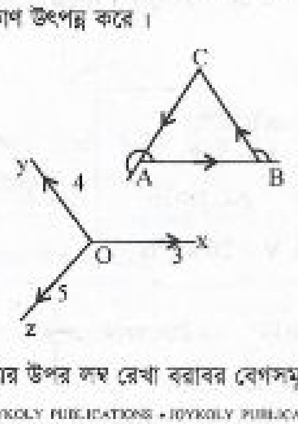
$\Rightarrow m^2n^2=2(m^2n^2+m^2)+2(m^2n^2-m^2)\cos\alpha$

$\Rightarrow n^2=2(n^2+1)+2(n^2-1)\cos\alpha \quad \Rightarrow 2(n^2-1)\cos\alpha=-(n^2+2)$

$\therefore \cos\alpha=-\frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ **(Showed)**

Ex-08 একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 3, 4 ও 5 মানের তিনটি সমবিন্দু বেগ ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধির মান এবং দিক নির্ণয় কর।

Sol^n: ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুর সমান্তরালে যথাক্রমে 3, 4 এবং 5 মানের বল তিনটি O বিন্দুতে OX, OY, OZ বরাবর কার্যরত। ধরি, বেগগুলির লব্ধি W, যা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে, OX এর সাথে 4 ও 5 মানের বেগদ্বয় যথাক্রমে (180° – 60°) ও (180° + 60°) কোণ উৎপন্ন করে।



এখন, OX এবং এর উপর লম্ব রেখা বরাবর বেগসমূহের উপাংশ নিয়ে পাই,

$W\cos\theta=3\cos0^\circ+4\cos(180^\circ-60^\circ)+5\cos(180^\circ+60^\circ)$

$=3-4\cos60^\circ-5\cos60^\circ$

$=3-4\times\frac{1}{2}-5\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$ ------------- (i)

এবং $W\sin\theta=3\sin0^\circ+4\sin(180^\circ-60^\circ)+5\sin(180^\circ+60^\circ)$

$=4\sin60^\circ-5\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ------- (ii)

$(i)^2+(ii)^2\Rightarrow W^2=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=3$ ∴ লব্ধির মান $\sqrt{3}$ একক।

$(ii)\div(i)\Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan(180^\circ+30^\circ)$ ∴ θ = 210°

Ex-09 একটি কণার উপর সেকেন্ডে 3, 5, 7 m মানের তিনটি বেগ বিভিন্ন দিক হতে কার্যকর ও স্থিতিশীল রয়েছে। ক্ষুদ্রতর দুইটি বেগের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ কত?

Sol^n: ক্ষুদ্রতম বেগদ্বয় অর্থাৎ P = 3 এবং Q = 5 এর মধ্যবর্তী কোণ = α

∴ R = 7 ∴ সামান্তরিকের সূত্র হতে, $7^2=3^2+5^2+2.3.5.\cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha=60^\circ$

For practice:

01. একই বিন্দুতে 5, 5 এবং 10 একক মানের তিন বেগ কার্যরত। প্রথম দুটি পরস্পর 135° কোণে আনত এবং তৃতীয়টি এদের মধ্যবর্তী কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বরাবর কাজ করে। এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

Ans: $5\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ একক, ৩য় বেগের কার্যরেখা বরাবর

02. দুটি রেলপথ পরস্পর সমকোণে ছেদ করে। একটি গাড়ী এদের মিলন বিন্দু হতে একটি রেলপথে যাত্রা করে। একই সময়ে একই বেগে অপর রেলপথে মিলন বিন্দুর দিকে আরেকটা গাড়ী অগ্রসর হয়। দেখাও যে এদের দূরত্ব ক্ষুদ্রতম হবে, যখন এরা জংশন হতে সমদূরবর্তী হয়।

Type-02

নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগ সংক্রান্ত

Ex-01 কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি সমান সমান বেগ এবং তাদের লব্ধি যে কোন একটি বেগের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। বেগের মানকে অর্ধেক করলে লব্ধি বেগ অপর বেগটির সাথে $\frac{\alpha}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোন θ তাহলে

$\tan\alpha=\frac{u\sin\theta}{u+u\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ ----- (i)

বেগ অর্ধেক হলে α পরিবর্তিত হয়ে $\frac{\alpha}{2}$ হয়,

$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{u}{2}\sin\theta}{u+\frac{u}{2}\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}$

$\therefore \tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\theta}{2+\cos\theta}\div\left\{1-\frac{\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2}\right\}$

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin\theta(2+\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2-\sin^2\theta}$

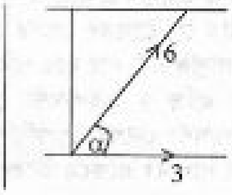
$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(4+2\cos\theta)}{4+4\cos\theta+\cos^2\theta-1+\cos^2\theta}$

$\Rightarrow (1+\cos\theta)(4+2\cos\theta)=3+4\cos\theta+2\cos^2\theta$

$\Rightarrow 2\cos\theta=-1$ ∴ θ = 120° ∴ নির্ণেয় কোণ 120°

একখানি লঞ্চ 250 মিটার প্রশস্ত একটি নদী ন্যূনতম সময়ে পাড়ি দিতে চায়। স্রোতের বেগ ঘন্টায় 3 km এবং লঞ্চের বেগ ঘন্টায় 6 km হলে লঞ্চটিকে কোনদিকে চালাতে হবে? নদীটি পাড়ি দিতে কতক্ষণ লাগবে?

মনে করি, লঞ্চটি স্রোতের বেগের সাথে 6 km/h বেগে যাত্রা করে।



নদীর প্রস্থ = 250 মি. $=\frac{1}{4}$ km.

নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোত ও লঞ্চের বেগের অংশকদ্বয়ের সমষ্টি

$= 3\cos 90° + 6\cos(90°-\alpha) = 6\sin\alpha$

নদী পারের সময় $=\frac{1/4}{6\sin\alpha}=\frac{1}{24\sin\alpha}$

সময় ন্যূনতম হবে যখন $\sin\alpha = 1$ অর্থাৎ $\alpha = 90°$

$\therefore t=\frac{1}{24}$ ঘন্টা = 2.5 মিনিট।

সুতরাং ন্যূনতম সময়ে নদীটি পাড়ি দেবার জন্য লঞ্চটি স্রোতের বেগের দিকের সাথে 90° কোণে চালাতে হবে।

এবং সময় লাগবে 2.5 মিনিট। **Ans.**

কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত u ও v বেগদ্বয়ের লব্ধি w. u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশের পরিমাণ v হলে প্রমাণ কর যে, বেগ দুইটির অন্তর্গত কোণ $\cos^{-1}\frac{v-u}{v}$ এবং $w=\sqrt{v^2-u^2+2uv}$

মনে করি, বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ α।

এবং লব্ধি w, u এর সাথে θ কোন তৈরি করে।

u এর দিক বরাবর বেগগুলোকে বিভাজিত করে পাই,

$w\cos\theta = u + v\cos\alpha$

দেয়া আছে, u এর দিক বরাবর w এর লম্বাংশের পরিমাণ v.



$\therefore v = u + v\cos\alpha$

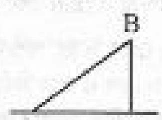
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{v-u}{v}$ $\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{v-u}{v}$

লব্ধি $w=\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}=\sqrt{u^2+v^2+2uv\frac{v-u}{v}}$

$\therefore w=\sqrt{v^2-u^2+2uv}$ **(Proved)**

88 m/s বেগে চলন্ত রেলগাড়ির একটি জানালা থেকে রেলগাড়ির লম্বকোণে 66 m/s বেগে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর একটি গাছে আঘাত করল। আঘাত করার সময় গাছটি রেলগাড়ি হতে 90 মি. দূরে ছিল। যখন পাথরটি নিক্ষেপ করা হয়েছিল তখন জানালাটি গাছ থেকে কত দূরে ছিল?

জানালাটির আদি অবস্থান A এবং যখন পাথর গাছটিকে আঘাত করে জানালাটির তখনকার অবস্থান D।



যেহেতু গাছটিকে আঘাত করার সময় গাছ থেকে রেলগাড়ির দূরত্ব ছিল 90 মিটার। রেললাইন হতে গাছটির দূরত্ব DB = 90 মিটার।

পাথরটি 66 মিটার/সেকেন্ড বেগে 90 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে,

$=\frac{90}{66}=\frac{15}{11}$ সেকেন্ড।

$\frac{15}{11}$ সেকেন্ড ট্রেনের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 88 \times \frac{15}{11} = 120$ মিটার

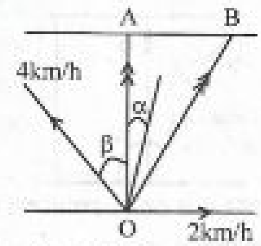
অতএব, পাথর খন্ড নিক্ষেপের সময় জানালা থেকে গাছের দূরত্ব

$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{120^2+90^2}=150$ মিটার।

Ans. 150 মিটার।

Ex-05 1 km প্রশস্ত একটি নদী 2 km/h বেগে প্রবাহিত হয়। 4 km/h বেগে একজন সাঁতারু নদীটি সোজাসুজি অতিক্রম করতে চায়। কিন্তু ভুল পথ নির্বাচন করায় অন্য পাড়ে নির্দিষ্ট বিন্দু হতে $\frac{1}{2}$ km দূরে পৌছে। সঠিক পথের সাথে বর্তমান পথের নতি কত?

Sol^n: O যাত্রাস্থল। ধরি, সোজাপথ OA এর সাথে α কোণে সাঁতারু যাত্রা করে এবং t ঘন্টায় OB দূরত্ব অতিক্রম করে সাঁতারু পাড়ে পৌছে। OA এবং তীর বরাবর লম্বাংশ নিয়ে,



OA = 4cosαt কি.মি. এবং AB = (2 + 4sinα)t কি.মি.

$4\cos\alpha t = 1$ এবং $(2+4\sin\alpha)t=\frac{1}{2}$

$\frac{2+4\sin\alpha}{4\cos\alpha}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 1+2\sin\alpha$

$\Rightarrow 2\sin\alpha + 1 - \cos\alpha = 0 \Rightarrow 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0$

α সূক্ষ্মকোণ হলে $2\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$

$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=0 \therefore \alpha = 0 \therefore$ OA ভুল পথ

ধরি, সোজাপথের সাথে সঠিক পথ β কোণে নত। তীর বরাবর লম্বাংশ নিয়ে, $4\sin\beta - 2 = 0$ যেহেতু লব্ধি বেগ তীরের লম্ব বরাবর কার্যরত।

$\sin\beta = \frac{1}{2}$

$\therefore \beta = 30°$

সঠিক পথের সাথে বর্তমান পথ 30° কোণে নত।

Ans.

Ex-06 একজন সাতারু t সময়ে সোজাসুজি নদী পার হয়। স্রোতের অনুকূলে একই দূরত্ব T সময়ে অতিক্রম করে। দেখাও যে, স্রোত ও সাতারুর বেগের অনুপাত $(t^2-T^2):(t^2+T^2)$

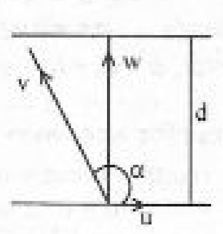
Sol^n: ধরি, নদীর প্রস্থ d.

স্রোত ও সাতারুর বেগ u ও v।

লব্ধি বেগ w এবং u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ α।

u বরাবর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $u + v\cos\alpha = 0$

$v\cos\alpha = -u$



$\therefore \quad w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

$\Rightarrow \quad w^2 = u^2 + v^2 + 2u(-u)$

$\therefore \quad w = \sqrt{v^2-u^2}$

$\therefore \quad d = wt = \sqrt{v^2-u^2}\,t$

স্রোতের অনুকূলে লব্ধি বেগ = u + v

$\therefore d = (u+v)T$

$\Rightarrow \sqrt{v^2-u^2}\,t = (u+v)T$

$\Rightarrow (v^2-u^2)t^2 = (u+v)^2T^2$

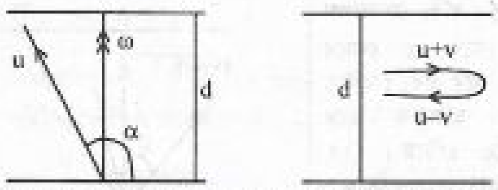
$\Rightarrow (v-u)t^2 = (u+v)T^2$

$\Rightarrow (t^2+T^2)u = (t^2-T^2)v$

$\therefore u : v = (t^2-T^2) : (t^2+T^2)$ **(Showed)**

Ex-07 একজন সাতারু আড়াআড়ি ভাবে নদী পার হয়ে ফিরে আসতে মোট t_1 সময় লাগে। তীরের সমান্তরালে নদীর প্রস্থের সমান দূরত্বে গিয়ে ফিরে আসতে মোট t_2 সময় লাগে। সাঁতারুর বেগ u এবং স্রোতের বেগ v হলে দেখাও যে, $t_1 : t_2 = \sqrt{u^2 - v^2} : u$

Solⁿ:



স্রোতের গতি বরাবর বেগগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই, $v + u\cos\alpha = 0$

$\therefore u\cos\alpha = -v$

লব্ধি $= \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha} = \sqrt{u^2 + v^2 + 2v(-v)}$

$\therefore$ লব্ধি $w = \sqrt{u^2 - v^2}$

নদীর প্রস্থ d হলে $2d = wt_1 \Rightarrow 2d = \sqrt{u^2 - v^2}\ t_1$

$\therefore t_1 = \dfrac{2d}{\sqrt{u^2 - v^2}}$ ----- (i)

স্রোতের অনুকূলে লব্ধি বেগ $= u + v$

স্রোতের প্রতিকূলে লব্ধি বেগ $= u - v$

অনুকূলে ও প্রতিকূলে d দূরত্ব অতিক্রম করতে যথাক্রমে $\dfrac{d}{u+v}$ এবং $\dfrac{d}{u-v}$ সময় লাগে

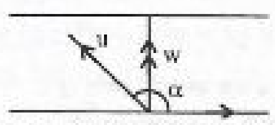
$\therefore t_2 = \dfrac{d}{u+v} + \dfrac{d}{u-v} = \dfrac{2ud}{u^2 - v^2}$ ----- (ii)

(i) ÷ (ii) → $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{2d}{\sqrt{u^2 - v^2}} \times \dfrac{u^2 - v^2}{2ud}$

$\therefore t_1 : t_2 = \sqrt{u^2 - v^2} : u$ **(Showed)**

Ex-08 সোজাসুজি একটি নদী পার হতে একজন সাতারুর t সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_1 সময় লাগে। সাঁতারুর গতিবেগ u এবং স্রোতের বেগ v হলে, প্রমাণ কর যে, $t : t_1 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$, যেখানে $u > v$

Solⁿ:



ধরি নদীর প্রস্থ d এবং সাতারু স্রোতের সাথে α কোণে সাতার দিয়ে সোজাসুজি w বেগে নদী পার হয়।

প্রশ্নমতে, $d = wt = (u + v)t_1$

$\Rightarrow t : t_1 = (u + v) : w$ --------------- (i)

স্রোতের দিক বরাবর লম্বাংশে নিয়ে পাই,

$v\cos0^\circ + u\cos\alpha = w\cos90^\circ$

$\Rightarrow v + u\cos\alpha = 0 \Rightarrow u\cos\alpha = -v$

লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

$= \sqrt{u^2 + v^2 + 2v(-v)}$

$= \sqrt{u^2 - v^2}$

$= \sqrt{(u + v)(u - v)}$

(i) হতে পাই, $t : t_1 = (u + v) : \sqrt{(u - v)(u + v)}$

$\therefore t : t_1 = \sqrt{u + v} : \sqrt{u - v}$ **(Proved)**

For practice:

01. একটি নৌকা t_1 ঘন্টায় সোজাসুজি নদী পার হয়। স্রোতের অনুকূলে t_2 ... একই দূরত্ব অতিক্রম করে। নৌকা ও স্রোতের বেগ যথাক্রমে 5 মাই... এবং 4 মাইল/ঘন্টা হলে, দেখাও যে, $t_1 : t_2 = 3 : 1$

02. দেখাও যে, স্রোতের বেগের চেয়ে কম বেগে সাঁতরিয়ে কোন সাঁতারু ... সোজাসুজি নদী পার হতে পারবে না।

03. এক ব্যক্তি 3 মাইল/ঘন্টা বেগে সাঁতার কাটে। 176 গজ প্রশস্ত ... মাইল/ঘন্টা বেগের স্রোতবিশিষ্ট একটি নদীর পার হতে তার ক্ষুদ্রতম ... সময় লাগবে? এক্ষেত্রে তীরের সাথে তার বেগের নতি কত হবে?

Ans: 2 মিনিট, ...

04. নদীর স্রোতের দ্বিগুণ বেগে তীরের সাথে সমকোণে আনত পথে একটি ... চলছে। অপর পাড়ে যাত্রাবিন্দুর সোজা বিপরীত বিন্দু হতে $1\frac{1}{2}$ মাইল ... কোন বিন্দুতে পৌঁছালে নদীর প্রস্থ কত?

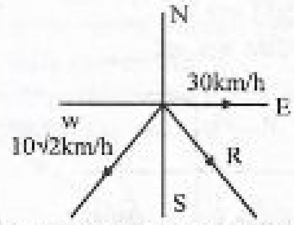
Ans: 3 ...

Type-03

আপেক্ষিক বেগ সংক্রান্ত :

Ex-01 পূর্ব দিকে ঘন্টায় 30km বেগে চলন্ত একটি রেলগাড়ির একজন যাত্রীর নিকট উত্তর-পূর্ব দিক থেকে ঘন্টায় $10\sqrt{2}$ km বেগে বাতাস প্রবাহিত ... বলে মনে হয়। বাতাসের প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

Solⁿ:



ধরি, $V_A = 30$ km/h = এটি পর্যবেক্ষকের প্রকৃত বেগ

$V_{AB} = 10\sqrt{2}$ km/h = এটি বাতাসের আপাত বেগ

মনে করি, এদের বাতাসের প্রকৃত বেগ V_B।

বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 135°

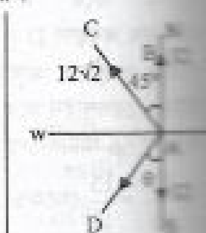
$\therefore V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{AB}^2 + 2V_A.V_{AB}\cos135^\circ}$

$= \sqrt{30^2 + (10\sqrt{2})^2 + 2.30.10\sqrt{2}\cos135^\circ} = 10\sqrt{5}$ km/h

$\therefore$ বাতাসের প্রকৃত বেগ $10\sqrt{5}$ km/h

Ex-02 একখানি নৌকা ঘন্টায় 12km বেগে উত্তর দিকে যাচ্ছে। অপর একটি নৌকা ঘন্টায় $12\sqrt{2}$km বেগে উত্তর পশ্চিম দিকে যাচ্ছে। প্রথম নৌকা সাপেক্ষে দ্বিতীয় নৌকার আপেক্ষিক বেগ ও তার দিক নির্ণয় কর।

Solⁿ : প্রথম নৌকা সাপেক্ষে দ্বিতীয় নৌকার আপেক্ষিক বেগ = 135° কোণে ক্রিয়ারত AC ও AD বরাবর ক্রিয়ারত $12\sqrt{2}$ কি.মি/ ঘন্টা ও 12 কি.মি/ঘন্টা। বেগদ্বয়ের লব্ধি



$= \sqrt{12^2 + (12\sqrt{2})^2 + 2.12.12\sqrt{2}\cos135^\circ}$

$= \sqrt{144 + 288 - 288} = 12$ km/h

আবার, $\tan\theta = \dfrac{12\sqrt{2}\sin135^\circ}{12 + 12\sqrt{2}\cos135^\circ} = \infty \therefore \theta = 90^\circ$

সুতরাং নির্ণেয় বেগ 12 km/h এবং A বিন্দুতে AB এর সাথে পশ্চিম দিকে ক্রিয়ারত থাকবে।

একখানা স্টিমার পূর্বদিকে ঘণ্টায় u কি.মি. বেগে এবং অপর একখানা ...র পূর্বদিকের সাথে θ কোণে উত্তর দিকে ঘণ্টায় 2u কি.মি. বেগে ...শীল। প্রথম স্টিমারে অবস্থিত কোন যাত্রীর নিকট দ্বিতীয় স্টিমারের দিক ... পূর্ব বলে মনে হচ্ছে।

...ও যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ ।

...করি, OS = প্রথম স্টিমারের বেগ = u

OA = দ্বিতীয় স্টিমারের বেগ = 2u

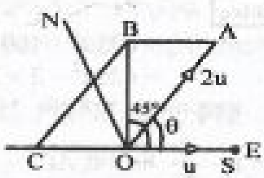
$\angle SOA = \theta$

OC = প্রথম স্টিমারের বেগ u এর সমান কিন্তু বিপরীতমুখী বেগ। OABC ...তরিক অঙ্কন করি।

...স্টিমারের সাপেক্ষে দ্বিতীয় স্টিমারের আপেক্ষিক বেগ হচ্ছে OB।

$\angle BOA = 45°$

OAB ত্রিভুজে,



$\frac{AB}{\sin AOB} = \frac{OA}{\sin ABO}$

$\Rightarrow \frac{u}{\sin(45° - \theta)} = \frac{2u}{\sin 135°}$

$\Rightarrow \sin(45° - \theta) = \frac{\sin 45°}{2}$

$\Rightarrow \sin 45° \cos\theta - \cos 45° \sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3}{4} \therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ **(Showed)**

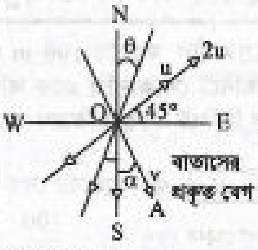
উত্তর পূর্ব দিকে ভ্রমণরত একজন ভদ্রলোকের কাছে মনে হয় বাতাস ... দিক হতে প্রবাহিত হচ্ছে, কিন্তু তার বেগকে দ্বিগুণ করলে তার কাছে ... হয় যে, বাতাস উত্তর দিকের সাথে পূর্বদিকে $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ কোণ তৈরি ...। এর আসল গতিপথ নির্ণয় কর।

...রি, $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} \therefore \tan\theta = \frac{1}{2}$ । NOS ও EOW পরস্পর লম্বভাবে O ...তে ছেদ করে। বাতাসের প্রকৃত দিক OA যা OS এর সাথে α কোণে ...। বাতাসের বেগ = v

...ম ক্ষেত্রে, $\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin 45°}$ ---- (i)

...তীয় ক্ষেত্রে,

$\frac{2u}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{v}{\sin(45° - \theta)}$ ------ (ii)



(i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে, $\frac{\sin(\alpha + \theta)}{2\sin\alpha} = \frac{\sin(45° - \theta)}{\sin 45°}$

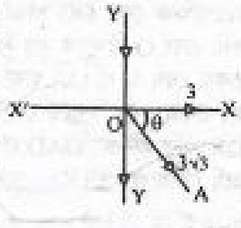
$\Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta}{2\sin\alpha} = \cos\theta - \sin\theta$

$\Rightarrow 1 + \cot\alpha\tan\theta = 2(1 - \tan\theta)$ [cosθ দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow 1 + \cot\alpha.\frac{1}{2} = 1$ [$\because \tan\theta = \frac{1}{2}$] $\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$ **Ans.**

Ex-05 একজন লোক প্রতি ঘণ্টায় 3 কি.মি. বেগে হাটলে, বৃষ্টি উলম্বভাবে পড়ে বলে তার নিকট মনে হয়। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ যদি $3\sqrt{3}$ কি.মি./ ঘণ্টা হয় তবে বৃষ্টির প্রকৃত দিক নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, বাতাসের প্রকৃত বেগ অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। লোকটির গতিপথ OX বরাবর এবং বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ OY উলম্বরেখা বরাবর। লোকটির বিপরীত দিকে OX বৃষ্টির প্রকৃত বেগ OA বরাবর।

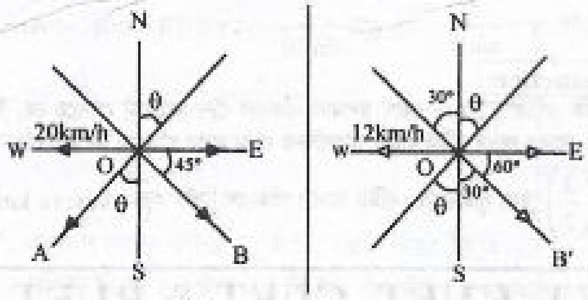


$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{\sin 90°} = \frac{3}{\sin(90 - \theta)}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ **Ans.**

Ex-06 একজন সাইকেল চালক 20 km বেগে পশ্চিম দিকে চলার সময় দেখল বৃষ্টি অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে পড়ছে। যখন 12 km বেগে চলল; তখন দেখল বৃষ্টি উল্লম্বের সাথে 30° কোণে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ u km/h উল্লম্বের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। প্রকৃত বেগ OA বরাবর। প্রথম ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বেগ OB ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বেগ OB' বরাবর কাজ করে।



প্রথম ক্ষেত্রে, $\frac{20}{\sin(\theta + 45°)} = \frac{u}{\sin 45°}$ ------- (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $\frac{12}{\sin(\theta + 30°)} = \frac{u}{\sin 60°}$ ------- (ii)

$(i) \div (ii) \rightarrow \frac{20\sin(\theta + 30°)}{12\sin(\theta + 45°)} = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 5(\sin\theta\cos 30° + \cos\theta\sin 30°)$

$= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\sin\theta\cos 45° + \cos\theta\sin 45°)$

$\Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{5}{2}\cos\theta$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin\theta = (3\sqrt{3} - 5)\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2\sqrt{3}} = .056$

$\therefore \theta = 3.205°$ (i) হতে $\frac{20}{\sin 48.205°} = \frac{u}{\sin 45°}$

$\therefore u = 18.97$ km/h $\therefore$ প্রকৃত বেগ 18.97 km/h **Ans.**

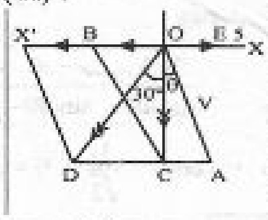
Ex-07 বৃষ্টির দিকে একটি লোক ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে হেঁটে দেখল বৃষ্টি খাড়াভাবে পড়ছে। তার বেগ দ্বিগুণ করে দেখল বৃষ্টি খাড়া রেখার সাথে 30° কোণে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

Sol^n: ১ম ক্ষেত্র : ধরি, লোকটি OX বরাবর 5 km/h বেগে চলছে। বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ OC খাড়া রেখা দ্বারা এবং লোকটির বেগ OE দ্বারা সূচিত করি এবং O বিন্দুতে এর সমান ও বিপরীতমুখী বেগ OB প্রয়োগ করি। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ V যা OA দ্বারা সূচীত করে OACB সামান্তরিক অঙ্কন করি।

২য় ক্ষেত্র : O বিন্দুতে লোকটির বেগের দ্বিগুণ ও বিপরীত বেগ প্রয়োগ করি যা OX' দ্বারা সূচীত। OADX' সামান্তরিকের OD কর্ণ বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের দিক হবে। তাহলে ∠COD = 30° এবং ∠AOC = θ (ধরি)।

প্রথম ক্ষেত্র : $\dfrac{5}{\sin\theta} = \dfrac{v}{\sin 90^\circ}$ ----- (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : $\dfrac{10}{\sin(\theta+30^\circ)} = \dfrac{v}{\sin 60^\circ}$ --- (ii)



$(i) \div (ii) \rightarrow \dfrac{5}{\sin\theta} \times \dfrac{\sin(\theta+30^\circ)}{10} = \dfrac{v}{\sin 90^\circ} \times \dfrac{\sin 60^\circ}{v}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin(\theta+30^\circ)}{\sin\theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\theta\cos30^\circ + \sin30^\circ\cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan30^\circ \therefore \theta = 30^\circ$

(i) নং হতে, $v = \dfrac{5}{\sin\theta} \Rightarrow v = \dfrac{5}{\sin 30^\circ} \therefore v = 10$ km/h **Ans.**

For practice:

01. প্রতি ঘণ্টায় 72 km বেগে চলমান একজন ট্রেন আরোহী লেখছে যে, খাড়া গতিপথ বরাবর পড়ন্ত বৃষ্টির ধারার আপেক্ষিক গতিবেগের গতিপথ উলম্বরেখার সাথে $\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)$ কোণ সৃষ্টি করে। বৃষ্টির আসল গতিবেগ নির্ণয় কর। **Ans:** 48 km/h

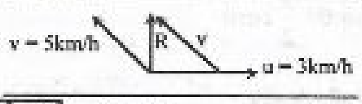
BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. দুটি নৌকা প্রত্যেকে 5 km/h বেগে চলে 3 km/h বেগে প্রবাহিত 550 m চওড়া একটি নদী পাড়ি দিতে চায়। একটি নৌকা ন্যূনতম পথে ও অপরটি ন্যূনতম সময়ে নদীটি পাড়ি দেয়। তারা একই সময়ে যাত্রা করলে তাদের অপর পাড়ে পৌঁছানোর সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। [16-17]

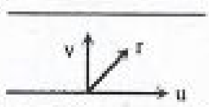
Solve ন্যূনতম পথঃ



$R = \sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km/h

$t_1 = \dfrac{d}{R} = \dfrac{0.55}{4} = 8.25\text{min}$

ন্যূনতম সময়ঃ



$t_2 = \dfrac{d}{v} = \dfrac{0.55}{5} = 6.6$ min; $\Delta t = t_1 - t_2 = 1.65$ min **Ans.**

02. কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত 10,20,30,40,50 m/s বেগ... প্রথম বেগের দিকের সাথে অপরগুলো যথাক্রমে 45°,60°,90° এবং ... কোণ উৎপন্ন করে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [13-14]

Solve লব্ধি R হলে,

$R\cos\theta = 10\cos0^\circ + 20\cos45^\circ + 30\cos60^\circ + 40\cos90^\circ + 50\cos...$
$= 3.786$ .... (i)

$R\sin\theta = 0 + 20\sin45^\circ + 30\sin60^\circ + 40\sin90^\circ + 50\sin135^\circ$
$= 115.478$ .... (ii)

$R = \sqrt{(3.786)^2 + (115.478)^2} = 115.54$ m/s

$(ii) \div (i) \Rightarrow \dfrac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{115.478}{3.786} \Rightarrow \theta = 88.123^\circ$

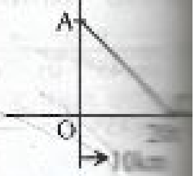
03. একটি জাহাজ কোন স্থান হতে 15 km/hr বেগে উত্তর দিকে যাত্রা ... যাত্রার শুরুতেই তার পূর্বদিকে 10 km দূরে অপর একটি জাহাজ ... পেল। দ্বিতীয় জাহাজটি 20 km/hr বেগে পশ্চিম দিকে যাচ্ছে। ... তাদের মাঝে দূরত্ব ন্যূনতম হবে? তাদের মাঝে ন্যূনতম দূরত্ব কত?

Solve এখন, $AC^2 = OC^2 + AO^2 = (15t)^2 + (10 - 20t)^2$
$= 625t^2 + 100 - 400t$
$= 625t^2 - 2 \times 25t \times 8 + 64 + 36 = (25t - 8)^2 ...$

∴ দূরত্ব ন্যূনতম হবে যদি, $25t - 8 = 0$ হয়

$\Rightarrow t = \dfrac{8}{25}$ hr এবং $AC^2 = 36$

∴ AC = 6 ∴ ন্যূনতম দূরত্ব = 6 km



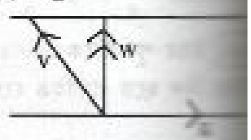
∴ ন্যূনতম দূরত্বের জন্য সময় = $\dfrac{8}{25}$ hr এবং ন্যূনতম দূরত্ব = 6 km

04. একজন লোক আড়াআড়িভাবে সাঁতার কেটে b ফুট ... স্রোতবিহীন নদী t_1 সেকেন্ডে পাড়ি দিতে পারে এবং নদীতে স্রোত ... t সেকেন্ডে পারে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [00-01]

Solve ধরি, নৌকার বেগ = v, স্রোতের বেগ = u

এখানে, $v = \dfrac{b}{t_1}$

$w = \sqrt{v^2 - u^2}$; কিন্তু $b = wt$



$\therefore \left(\dfrac{b}{t}\right)^2 = w^2 = v^2 - u^2 \Rightarrow \left(\dfrac{b}{t_1}\right)^2 - u^2 = \left(\dfrac{b}{t}\right)^2$

$\therefore u = b\sqrt{\left(\dfrac{1}{t_1^2} - \dfrac{1}{t^2}\right)}$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. স্রোতহীন অবস্থায় 100 m প্রশস্ত একটি নদী সাঁতরিয়ে একজন ... মিনিটে সোজাসুজি একে অতিক্রম করে কিন্তু স্রোত থাকলে সে ... 5 মিনিটে একে অতিক্রম করে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [03-04: RUET 10-11, 06-07]

Solve ধরি, স্রোতের বেগ = u

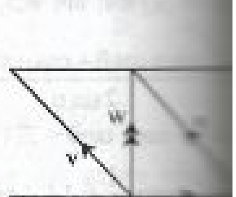
সাঁতারুর বেগ = $v = \dfrac{100}{4} = 25$m/min

লব্ধি বেগ = $w = \dfrac{100}{5} = 20$ m/min

চিত্র হতে, $v^2 = u^2 + w^2$

$\Rightarrow u^2 = v^2 - w^2$

$\therefore u = \sqrt{v^2 - w^2} = \sqrt{(25)^2 - (20)^2}$
$= 15$ m/min **Ans.**



RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি ক্রিকেট বল ভূমির সাথে সমান্তরালভাবে 20 মি/সেঃ সমবেগে চলছে। কিছুক্ষণ পর হঠাৎ ব্যাট দ্বারা পূর্ববেগের সাথে সমকোণে আঘাত করায় বলটি 30 মি/সেঃ বেগে চলতে লাগলো। ব্যাটের আঘাত বেগ নির্ণয় কর। [05-06]

Solve ধরি, আঘাতের বেগ v m/s

আদিবেগ ও আঘাত জনিত বেগ পরস্পর সমকোণে ক্রিয়ারত এবং তাদের লব্ধি 30 m/s $\therefore 20^2 + v^2 = 30^2 \therefore v = 10\sqrt{5}\ ms^{-1}$ **Ans.**

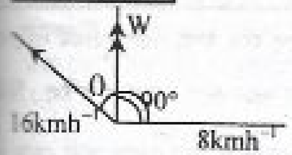
MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি গাড়ী 8 km h^{-1} বেগে চলছে। গাড়ী থেকে 16 km h^{-1} বেগে একটি বস্তু কোন দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি গাড়ীর বেগের সাথে সমকোণে চলবে? [12-13]

A. 120° B. 150° C. 135° D. 90°

Ans A Solve



লব্ধি বেগ = W যা 8kmh^{-1} এর সাথে সমকোণে আছে।

∴ 8kmh^{-1} বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$8\cos 0° + 16\cos\theta = W\cos 90°$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-8}{16} = \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \theta = 120°$

02. কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বেগ যথাক্রমে 7 ms^{-1}, 8 ms^{-1} এবং 13 ms^{-1}, কণাটি স্থির থাকলে ক্ষুদ্রতর বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হবে- [12-13]

A. 30° B. 60° C. 45° D. 90°

Ans B Solve ক্ষুদ্রতর বেগদ্বয়ের অর্ন্তগত কোণ θ ও কণাটি স্থির থাকলে সাম্যাবস্থার সূত্র মতে,

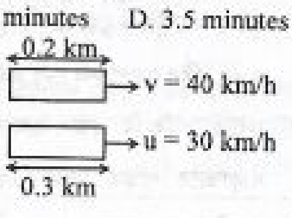
$$7^2 + 8^2 + 2\times 7\times 8\times\cos\theta = 13^2$$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{169-113}{112} \quad \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

03. 200 m এবং 300 m দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন একটি স্টেশন থেকে একই দিকে দুইটি সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে 40 km h^{-1} এবং 30 km h^{-1} বেগে যাত্রা করে। কত সময়ে এরা পরস্পরকে অতিক্রম করবে? [12-13]

A. 2 minutes B. 3 minutes C. 4 minutes D. 3.5 minutes

Ans B Solve প্রশ্ন থেকেই বোঝা যাচ্ছে যে 40 km/h বেগের ট্রেনটা অতিক্রম করবে। যদি এতে t সময় (unit in hour) লাগে তাহলে–



$40t = 30t + 0.2 + 0.3$

$\Rightarrow t = 0.05\ h = 3$ minutes

04. নদীর স্রোতের দ্বিগুণ বেগে ও স্রোতের সাথে লম্বভাবে একটি নৌকার দাঁড় টানা হচ্ছে। নৌকাটি অপর তীরে যাত্রা বিন্দুর ঠিক বিপরীত স্থান থেকে 2.5 কি.মি ভাটিতে পৌছাল। নদীটির প্রস্থ কত? [11-12]

A. 2.5 km B. 4 km C. 3 km D. 5 km

Ans D Solve এখানে, 2.5 km = u × t

[t স্থানটিতে পৌছানোর সময়]

এখন প্রস্থ d হলে,

d = 2 × ut = 2 × 2.5 = 5 km

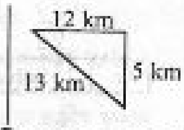


05. এক ব্যক্তি ঘন্টায় 3 km বেগে উত্তর দিকে 12 km হাঁটার পর পশ্চিম দিকে 150 মিনিটে 5 km পথ হাঁটল। ব্যক্তিটির গড় বেগ হল- [11-12]

A. $\frac{17}{6}$ km/hr B. $\frac{2}{3}$ km/hr

C. 2 km/hr D. 2.5 km/hr

Ans C Solve গড় বেগ $\overline{V} = \frac{S}{t} = \frac{13\text{km}}{(4+2.5)\text{hr}} = 2$ km/hr



06. AB সরলরেখার সাথে 60° কোণে A বিন্দু হতে একটি কণা যাত্রা করে। BA সরলরেখার সাথে 30° কোণে B বিন্দু হতে একই সময়ে অপর একটা কণা ঘন্টায় 10 km সমবেগে যাত্রা করে এবং কিছুক্ষণ পর প্রথম কণার সাথে মিলিত হয়। প্রথম কণার বেগ নির্ণয় কর। [10-11]

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ km h^{-1} B. $\frac{20}{\sqrt{3}}$ km h^{-1}

C. $\frac{10}{\sqrt{3}}$ km h^{-1} D. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ km h^{-1}

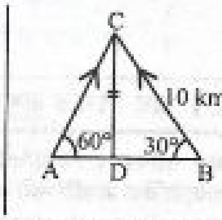
Ans C Solve ধরি, t সময় পর মিলিত হয়।

$\therefore AC = Vt$ ও $BC = 10\times t$

এখন, $CD = BC\sin 30° = AC\sin 60°$

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\sin 30°}{\sin 60°} = \frac{V\times t}{10\times t}$

$\therefore V = \frac{10}{\sqrt{3}}$ km/h



07. একজন ব্যক্তি ঘন্টায় 5 কি.মি. বেগে উত্তর দিকে 10 কি.মি. হাঁটার পর পশ্চিম দিকে 3 ঘন্টায় 12 কি.মি. পথ হাঁটল। লোকটির গড় বেগ কত? [09-10]

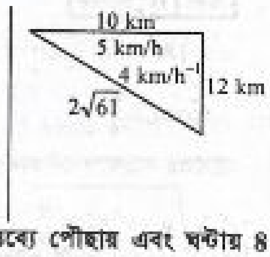
A. $\frac{22}{5}$ km per hour B. $\frac{2\sqrt{61}}{8}$ km per hour

C. $\frac{2\sqrt{61}}{5}$ km per hour D. None of the above

Ans C Solve

$\therefore$ গড় বেগ, $\overline{V} = \frac{S}{t} = \frac{2\sqrt{61}}{2+3}$

$= \frac{2\sqrt{61}}{5}$ km/hr



08. এক ব্যক্তি ঘন্টায় 7 মাইল গতিতে তার গন্তব্যে পৌছায় এবং ঘন্টায় 8 মাইল গতিতে পূর্বের স্থানে ফিরে আসে। তার গড় গতি নির্ণয় কর। [09-10]

A. 7.5 miles per hour B. 7.66 miles per hour

C. 7.33 miles per hour D. 7.47 miles per hour

Ans D Solve $\overline{V} = \frac{s}{t} = \frac{2s'}{\frac{s'}{7}+\frac{s'}{8}}$ [s′ = গন্তব্যের দূরত্ব]

$= \frac{2}{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} = \frac{56\times 2}{7+8} = 7.47$ miles/hr

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তরাল এবং একই ক্রমানুসারে ক্রিয়ারত 1, 2, 3 একক বেগের লব্ধির মান নির্ণয় কর। [07-08]

A. $F = \sqrt{5}$ একক B. $F = \sqrt{3}$ একক C. $F = \sqrt{2}$ একক
D. $F = \sqrt{\frac{3}{2}}$ একক E. $F = \sqrt{\frac{3}{7}}$ একক

Ans | B | Solve

বলের লব্ধির মান = বলগুলোর সাধারণ অন্তর $\times \sqrt{3} = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ একক

02. একটি গাড়ি ঘন্টায় 8 km বেগে চলছে। গাড়িটি থেকে ঘন্টায় 16 km বেগে একটি বস্তু কোন দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি গাড়ির বেগের সাথে সমকোণে চলবে? [06-07]

A. 60° B. 120° C. 90° D. 150° E. 30°

Ans | B | Solve $\tan 90° = \frac{16\sin\alpha}{8 + 16\cos\alpha} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$

03. এক ব্যক্তি কোন স্থানে যাওয়ার সময় ঘন্টায় 4 মাইল বেগে যায় এবং আসার সময় ঘন্টায় 3 মাইল বেগে ফেরত আসে। তার গড় গতিবেগ কত? [06-07]

A. 24/5 miles/hour B. 12/5 miles/hour
C. 24/11 miles/hour D. 12/11 miles/hour
E. 24/7 miles/hour

Ans | E | Solve ধরি, দূরত্ব = x

$\therefore \bar{v} = \frac{2x}{\frac{x}{4} + \frac{x}{3}} = \frac{2 \times 4 \times 3}{7} = \frac{24}{7}$ miles/hr

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

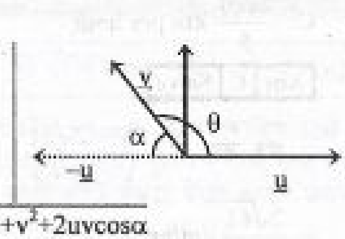
01. একজন নাবিক v কিমি/ঘন্টা বেগে একটি নৌকা চালিয়ে u কিমি/ঘন্টা বেগে প্রবাহিত একটি নদী ন্যূনতম পথে পাড়ি দিতে চায়। নদীর স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার আপেক্ষিক বেগ কত? [14-15]

A. $\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos(\sin^{-1}\frac{u}{v})}$ B. $\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos(\sin^{-1}\frac{u}{v})}$
C. $\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos(\tan^{-1}\frac{u}{v})}$ D. $\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\sin(\sin^{-1}\frac{u}{v})}$
E. $\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\sin(\sin^{-1}\frac{u}{v})}$

Ans | D | Solve

$\alpha = 180° - \theta$ $\cos\theta = \frac{-u}{v}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{u}{v}$



স্রোতের সাপেক্ষে নৌকার বেগ $= \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}$

$= \sqrt{u^2+v^2+2uv\frac{u}{v}} = \sqrt{u^2+v^2+2uv\sin\left(\sin^{-1}\frac{u}{v}\right)}$ একক

02. 80 m প্রশস্ত একটি নদীতে স্রোত না থাকলে তা সোজাসুজি পাড়ি দিতে একজন লোকের সময় লাগে 4 minutes, কিন্তু স্রোত থাকলে তা পার হতে সময় লাগে 5 minutes। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [12-13]

A. 15 m/min B. 12 m/min C. 16 m/min
D. 14 m/min E. 13 m/min

Ans | B | Solve লোকটির বেগ, $v = \frac{80}{4} = 20$ m/min

লব্ধি বেগ, $w = \frac{80}{5} = 16$ m/min

$\therefore$ স্রোতের বেগ u হলে, $u = \sqrt{v^2 - w^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ m/min

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একজন ব্যক্তি আড়াআড়িভাবে 3 km/hr বেগে সাঁতার কেটে 177 মিটার প্রশস্ত স্রোতবিহীন নদী পার হতে পারে। নদী পার হতে স্বল্পতম সময়ের প্রয়োজন হবে? যদি স্রোতের গতিবেগ 5 km/hr হয়, যাত্রা বিন্দুর ঠিক বিপরীত বিন্দু হতে কত দূরে উক্ত ব্যক্তি পৌঁছাবে? [14-15]

A. 3.54 sec, 295m B. 3.54 min, 295 m
C. 3.54 sec, 2.95 km D. None

Ans | B | Solve $t_{min} = \frac{177}{\frac{3\times1000}{3600}}$

$= 212.4$ s $= 3.54$min

$x = ut \Rightarrow x = \left(\frac{5\times10^3}{3600}\times212.4\right)$m $= 295$ m

SELF TEST [Written]

01. দুইটি মোটর গাড়ি একই সময়ে A ও B বিন্দু হতে যাত্রা করল। প্রথম গাড়িখানা ঘন্টায় 12 কি.মি. সমবেগে AB সরলরেখার সাথে 60° কোণে গতিশীল। দ্বিতীয় গাড়িখানা ঘন্টায় $20\sqrt{3}$ কি.মি. সমবেগে কোন দিকে যাত্রা করলে তারা কোন এক সময় মিলিত হবে? **Ans.** BA রেখার সাথে 17.46° কোণে

02. ঘন্টায় v_1 কি.মি. বেগে প্রবাহিত একটি নদীর পার হওয়ার জন্য একই বিন্দু হতে একই সময়ে দুইখানা নৌকা যথাক্রমে ঘন্টায় u ও v কি.মি. বেগে যাত্রা করল। প্রথম নৌকাটি ন্যূনতম পথে এবং দ্বিতীয় নৌকাটি ন্যূনতম সময়ে পথ নিয়ে একই সময়ে অপর পাড়ে পৌঁছাল।

u > v হলে দেখাও যে, $v^2 + v_0{}^2 = u^2$

03. একটি ট্রেন অনুভূমিক রেলপথে ঘন্টায় 60 কিলোমিটার বেগে অগ্রসর হচ্ছে। একই দিকে প্রবাহিত বায়ু কর্তৃক তাড়িত হয়ে বৃষ্টি ধারা উলম্ব রেখার সাথে 30° কোণে প্রতি সেকেন্ডে $8\frac{1}{3}$ মিটার বেগে পতিত হচ্ছে। ট্রেনের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের দিক নির্ণয় কর।

Ans. বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ এর প্রকৃত গতিবেগের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে

04. ঘন্টায় 2 কি.মি. বেগে ভ্রমণরত একজন লোকের কাছে মনে হয় যে, বৃষ্টি খাড়াভাবে পতিত হচ্ছে। কিন্তু যখন তার গতিবেগ বৃদ্ধি পেয়ে ঘন্টায় 4 কিলোমিটার হয় তখন তার কাছে মনে হয় যে, বৃষ্টি তাকে 45° কোণে আঘাত করছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ও দিক নির্ণয় কর।

Ans. বৃষ্টির প্রকৃত গতিবেগ $2\sqrt{2}$ কি.মি./ঘন্টা এবং দিক উলম্বের সাথে 45° কোণে

05. প্রতিটি 61 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেন সমান্তরাল রেলপথ বরাবর যথাক্রমে ঘন্টায় 32 ও 48 কি.মি. বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। ট্রেন দুটি পরস্পরকে অতিক্রম করতে সময় লাগবে? **Ans.** 5.49 সেকেন্ড

SELF TEST [MCQ]: 01

01. ঘন্টায় 36 কি.মি. বেগে চলন্ত কোন গাড়ি হতে এক ব্যক্তি গাড়ির বেগের সাথে সমকোণে 5 m/s বেগে লাফ দিলে ঐ ব্যক্তি যে বেগে মাটিতে পড়বে তার দিক উলম্বের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে?

A. $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ B. $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\tan^{-1}\frac{2}{3}$

02. কোন স্থানে বাতাস ঘন্টায় $35\sqrt{2}$ কি.মি. বেগে দক্ষিণ পূর্ব দিকে প্রবাহিত। বাতাসের বেগের দক্ষিণমুখী অংশক-

A. 36 km/h B. 35 km/h C. 37 km/h D. 40 km/h

03. একখানা লঞ্চ ঘন্টায় 10 কি.মি. বেগে চলতে পারে। ঘন্টায় 5 কি.মি. বেগে প্রবাহিত একটি তীরের কোন বিন্দু হতে কোন দিকে যাত্রা করলে সোজাসুজি অপর তীরের বিপরীত বিন্দুতে পৌছাতে পারবে?

A. $\frac{2\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$

04. একখানা নৌকা কোন নদীর স্রোতের সাথে সমকোণে যাত্রা করে যাত্রাবিন্দু হতে নদী বরাবর 1.5 কি.মি. দূরে অপর পারে পৌছল। নৌকার বেগ স্রোতের বেগের দ্বিগুণ হলে নদীর প্রস্থ-

A. 3 মি. B. 1.5 মি. C. 3 কি.মি. D. $\frac{3}{2}$ কি.মি.

05. কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বেগের লব্ধি তাদের বৃহত্তরটির সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে। বৃহত্তর বেগটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণ 30° হয়। বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ-

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{15}$

06. কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল u ও v বেগের লব্ধি u এর দিকের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। একই কোণে ক্রিয়াশীল u ও v_1 বেগের লব্ধি v_1 এর দিকের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে নিচের কোনটি সত্য-

A. $v^2 = uv_1$ B. $v_1^2 = uv$ C. $u^2 = vv_1^2$ D. $\frac{u}{v} = \frac{v_1}{u}$

07. কোন নির্দিষ্ট বেগের মান 100 m/s; তার দুই পার্শ্বে 60° ও 45° কোণে তার অংশকদ্বয়-

A. $\frac{200\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$ ও $\frac{100}{\sqrt{3}+1}$ B. $\frac{200}{\sqrt{3}+1}$ ও $\frac{100\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$

C. $\frac{200}{\sqrt{3}+1}$ ও $\frac{100\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$ D. None of these

08. একটি লোক 4 km/h বেগে সোজা পূর্ব দিকে যাওয়ার সময় দেখল বাতাস উত্তর পূর্ব হতে $4\sqrt{2}$ কি.মি. গতি বেগে প্রবাহিত হচ্ছে বাতাসের প্রকৃত বেগ-

A. 4 m/h B. 3 m/h C. 4 km/h D. 5 km/h

09. প্রতি ঘণ্টায় 64 km বেগে সোজা পূর্ব দিকে গতিশীল একটি ট্রেনের তুলনায় একটি বিমানের আপেক্ষিক বেগ সোজা উত্তর দিকে প্রতি ঘন্টায় 120 কি.মি.। ভূপৃষ্ঠের তুলনায় বিমানটির আপেক্ষিক বেগ-

A. 136 m/s B. 136 km/h C. 63 km/h D. None

10. বৃষ্টি 30 m/s বেগে খাড়াভাবে পড়ছে। একজন রেলগাড়ির যাত্রীর কাছে তা খাড়ারেখার সাথে 60° কোণে পড়ছে বলে মনে হয়। রেলগাড়ির বেগ-

A. $30\sqrt{31}$ B. $30\sqrt{2}$ C. $30\sqrt{3}$ D. $15\sqrt{3}$ m/s^{-1}

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	04. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	
03. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	

Corrcet Answer

10.C	09.B	08.C	07.C	06.D
05.B	04.C	03.C	02.B	01.B

SELF TEST [MCQ]: 02

01. একটি বস্তুর উপর $3cms^{-1}$, $7cms^{-1}$ এবং $8cms^{-1}$ বেগ ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা রক্ষা করে। বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম বেগ দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

A. 30° B. 60°
C. 90° D. 120°

02. একজন সাঁতারু স্রোতের বেগের 2 গুণ বেগে সাঁতার দিয়ে একটি নদীর তীরে যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছিল। স্রোতের সাথে তার দিক নির্ণয় কর।

A. 90° B. 120°
C. 150° D. 180°

03. এক ব্যক্তি নদীর স্রোতের সাথে সমকোণে যাত্রা করে অপর পাড়ে যাত্রাস্থানের বিপরীত বিন্দু হতে নদীর তীর বরাবর 500m দূরে পৌঁছিল। সাতারুর বেগ স্রোতের বেগের দ্বিগুণ হলে, নদীর প্রস্থ নির্ণয় কর।

A. 1km B. 0.1km
C. 100m D. 0.1m

04. 500m প্রশস্ত এবং $3kmh^{-1}$ বেগে প্রবাহিত একটি নদী $5kmh^{-1}$ বেগে চলে দুইখানা নৌকা একটি ন্যূনতম পথে এবং অন্যটি স্বল্পতম সময়ে পার হয়। এদের সময়ের ব্যবধান নির্ণয় কর।

A. 60s B. 1min
C. 1.2min D. 1.5min

05. একজন সাঁতারু 400m প্রস্থের একটি নদী 4min এ আড়াআড়িভাবে পার হতে পারে। স্রোত থাকলে একই পথে পার হতে তার 1min সময় বেশি লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

A. $50ms^{-1}$ B. $40ms^{-1}$
C. $60ms^{-1}$ D. $90ms^{-1}$

06. $20kmh^{-1}$ বেগে চলন্ত একটি বাস থেকে একটি বস্তুকণা $25kmh^{-1}$ বেগ কোনদিকে নিক্ষেপ করলে তা বাসের বেগের সাথে লম্বভাবে চলবে?

A. $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ B. $\cos^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$
C. $\cos^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$ D. $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$

07. A ও B দুই বন্ধু যথাক্রমে V এবং 2V বেগে গতিশীল এবং তাদের গতিপথ যে দুই সরলরেখা বরাবর তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ, A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক গতি কত?

A. $V\sqrt{5-4\cos\theta}$ B. $V\sqrt{5+6\sin\theta}$
C. $V\sqrt{4-5\cos\theta}$ D. $V\sqrt{4+5\cos\theta}$

08. দুটি বেগের লব্ধি 20 km/h এবং লব্ধি 15 km/h বেগের সাথে লম্ব। অপর বেগটির মান কত?

A. 35 km/h B. 30 km/h
C. 25 km/h D. 10 km/h

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	04. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	05. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	

Corrcet Answer

08.C	07.A	06.D	05.C	04.D	03.A	02.B	01.D

ত্বরণ

এক নজরে ত্বরণ-এর গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

- $v = \frac{ds}{dt} = u \pm ft$
- $S = \left(\frac{u+v}{2}\right) \times t$
- ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt} = \frac{v-u}{t}$
- $v^2 = u^2 \pm 2fs$
- t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S = ut \pm \frac{1}{2} ft^2$
- t তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $S_t = u \pm \frac{1}{2} f(2t-1)$
- গড় বেগ $\bar{v} = \frac{u+v}{2} = u + \frac{1}{2} ft = v - \frac{1}{2} ft = \frac{t}{2}$ সময়ের বেগ
- একটি বস্তু আদিবেগসহ t তম সেকেন্ডে St_{th} এবং n তম সেকেন্ডে Sn_{th} দূরত্ব অতিক্রম করলে, ত্বরণ $f = \frac{St_{th} - Sn_{th}}{t-n}$ [For M.C.Q]
- একটি গুলি একটি লক্ষবস্তুর x মিটার প্রবেশ করার পর এর বেগ $\frac{1}{n}$ অংশ কমে গেলে এটি লক্ষবস্তুর ভেতর আরও $\frac{(n-1)^2}{(2n-1)} x$ মিটার প্রবেশ করবে। [For M.C.Q]
- বন্দুকের গুলি x দূরত্ব প্রবেশ করার পর বেগ অর্ধেক হলে, এটি আরও $\frac{x}{3}$ দূরত্ব প্রবেশ করবে। [For M.C.Q]

সমাধানসহ কিছু গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যাবলি

Ex-01 একটি কনা কোন সরলরেখা বরাবর সমত্বরণে চলে পঞ্চম সেকেন্ডে 7 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করল ও কিছুক্ষণ পর থেমে গেল। যদি কনাটি সম্পূর্ণ অতিক্রান্ত দূরত্বের $\frac{1}{64}$ অংশ তার গতির শেষ সেকেন্ডে অতিক্রম করে থাকে তবে কতক্ষণ ধরে কণাটি চলছে এবং তার আদিবেগ কত তা নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, আদিবেগ = u মি/সে. সময় t সেকেন্ড এবং ত্বরণ f মি/বর্গ সে.

তাহলে, $7 = u + \frac{1}{2} f(2.5-1) = u + \frac{9}{2} f$ ----- (i)

আবার, $0 = u + ft$ ----- (ii)

এবং $u + \frac{1}{2} f(2t-1) = \frac{1}{64}(ut + \frac{1}{2} ft^2)$ ----- (iii)

(iii) হতে,

$u + ft - \frac{1}{2} f = \frac{1}{64} t(u + \frac{1}{2} ft)$

$\Rightarrow 0 - \frac{1}{2} f = \frac{t}{64}(0 - \frac{1}{2} ft)$

$\Rightarrow t^2 = 64 \quad \therefore t = 8$ সে.

(ii) হতে, $u = -8f$

(i) হতে, $f = -2$ মি./সে.

$\therefore u = 16$ মি./সে.

আদিবেগ 16 মি./সে. এবং সময় 8 সে.। **Ans.**

Ex-02 $200\ ms^{-1}$ বেগে চলন্ত একটি বুলেট সর্বোচ্চ 18 cm পুরু ... তক্তা ভেদ করতে পারে। একই বেগ সম্পন্ন বুলেট পুরু 10 cm তক্তা ... করে কত বেগে বেরিয়ে যাবে?

Solⁿ: মনে করি, বাধাজনিত মন্দন f এর প্রভাবে বুলেটটি 18 cm অতিক্রম করতে ...

$\therefore 0^2 = 200^2 - 2.f.\frac{18}{100} \Rightarrow f = \frac{200^2 \times 100}{36} = \frac{10^6}{9} ms^{-2}$

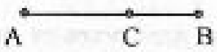
10 cm অতিক্রম করার পর নির্ণেয় বেগ $V ms^{-1}$ হলে

$V^2 = 200^2 - 2.\frac{10^6}{9} \times \frac{10}{100} \Rightarrow V = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3} ms^{-1}$

সুতরাং বুলেটটি 10cm পুরু তক্তা ভেদ করে $133\frac{1}{3} ms^{-1}$ বেগে বেরিয়ে যাবে। Ans.

Ex-03 এক ব্যক্তি তার 50m সামনে স্থিরাবস্থা হতে সুষম ত্বরণে একটি ... ছাড়তে দেখে সমবেগে দৌড়াতে লাগল এবং এক মিনিটে কোন রকমে ... ধরতে পারল। লোকটির বেগ ও বাসের ত্বরণ নির্ণয় কর।

Solⁿ:



মনে করি, লোকটি A বিন্দু হতে AB এর C বিন্দুতে বাস দেখে দৌড় ... করে এবং t সেকেন্ডে পর B বিন্দুতে বাসটিকে ধরে। ধরি, বাসের ... f এবং লোকটির বেগ u।

বাসের অতিক্রান্ত দূরত্ব $CB = \frac{1}{2} ft^2$

লোকটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $AB = AC + CB = 50 + \frac{1}{2} ft^2 = ut$.

আবার বাসটি ধরার মুহূর্তে লোকটির বেগ ও এক মিনিটে বাসটির ... বেগ সমান অর্থাৎ $u = 60f$.

$t = 60$ সে. সুতরাং $50 + \frac{1}{2} f.60^2 = 60f.60 \Rightarrow f = \frac{100}{3600} = \frac{1}{36}$ ...

$\therefore u = 60f = 60 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{3}\ ms^{-1}$ Ans.

Ex-04 একখানা রেলগাড়ি এক স্টেশন হতে অন্য স্টেশনে গিয়ে থামে। ... গতিপথের প্রথমাংশ f সমত্বরণে এবং পরে ব্রেক প্রয়োগ করে f_1 ... চলে। স্টেশন দুটির দূরত্ব a হলে দেখাও যে, গাড়িখানা এক স্টেশন ... অপর স্টেশনে পৌঁছার সময় $\sqrt{\frac{2a(f+f_1)}{ff_1}}$ হবে।

Solⁿ: ধরি, গাড়িটি প্রথম স্টেশন হতে স্থিরাবস্থা হতে f সমত্বরণে যাত্রা ... সেকেন্ডে চলার পরে এর গতিবেগ V হয় আবার f_1 সমমন্দনে t_2 ... চলার পরে এর পরবর্তী স্টেশনে a দূরত্ব গিয়ে থামে।

প্রথম ক্ষেত্রে, $V = 0 + ft_1$

$\therefore t_1 = \frac{V}{f} \quad \therefore S_1 = 0 + \frac{1}{2} ft_1^2 = \frac{1}{2} ft_1.\frac{V}{f} = \frac{1}{2} Vt_1$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $0 = V - f_1t_2 \quad \therefore t_2 = \frac{V}{f_1}$

$\therefore S_2 = Vt_2 - \frac{1}{2} f_1t_2^2 = Vt_2 - \frac{1}{2} f_1t_2.\frac{V}{f_1} = Vt_2 - \frac{1}{2} Vt_2$

$\therefore S_2 = \frac{1}{2} Vt_2 \ \therefore$ মোট দূরত্ব $a = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} Vt_1 + \frac{1}{2} Vt_2$

$\Rightarrow 2a = V(t_1 + t_2) \Rightarrow 2a = V\left(\frac{V}{f} + \frac{V}{f_1}\right) \therefore V = \sqrt{\frac{2a}{\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f_1}\right)}}$

মোট সময় $= t_1 + t_2 = \left(\frac{V}{f} + \frac{V}{f_1}\right) = \frac{\sqrt{2a}}{\frac{\sqrt{f+f_1}}{\sqrt{ff_1}}} \times \frac{f+f_1}{ff_1} = \sqrt{\frac{2a(f+f_1)}{ff_1}}$

(Showed)

05 একখানা রেলগাড়ি এক স্টেশন হতে ছেড়ে অন্য স্টেশনে গিয়ে থামে। গাড়িখানা তার গতিপথের প্রথম $\frac{1}{m}$ অংশে সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{n}$ অংশে সমমন্দনে এবং অবশিষ্টাংশে সমবেগে চলে। প্রমাণ কর যে, সর্বোচ্চ বেগ ও গড়বেগের অনুপাত $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):1.$

$\frac{S}{m}$ $S-\frac{S}{m}-\frac{S}{n}$ $\frac{S}{n}$
A t_1 B t_2 C t_3 D

ধরি, স্টেশন দুইটির দূরত্ব S। গাড়িখানার সর্বোচ্চ বেগ B বিন্দুতে V।

$\therefore$ AB অংশে গড়বেগ $=\frac{0+V}{2}=\frac{V}{2}$

$\therefore \frac{S}{m}=\frac{v}{2}t_1 \;\therefore\; \frac{2S}{m}=Vt_1$ ------- (i)

$\therefore$ CD অংশে গড়বেগ $=\frac{0+V}{2}=\frac{V}{2}$

$\therefore \frac{S}{n}=\frac{V}{2}t_3 \;\therefore\; \frac{2S}{n}=Vt_3$ ------- (ii)

BC অংশে, $S-\frac{S}{m}-\frac{S}{n}=Vt_2$ ------ (iii)

(i) + (ii) + (iii) $\rightarrow S+\frac{S}{m}+\frac{S}{n}=Vt_1+Vt_2+Vt_3$

$\therefore S=\frac{V(t_1+t_2+t_3)}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$ $\therefore$ গড় বেগ $=\frac{S}{t_1+t_2+t_3}$

$$=\frac{V(t_1+t_2+t_3)}{\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(t_1+t_2+t_3)}=\frac{V}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

$\therefore \frac{\text{সর্বোচ্চ বেগ}}{\text{গড় বেগ}}=\frac{V}{\frac{V}{\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}$

$\therefore$ সর্বোচ্চ বেগঃ গড় বেগ $=\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):1$ **(Proved)**

-06 কোন সরলরেখার f সমত্বরণে চলন্ত একটি কনা t সময়ে S দূরত্ব ও পরবর্তী t′ সময়ে S′ দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখাও যে, $f=\frac{2\left(\frac{S'}{t'}-\frac{S}{t}\right)}{t+t'}$

মনে করি, u আদিবেগ, ও f সমত্বরণে চলন্ত কোন কণা t সময়ে S দূরত্ব এবং (t+t′) সময়ে S+S′ দূরত্ব অতিক্রম করে।

u,f,t | t′
S | S′

$\therefore S=ut+\frac{1}{2}ft^2 \;\therefore\; S+S'=u(t+t')+\frac{1}{2}f(t+t')^2$

বিয়োগ করে, $S'=ut'+\frac{1}{2}f(t'^2+2tt')$

$\therefore \frac{S}{t}=u+\frac{1}{2}ft \;\therefore\; \frac{S'}{t'}=u+\frac{1}{2}f(t'+2t)$

$\frac{S'}{t'}-\frac{S}{t}=\frac{1}{2}f(t'+t) \;\therefore\; f=\frac{2\left(\frac{S'}{t'}-\frac{S}{t}\right)}{t+t'}$ **(Showed)**

Ex-07 কোন সরলরেখায় সমত্বরণে চলন্ত কোন বিন্দুর গড়বেগ ধারাবাহিক t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে V_1, V_2, V_3 হলে দেখাও যে, $\frac{V_1-V_2}{V_2-V_3}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$

Solⁿ:
u t_1 u_1 t_2 u_2 t_3 u_3
A V_1 B V_2 C V_3 O

মনে করি, A, B, C, D বিন্দুতে বেগ u, u_1, u_2, u_3

$\therefore V_1=\frac{u+u_1}{2}, V_2=\frac{u_1+u_2}{2}; V_3=\frac{u_2+u_3}{2}$

ধরি, ত্বরণ f

$\therefore u_1=u+ft_1 \quad \therefore u_2=u_1+ft_2=u+ft_1+ft_2$

$\therefore u_3=u_2+ft_3=u+ft_1+ft_2+ft_3$

$$\frac{V_1-V_2}{V_2-V_3}=\frac{u+u_1-u_1-u_2}{u_1+u_2-u_2-u_3}=\frac{u-u_2}{u_1-u_3}$$

$$=\frac{u-u-ft_1-ft_2}{u+ft_1-u-ft_1-ft_2-ft_3}=\frac{-f(t_1+t_2)}{-f(t_2+t_3)}$$

$\therefore \frac{V_1-V_2}{V_2-V_3}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$ **(Showed)**

Ex-08 দুইটি কনা একই সরলরেখায় যথাক্রমে a ও b সমত্বরণে চলছে। ঐ সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হতে যখন তাদের দূরত্ব x ও y তখন তাদের বেগ u এবং v; দেখাও যে, তারা দুইবারের অধিক মিলিত হতে পারে না। যদি তারা দুইবার মিলিত হয় তবে তাদের মিলিত হবার সময়ের পার্থক্য $\frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2-2(x-y)(a-b)}$।

Solⁿ: মনে করি, কোন নির্দিষ্ট সময়ে কোন নির্দিষ্ট O বিন্দু হতে দুইটি কণার দূরত্ব যথাক্রমে OA এবং OB। মনে করি, t সেকেন্ডে পরে C বিন্দুতে মিলিত হয়। কনাদ্বয়ের আদিবেগ ও ত্বরণ যথাক্রমে u,v এবং a,b।

O — A — B — C

তাহলে, $AC=ut+\frac{1}{2}at^2$

$BC=vt+\frac{1}{2}bt^2$

প্রশ্নানুসারে, OB–OA = AB = AC–BC

$\Rightarrow y-x=(ut+\frac{1}{2}at^2)-(vt+\frac{1}{2}bt^2)$

$\therefore t^2(a-b)+2t(u-v)+2(x-y)=0$ ------- (i)

(i) সমীকরণটি t সংবলিত দ্বিঘাত সমীকরণ হওয়ায় t এর মান দুইটির অধিক হতে পারে না। সুতরাং তারা দুইবারের অধিক মিলিত হতে পারে না। যদি দুইবার মিলিত হয় এবং তাদের দুইবার মিলিত হওয়ার সময় t_1 ও t_2 হয়।

তবে, $t_1+t_2=\frac{2(u-v)}{a-b}$ এবং $t_1t_2=\frac{2(x-y)}{a-b}$

সুতরাং দুইবার মিলিত হওয়ার সময়ের পার্থক্য $=t_2-t_1$

$=\sqrt{(t_2+t_1)^2-4t_1t_2}$

$=\sqrt{\frac{4(u-v)^2}{(a-b)^2}-\frac{8(x-y)}{a-b}}$

$=\frac{2}{a-b}\sqrt{(u-v)^2-2(x-y)(a-b)}$ **(Showed)**

Ex-09 f_1 সমত্বরণে চলন্ত একখানা রেলগাড়ির বেগ 0 হতে বৃদ্ধি পেয়ে v হয়, তারপর কিছুক্ষণ বেগ স্থির থাকে এবং পরে f_2 সমমন্দনে বেগ 0 হয়ে যায়। মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব x হলে দেখাও যে মোট সময় $\frac{x}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$

Solⁿ: মনে করি, t_1 সময়কাল f_1 ত্বরণে, t_2 সময়কাল v সমবেগে চলন্ত গাড়ি, t_3 সময়কাল f_2 মন্দনে চলার পর থেমে যায়।

তাহলে $v = f_1t_1$ এবং $x_1 = \frac{1}{2}f_1t_1^2 = \frac{1}{2}vt_1$

আবার $x_2 = vt_2$ এবং $0 = v - f_2t_3 \therefore v = f_2t_3$

$\therefore x_3 = vt_3 - \frac{1}{2}f_2t_3^2 = vt_3 - \frac{1}{2}vt_3 = \frac{1}{2}vt_3$

প্রশ্নানুসারে, $x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}vt_1 + vt_2 + \frac{1}{2}vt_3$

$\Rightarrow \frac{x}{v} = \frac{1}{2}t_2 + t_2 + \frac{1}{2}t_3 \therefore t_2 = \frac{x}{v} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{f_1}+\frac{v}{f_2}\right)$

মোট সময় $= t_1 + t_2 + t_3 = \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2} + \frac{x}{v} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{f_1}+\frac{v}{f_2}\right)$

$\therefore$ মোট সময় $= \frac{x}{v}+\frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ **(Showed)**

Ex-10 একই লাইনে একখানা এক্সপ্রেস গাড়ি অন্য একখানা মালগাড়িকে অতিক্রম করছে। তাদের বেগ যখন যথাক্রমে u_1 এবং u_2 তখন x দূরত্ব হতে একে অপরকে দেখতে পায়। গাড়ি দুইখানার সর্বোচ্চ ত্বরণ ও সর্বোচ্চ মন্দন যথাক্রমে f_1 ও f_2 হলে দেখাও যে, দুর্ঘটনা এড়ানো কেবলমাত্র সম্ভবপর হবে যদি $(u_1-u_2)^2 = 2(f_1+f_2)x$ হয়।

Solⁿ: এটা স্পষ্ট যে, এক্সপ্রেস গাড়ির সর্বোচ্চ মন্দন f_2 এবং মালগাড়ির সর্বোচ্চ ত্বরণ f_1 প্রয়োগ করবে। যেহেতু দুর্ঘটনা এড়ানো হচ্ছে সুতরাং এক্সপ্রেস গাড়ির সম্মুখভাগ মালগাড়ির পিছনভাগকে স্পর্শ করার পর হতে মালগাড়ির বেগ বাড়তে থাকবে এবং এক্সপ্রেস গাড়ির বেগ কমতে থাকবে।

মনে করি, পরস্পরকে দেখার t সময় পরে তারা কেবলমাত্র স্পর্শ করে ও তাদের বেগ সমান হয়।

$u_1 - f_1t = u_2 + f_2t \qquad \therefore t = \frac{u_1-u_2}{f_1+f_2}$

এক্সপ্রেস গাড়ি ও মালগাড়ির অতিক্রান্ত দূরত্ব যথাক্রমে s_1 ও s_2 হলে,

$s_1 = s_2 + x$

$\Rightarrow u_1t - \frac{1}{2}f_2t^2 = u_2t + \frac{1}{2}f_1t^2 + x \Rightarrow (u_1-u_2)t = \frac{1}{2}(f_1+f_2)t^2 + x$

$\Rightarrow \frac{(u_1-u_2)^2}{f_1+f_2} = \frac{1}{2}\frac{(u_1-u_2)^2}{f_1+f_2} + x \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{(u_1-u_2)^2}{f_1+f_2}$

$\therefore (u_1-u_2)^2 = 2(f_1+f_2)x$ **(Showed)**

Ex-11 একটি বস্তু কণা স্থির অবস্থা হতে A বিন্দু থেকে সুষম f ত্বরণে একটি সরলরেখা বরাবর যাত্রা আরম্ভ করার T সেকেন্ডে পর দ্বিতীয় আর একটি বস্তু কণা একই বিন্দু থেকে সুষম u বেগে যাত্রা আরম্ভ করে। যদি $u > 2fT$ হয় তবে দেখাও যে, দ্বিতীয় বস্তু কণাটি প্রথম বস্তু কণার $\frac{2}{f}\sqrt{u(u-2fT)}$ সে. সময় পর্যন্ত অগ্রগামী থাকবে।

Solⁿ: মনে করি, প্রথম বস্তু কণাটি যাত্রা আরম্ভ করার t সে. পর কণা দুটি পরস্পর মিলিত হয়।

$\therefore \frac{1}{2}ft^2 = u(t-T)$ ------- (i)

(i) নং একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, t এর দুটি মূল হবে অর্থাৎ বস্তু কণা দুটি দুবার মিলিত হবে।

(i) নং সমীকরণটি, $ft^2 + 2uT - 2ut = 0$

অতএব t এর মান দুটি $= \frac{2u \pm \sqrt{4u^2 - 8uTf}}{2f} = \frac{u}{f} \pm \frac{\sqrt{u^2 - 2uTf}}{f}$

$\therefore$ যে সময়ের জন্য দ্বিতীয় বস্তু কণাটি অগ্রগামী থাকবে তা হলো-

$= \frac{u}{f} + \frac{\sqrt{u^2-2uTf}}{f} - \frac{u}{f} + \frac{\sqrt{u^2-2uTf}}{f} = \frac{2}{f}\sqrt{u(u-2Tf)}$

যেহেতু $u > 2fT$ সুতরাং এই সময় ব্যবধান বাস্তব। **(Showed)**

Ex-12 একটি সচল বস্তুকণাকে তার গতিপথের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে a দূরত্বে, এর n সেকেন্ড পর b দূরত্বে, 2n সেকেন্ড পর c দূরত্বে এবং 3n সেকেন্ড পর d দূরত্বে দেখা গেল। ত্বরণ সুষম হলে প্রমাণ কর যে, $d-a = 3(c-b)$ এবং ত্বরণ $= \frac{c+a-2b}{n^2}$। বস্তু কণাটির আদিবেগ নির্ণয় কর।

Solⁿ: মনে করি, আদিবেগ u এবং ত্বরণ f।

প্রশ্নানুযায়ী, $b - a = un + \frac{1}{2}fn^2$ ------------- (i)

$c - a = u(2n) + \frac{1}{2}f(2n)^2$ -------- (ii)

$d - a = u(3n) + \frac{1}{2}f(3n)^2$ ------ (iii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $c - b = un + \frac{3}{2}fn^2$

(iii) হতে, $d - a = 3un + \frac{9}{2}fn^2$

$\therefore d - a = 3(c-b)$

আবার সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে-

$c - a = 2un + 4.\frac{1}{2}fn^2 = 2un + 4(b-a-un)$ [(i) নং হতে]

$\therefore c - a = 4(b-a) - 2un$

$\therefore u = \frac{4(b-a)-(c-a)}{2n} = \frac{4b-3a-c}{2n}$ **Ans.**

আবার, $2(b-a) - (c-a) = 2un + fn^2 - 2un - 2fn^2$

$\Rightarrow 2b - a - c = -fn^2 \quad \therefore f = \frac{c+a-2b}{n^2}$ **(Proved)**

Ex-13 f ত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা t ও t_1 ধারাবাহিক সময়ে একটি সরলরেখা একই দূরত্ব d অতিক্রম করে।

দেখাও যে, $f = \frac{2d(t-4)}{tt_1(t+t_1)}$

Solⁿ: ধরি, t সময় পর বেগ v

t_1 সময়ের আদিবেগ v

$\therefore$ প্রথম অংশের গড়বেগ $= v - \frac{1}{2}ft = \frac{d}{t}$ ------- (i)

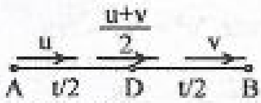
$\therefore$ দ্বিতীয় অংশের গড়বেগ $= v + \frac{1}{2}ft_1 = \frac{d}{t_1}$ ------- (ii)

(ii) – (i) $\Rightarrow \frac{1}{2}f(t_1+t) = \frac{d}{t_1} - \frac{d}{t}$

$\therefore f = \frac{2d(t-t_1)}{tt_1(t+t_1)}$ **(Showed)**

-14 একটি বস্তুকনা u বেগে এবং সমত্বরণে চলে একটি নির্দিষ্ট সময়ে A ও B বিন্দুতে পৌঁছে। এই সময়ের অর্ধেক সময়ে বস্তুটি D বিন্দুতে অবস্থান করলে দেখাও যে, B তে বেগ V হলে $\frac{AD}{BD}=\frac{3u+v}{u+3v}$

A তে বেগ = u
B তে বেগ = v



গড় বেগ = অর্ধেক সময়ে অর্জিত বেগ,

D তে বেগ = $\frac{u+v}{2}$

$$\therefore AD=\frac{u+\frac{u+v}{2}}{2}.\frac{t}{2}=\frac{3u+v}{8}t$$

$$\text{এবং } BD=\frac{\frac{u+v}{2}+u}{2}.\frac{t}{2}=\frac{3v+u}{8}.t$$

$$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{3u+v}{3v+u}$$ **(Showed)**

-15 সমত্বরণে চলমান একটি কণা সমান বিরতিকালে পরপর a, b, c দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $b=\frac{1}{2}(a+c)$ এবং অন্তবেগ ও আদিবেগের অনুপাত $\frac{5b-3a}{3a-b}$

আদিবেগ = u
অন্তবেগ = v



$\therefore a=ut+\frac{1}{2}ft^2$ -------- (i)

$\therefore a+b=u.2t+\frac{1}{2}f.(2t)^2$ --------(ii)

$\therefore a+b+c=u.3t+\frac{1}{2}.f.(3t)^2$ ------- (iii)

অন্তবেগ $v=u+f.3t=u+3ft$ ----- (iv)

(ii) – (i) × 2 ⇒

$b-a=\frac{1}{2}.f(4-2)t^2=ft^2$ -------- (v)

(i) নং হতে, $a=ut+\frac{1}{2}(b-a)$

$\therefore ut=\frac{1}{2}(3a-b)$ ------- (vi)

(v) ও (vi) হতে ft^2 ও ut এর মান (iii) নং-এ বসালে,

$a+b+c=\frac{3}{2}(3a-b)+\frac{9}{2}(b-a)$

$\Rightarrow 2a+2b+2c=6b \;\therefore b=\frac{1}{2}(a+c)$

(iv) × t ⇒ $vt=ut+3ft^2=\frac{1}{2}(3a-b)+3(b-a)$

$\therefore vt=\frac{1}{2}(5b-3a)$ ---------- (vii)

(vii) ÷ (vi) হতে, $\frac{v}{u}=\frac{5b-3a}{3a-b}$ **(Proved)**

For practice:

01. একটি সরলরেখা বরাবর একটি কণার উপর বেগ ও সমত্বরণ প্রয়োগ করা হল; এক সেকেন্ড পর অপর একটি কণার উপর এই বেগের অর্ধেক বেগ ও এই ত্বরণের দ্বিগুণ ত্বরণ প্রয়োগ করা হল। যখন দ্বিতীয় কণা প্রথম কণাকে অতিক্রম করে, এদের বেগ যথাক্রমে 31 ফু./সে. ও 22 ফু./সে.। দেখাও যে অতিক্রান্ত দূরত্ব 48 ফুট।
02. একটি বস্তু নির্দিষ্ট বেগ ও সমত্বরণে যাত্রা করে 3 সেকেন্ডে 84ft যায়। এর পর ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হলে, পরবর্তী 3 সেকেন্ডে বস্তুটি 75 ft যায়। এর আদিবেগ ও ত্বরণ কত? **Ans:** 31 ft/sec, -2 ft/sec^2
03. একজন লোক 100 গজ সামনে দন্ডায়মান একটি বাসকে দেখে ধরার জন্য যে মুহূর্তে সমবেগে দৌড় দিল, সে মুহূর্তে বাসটি সমত্বরণে চলা শুরু করল। লোকটি বাসটিকে এক মিনিটে কোন রকমে ধরে ফেলল। লোকটির বেগ ও বাসের ত্বরণ নির্ণয় কর। **Ans:** 10 ft/sec, $\frac{1}{6}$ ft/sec^2
04. একটি কণার নির্দিষ্ট সময়ের অর্ধেক সময়ে ধারণকৃত বেগ v হলে এবং নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের অর্ধেক দূরত্বে বেগ v' হলে, দেখাও যে $v'\geq v$।
05. একটি কণা P, A হতে AB রেখা বরাবর ও অপর একটি কণা B হতে BA বরাবর চলে। P-এর আদিবেগ u_1 ও ত্বরণ f_1 এবং Q-এর আদিবেগ u_2 ও ত্বরণ f_2। এরা একই সময়ে রওনা দিয়ে একই সময়ে AB এর মধ্যবিন্দু অতিক্রম করে। AB এর প্রান্ত বিন্দুতে উভয়ের বেগের মান সমান হলে, দেখাও যে, $(u_1-u_2)(f_1-f_2)=8(f_1u_2-f_2u_1)$।
06. দুটি কণা যথাক্রমে u ও v বেগে একই সাথে যাত্রা শুরু করে। প্রথমটি সমমন্দনে ও দ্বিতীয়টি সমবেগে চলে। দেখাও যে, প্রথম কণাটি স্থির হওয়া পর্যন্ত এদের সরণের অনুপাত u : 2v।

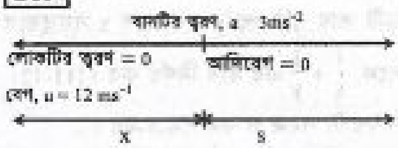
BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. স্থিরাবস্থা থেকে একটি বাসকে 3 m/sec^2 সমত্বরণে চলতে দেখে বাসটিকে ধরার উদ্দেশ্যে একজন লোক বাসের পেছনে কিছুদূর থেকে 12 m/ sec সমবেগে দৌড়াতে আরম্ভ করে। বাস থেকে লোকটি সর্বোচ্চ কত দূরে থাকলে বাসটিকে ধরতে পারবে? [17-18]

Sol^n



ধরি, লোকটি বাস হতে x দূরত্বে পিছনে ছিল এবং বাস হতে s দূরত্বে বাসটি ধরতে সক্ষম হবে।

$\therefore$ বাসটির জন্য, $s=\frac{1}{2}at^2=\frac{3}{2}t^2$ .... (i)

এবং লোকটির জন্য, $s+x=ut=12t$ .... (ii)

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে,

$$x=12t-\frac{3}{2}t^2=\frac{3}{2}(-t^2+8t)$$

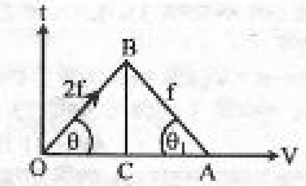
$$\Rightarrow x=\frac{3}{2}\{-(t-4)^2+16\}=-\frac{3}{2}(t-4)^2+24$$

$\therefore x_{max}=24m$ যখন, t = 4 sec.

সুতরাং বাসটি থেকে লোকটি সর্বোচ্চ 24 মিটার পিছনে থাকলে বাসটিকে একটা নির্দিষ্ট সময় পরে ধরতে পারবে। **Ans.**

02. একটি ট্রেন সরল রেলপথে 2km ব্যবধানে দুইটি স্টেশনে থামে। ট্রেনটির গতিপথের ১ম অংশটির ত্বরন ২য় অংশটির ত্বরনের দ্বিগুণ। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশন যেতে কত সময় লাগবে? ১ম অংশের ত্বরণ 1/6। [15-16]

Solve



ধরি ১ম অংশের ত্বরণ 2f। সুতরাং ২য় অংশের ত্বরণ f।

$\Delta OBA = 2km$

OB রেখার ঢাল $= 2f = \frac{1}{6} kms^{-2} = \tan\theta$

AB রেখার ঢাল $= -f = -\frac{1}{12} kms^{-2} = -\tan\theta_1$

$\Rightarrow f = \frac{1}{12} kms^{-2} = \tan\theta_1$

OA = মোট সময়কাল = t sec.

BC = B বিন্দুতে বেগ (সর্বোচ্চ বেগ) $= v\ kms^{-1}$

আবার ধরি, $OC = t_1$ এবং $AC = t_2$

$\therefore \frac{1}{2} OA \times BC = \Delta OBA \Rightarrow \frac{1}{2} vt = 2$

$\Rightarrow vt = 4$ .... (i)

$\therefore v = BC = OC \tan\theta = \frac{1}{6} t_1$

$= AC \tan\theta_1 = \frac{t_2}{12}$

$\therefore t_2 = 2t_1$ .... (ii)

আবার $t_1 = 6v$ এবং $t_2 = 12v$

$\therefore t = t_1 + t_2 = 6v + 12v = 18v$

(i) নং -এ $t = 18v$ বসালে

$18v^2 = 4 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} kms^{-1}$ এবং t

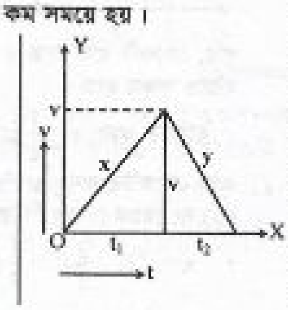
$= 18 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = 6\sqrt{2}$sec.

$\therefore$ মোট সময়কাল $= 6\sqrt{2}$ sec. **Ans.**

03. একটি রেলগাড়ী এক স্টেশন হতে ছেড়ে 4 মিনিট পর 2 km দূরে অবস্থিত অপর স্টেশনে থামে। গাড়িটি তার গতিপথের প্রথমাংশে x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয়াংশে y সমমন্দনে চললে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ এর মান নির্ণয় কর। [11-12]

Solve গ্রাফ থেকে সমাধান করাটা সহজ ও কম সময়ে হয়।

গ্রাফ থেকে পাই, $t_1 + t_2 = 4\ min = t$



$x = \frac{v}{t_1}$ ও $y = \frac{v}{t_2}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{t_1 + t_2}{v} = \frac{4}{v}$

এখন, $\frac{1}{2} \times v \times t = 2km$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times v \times 4 = 2 \Rightarrow v = 1km\ min^{-1}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{1}\ \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ **Ans.**

04. একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে তার বেগের $\frac{1}{10}$ অংশ হারায়... তক্তার প্রতিরোধ ক্ষমতা সুষম হলে, থামবার পূর্বে বুলেটটি কতগুলো... ভেদ করতে পারবে? [09-10]

Solve প্রথম ক্ষেত্রে, $V^2 = V_0^2 - 2aS_1$

$\Rightarrow (V_0 - \frac{V_0}{10})^2 = V_0^2 - 2aS_1$

$\Rightarrow \frac{81V_0^2}{100} = V_0^2 - 2aS_1 \therefore 2aS_1 = \frac{19V_0^2}{100}$ .... (i)

আবার, ২য় ক্ষেত্রে, $V_0^2 - 2aS_2 = 0$

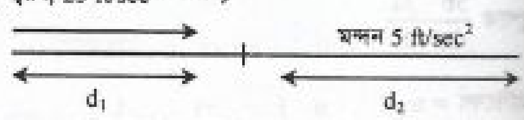
$\Rightarrow 2aS_2 = V_0^2$ ..... (ii)

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{19}{100}$ এখানে, $S_1 = 1$ টি তক্তা

$\therefore S_2 = \frac{100}{19} \times 1 = 5.26$ টি ≈ 5 টি (প্রায়)

04. একটি বস্তু প্রথমে 25 ft/sec² ত্বরণে এবং পরে 5 ft/sec² মন্দনে স্থির... থেকে 192 ft দূরত্ব অতিক্রম করলে গতিপথে তার সর্বোচ্চ গতিবেগ... ছিল নির্ণয় কর। [01-02]

Solve ত্বরণ, 25 ft/sec²



ত্বরনের ক্ষেত্রে, $v^2 = 0 + 2 \times 25d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v^2}{50}$

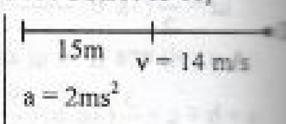
মন্দনের ক্ষেত্রে, $0 = v^2 - 2 \times 5d_2 \Rightarrow d_2 = \frac{v^2}{10}$

$\therefore d = 192 = d_1 + d_2 = \frac{v^2}{50} + \frac{v^2}{10} = v^2 \frac{3}{25}$

$\Rightarrow v^2 = 1600\ \therefore v = \sqrt{1600} = 40$ ft/sec

05. একটি বিড়াল তার সম্মুখে 15 মিটার দূরত্বে একটি ইঁদুর দেখতে... তাকে ধরার জন্য 2 মিটার/সেকেন্ডে² সমত্বরণে দৌড়াতে শুরু... ইঁদুরটি 14 মিটার/সেকেন্ড সমবেগে চলতে থাকলে কোথায় এবং... বিড়ালটি ইঁদুরটি ধরতে পারবে? [98-99: CUET: 05-06]

Solve ধরি, বিড়ালটি D বিন্দুতে ইঁদুরটি ধরতে পারল। এতে ইঁদুরটি S দূরত্ব এবং t সময় অতিবাহিত করল।



বিড়ালটির জন্য, $S + 15 = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2$ ......(i)

ইঁদুরের জন্য, $S = 14 \times t$ .... (ii)

(i) নং হতে, $14t + 15 = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2$

$\therefore t = 15, -1$ কিন্তু $t \neq -1\ \therefore t = 15$ sec একমাত্র গ্রহণযোগ্য মান

বিড়াল তার অবস্থান হতে $s + 15 = t^2 = 15^2 - 225$ মিটার দূরে ইঁদুরটি ধরতে পারবে।

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

একটি বস্তু কনার সরণ $x(t) = t(3 - 2t)/2$. যে সময়ে বস্তুর বেগ ও সরণের সংখ্যামান সমান, তা নির্ণয় কর। বস্তুটির সময়, বেগের সংখ্যামান সমান হওয়ার সময়ও নির্ণয় কর। [15-16]

Solve $x = \frac{3t - 2t^2}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}t - t^2$

$\Rightarrow v = \frac{3}{2} - 2t \therefore v = \frac{3-4t}{2}$

প্রশ্নমতে, $\frac{3t - 2t^2}{2} = \frac{3-4t}{2}$

$\Rightarrow 2t^2 - 7t + 3 = 0 \therefore t = 3, \frac{1}{2}$ **Ans.**

আবার, $\frac{3-4t}{2} = t \Rightarrow 3 - 4t = 2t \therefore t = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় গ্রহণযোগ্য মান $t = \frac{1}{2}$ sec **Ans.**

একটি বস্তুকে 60m উচ্চতার একটি বাড়ির ছাদের উপর হতে $40\ ms^{-1}$ বেগে ভূমির সংগে 0° কোণে ছোড়া হল। কত দূরে এবং কখন এটি ভূমিকে স্পর্শ করবে? [07-08]

Solve $h = ut \sin 0° + \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

$\Rightarrow 60 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

$\Rightarrow \frac{120}{9.8} = t^2 \therefore t = 3.5$ sec

$x = (u \cos 0°)t = 40 \times 3.5 = 140m$ **Ans.**

MCQ Part

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

একটি বুলেট কোন লক্ষ্যবস্তুতে 3 সে. মি. ভেদ করতে তার বেগের অর্ধেক অংশ হারায়। এটি আরও কতটা ভেদ করবে? [06-07, 09-10, 12-13, 13-14]

A. 1cm B. 1.5 cm C. 2cm D. 3 cm

Ans A Solve $\left(\frac{v}{2}\right)^2 = v^2 - 2as$

$\Rightarrow 2as = \frac{3v^2}{4} \Rightarrow a = \frac{3v^2}{8s} = \frac{3v^2}{8 \times 3} = \frac{v^2}{8}$

$0 = \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 2as' \Rightarrow s'$

$= \frac{v^2}{4 \times 2a} = \frac{v^2.8}{8.v^2} = 1$ cm

Shortcut : $s' = \frac{s}{3} = \frac{3}{3} = 1cm$

স্থির অবস্থান হতে চলমান কোন কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের ঘনফলের বর্গমূলের সমানুপাতিক এবং 4 একক সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব 64 একক হলে 16 একক সময়ে কণাটি অতিক্রম করবে- [12-13]

A. 512 unit B. 256 mm C. 256 km
D. 128 cm E. 128 km

Ans A Solve দেওয়া আছে, $s = \alpha t^{\frac{3}{2}}$

যখন $s = 64, t = 4$ তখন $64 = \alpha . 4^{\frac{3}{2}} \therefore \alpha = 8$

$\therefore s = 8 \times (16)^{\frac{3}{2}} = 8 \times 4^3 = 512$ unit

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি বিড়াল 20 মিটার দূরে একটি ইঁদুরকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে 3 মিটার/সেকেন্ড^2 ত্বরণে ইঁদুরটির পশ্চাতে দৌড়ালো। ইঁদুরটি 13 মিটার/সেকেন্ড সমবেগে দৌড়াতে থাকলে কতক্ষণ পরে এবং কত দূরে গিয়ে বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে? [16-17]

A. 15 সেকেন্ড ও 150 মিটার B. 20 সেকেন্ড ও 200 মিটার
C. 10 সেকেন্ড ও 150 মিটার D. 10 সেকেন্ড ও 200 মিটার
E. 20 সেকেন্ড ও 150 মিটার

Ans C Solve প্রশ্নমতে, $20 + 13t = \frac{1}{2} 3t^2$

$\Rightarrow 3t^2 - 26t - 40 = 0 \Rightarrow (t - 10)(3t + 4) = 0$

$\therefore t = 10$ sec ; $[\because t \neq -\frac{3}{4}]$

$\therefore s = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^2 = 150$ মিটার

02. দুইটি ট্রেন একই রেল পথে বিপরীত দিক থেকে প্রতি ঘন্টায় 40 m/s এবং 60 m/s গতিবেগে অগ্রসর হচ্ছে। 1300 m দূরত্বে থাকাকালে উভয় ইঞ্জিনে একই মানের মন্দন প্রয়োগ করা হলো। মন্দনের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর যাতে সংঘর্ষ এড়ানো যেতে পারে। [15-16]

A. $-3\ m/sec^2$ B. $5\ m/sec^2$ C. $2\ m/sec^2$
D. $15\ m/sec^2$ E. $11\ m/sec^2$

Ans C Solve 40 → d f 1300–d ← 60 (1300m)

$0^2 = 40^2 - 2fd$ ..... (i)

$0^2 = 60^2 - 2f(1300 - d)$

$\Rightarrow 0 = 60^2 - 2f \times 1300 + 2fd$ .... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2 \times 1300f = 60^2 + 40^2$

$\therefore f = \frac{60^2 + 40^2}{2 \times 1300} = \frac{3600 \times 1600}{2 \times 1300} = \frac{5200}{2 \times 1300} = 2\ m/sec^2$

03. স্থির অবস্থা থেকে কোন বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। বস্তুটি 3 সেকেন্ডে 18 মিটার অতিক্রম করলে চতুর্থতম সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে? [11-12]

A. 14 meter B. 18 meter C. 16 meter
D. 12 meter E. 22 meter

Ans A Solve আমরা জানি, $s = 0 \times t + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow 18 = 0 + \frac{1}{2}a \times 9 \Rightarrow a = 4\ ms^{-2}$

$\therefore S_{4th} = \frac{1}{2}a(2t-1) = \frac{1}{2} \times 4(2 \times 4 - 1) = 2 \times 7 = 14m$

04. একটি বাঘ 20 মিটার দূরে একটি হরিণকে দেখতে পেয়ে স্থির অবস্থান হতে $3\ m/sec^2$ ত্বরণে হরিণটির পশ্চাতে দৌড়াল। হরিণটি 13 m/sec সমবেগে দৌড়াতে থাকলে কতক্ষণ পরে বাঘটি হরিণকে ধরতে পারবে? [09-10; CUET : 09-10]

A. 2 sec B. 12 sec C. 10 sec
D. 20 sec E. $\frac{26}{3}$ sec

Ans C Solve $20 = \frac{1}{2}at^2 - vt = \frac{1}{2} \times 3t^2 - 13t$

$\Rightarrow 40 = 3t^2 - 26t \Rightarrow t = 10, -\frac{4}{3}$

$\therefore t = 10$sec [ধনাত্মক মান গ্রহণযোগ্য]

05. একটি কণা সরলরেখা বরাবর চলিয়া কোন এক সেকেন্ডে 10m পথ অতিক্রম করে এবং পরবর্তী 4 সেকেন্ডে উহা 60 m পথ অতিক্রম করে। কণাটির সমত্বরণ কোনটি? [07-08]

A. $f = 2\ m/sec^2$ B. $f = 3\ m/sec^2$ C. $f = 5\ m/sec^2$
D. $f = 4\ m/sec^2$ E. $f = 6\ m/sec^2$

Ans A Solve $S_t = 10m,\ S_{t+4} = 70m$

আদিবেগ u, সমত্বরণ f হলে, S_t

$= u \times 1 + \frac{1}{2} f \times 1^2$

$= u + \frac{1}{2} f$ ...(i)

$S_{t+4} = u \times 5 + \frac{1}{2} f5^2$

$= 5u + 12.5f$ ....(ii)

(ii) – 5 × (i)

$\Rightarrow 70 - 50 = \frac{1}{2} f \times 25 - \frac{5}{2} \times f$

$\Rightarrow f = \frac{20}{10} = 2\ ms^{-2}$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. দুইটি ট্রেন একই রেলপথে বিপরীত দিকে হতে 44 ft/sec ও 66 ft/sec গতিবেগে অগ্রসর হচ্ছে। ট্রেন দুইটি 1573 ft দূরত্বে থাকাকালে সংঘর্ষ এড়ানোর জন্য উভয় ইঞ্জিনে ব্রেক করা হলো। উভয় ইঞ্জিনের মন্দন সমান। মন্দনের সর্বনিম্ন মান কত? [13-14]

A. $5\ ft/sec^2$ B. $\frac{5}{2}\ ft/sec^2$ C. $3\ ft/sec^2$
D. $2\ ft/sec^2$ E. None

Ans D Solve ১ম ট্রেনের জন্য $0^2 = 44^2 - 2fx$ .... (i)

এবং ২য় ট্রেনের জন্য $0^2 = 66^2 - 2f(1573 - x)$ ...... (ii)

(i) ও (ii) $\Rightarrow 66^2$

$= 2f\left(1573 - \frac{44^2}{2f}\right)$

$\Rightarrow 66^2 = 2f \times 1573 - 44^2$

$\therefore f = 2$ ফুট/সে.^{2}

02. 50 m মিটার দূরত্ব অতিক্রম করতে একখানি গাড়ির বেগ 10 m/s হতে 20 m/s হয়। আরও 200 m যাবার পর তার বেগ কত হবে? [12-13]

A. 30 m/s B. 20 m/s C. 40 m/s
D. 50 m/s E. None

Ans C Solve $(20)^2 = 10^2 + 2a \times 50$

$\therefore a = 3ms^{-2}$

$\therefore v^2 = 20^2 + 2 \times 3 \times 200$

$\therefore v = 40\ ms^{-1}$

SELF TEST [Written]

01. একখানা রেলগাড়ি ঢাকা হতে ছেড়ে নারায়নগঞ্জ গিয়ে থামে। তা ... প্রথম চতুর্থাংশে সমত্বরণে, শেষ চতুর্থাংশে সমমন্দনে ও মধ্যবর্তী অং... চলে। দেখাও যে, গাড়িখানার গড়বেগ তার সর্বোচ্চ বেগের $\frac{2}{3}$ অং...

02. একটি কণা স্থির অবস্থা হতে সমত্বরণে চলে একটি দূরত্ব অতি... যদি কণাটি গতির প্রথম সেকেন্ডে 16 মিটার এবং শেষ সেক... দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে, তাহলে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব ... কত সময়ে কণাটি এই দূরত্ব অতিক্রম করবে?
Ans. 400 মিটার, 5 সেকেন্ড।

03. একখানা বাস স্থির অবস্থা হতে $1ms^{-2}$ ত্বরণে যাত্রা করল। প্রমা... বাস হতে 40.5 মিটারের অধিক পশ্চাতে অবস্থিত কোন যাত্রী ... সমবেগে দৌড়িয়ে তাকে ধরতে পারবে না।

04. সমত্বরণে চলন্ত কোন বিন্দু t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে সমান ... দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$

05. স্থিরাবস্থা হতে সরলরেখার চলন্ত একটি বস্তুকণা প্রথমে x সমত্বর... y সমমন্দনে চলে। কণাটি যদি t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে ... যে, $\frac{t^2}{2s} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

06. একখানা রেলগাড়ি A স্টেশন হতে ছেড়ে 10 মিনিট পরে B স্টেশ... A ও B এর মধ্যবর্তী কোন C বিন্দুতে গাড়িখানার সর্বোচ্চ বেগ ... হয়। গাড়িখানা A হতে C পর্যন্ত সমত্বরণে ও C হতে B পর্য... চললে A ও B এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

07. u আদিবেগে চলন্ত কণা প্রদত্ত দূরত্বের অর্ধেক f সুষম ত্বরণে এব... অর্ধেক দূরত্ব f ′ সমত্বরণে গমন করে। দেখাও যে, শেষ বেগের ... হবে যদি কণাটি সমস্ত দূরত্ব $\frac{1}{2}(f+f')$ সমত্বরণে গমন করে।

08. একটি বাস স্থিরাবস্থা হতে $6\ ms^{-2}$ সুষম ত্বরণে যাত্রা শুরু ... সাথেই তার 40 m পিছন হতে $23\ ms^{-1}$ সমবেগে একজন ... আরোহী তার দিকে চলতে শুরু করল। কখন তারা একসাথে মিলিত ...
Ans. 5 ও $\frac{1}{3}$

09. কোন সরলরেখাস্থ একটি বিন্দু হতে একটি কণা u সমবেগে এবং ... কণা f সমত্বরণে একই সময়ে একই দিকে যাত্রা করল। মিলিত ... কোন সময়ে তাদের দূরত্ব বৃহত্তম হবে এবং বৃহত্তম দূরত্ব কত হবে?
Ans. $t = \frac{u}{f}$; বৃহত্তম দূ...

10. কোন প্রতিযোগিতায় নির্দিষ্ট স্থান হতে দুটি মোটর গাড়ি ... সরলরেখায় যথাক্রমে u_1 বেগ, f_1 ত্বরণ ও u_2 বেগ, f_2 ত্বরণে ... যাত্রা করল। তারা একই সময়ে গন্তব্যস্থানে পৌঁছালে দেখাও যে, ... দূরত্ব $\frac{2(u_1 - u_2)(u_1 f_2 - u_2 f_1)}{(f_1 - f_2)^2}$

SELF TEST [MCQ]

...কা হতে চট্টগ্রামের উদ্দেশ্যে 15 মিনিট ব্যবধানে দুইটি ট্রেন ছাড়ে ...দের বেগ 48 km/h । ঢাকাগামী অপর একখানা ট্রেন যদি প্রথমোক্ত ...টি ট্রেনকে 5 মিনিটের ব্যবধানে অতিক্রম করে, তবে তার বেগ কত?

A. 96 km/h B. $48\sqrt{2}$ km/h
C. $96\sqrt{2}$ km/h D. None

...খানা গাড়ি স্থির অবস্থা হতে সমত্বরণে প্রথম কিলোমিটার দুই মিনিটে ...তিক্রম করে। এখন যদি বাকী দূরত্ব সমবেগে চলে তবে আর এক ...কিলোমিটার কতক্ষণে অতিক্রম করবে?

A. 0.5 minute B. 1 minute
C. 1.5 minute D. 2 minute

...কটি বুলেট কোন দেওয়ালের ভিতর 2cm ঢুকবার পর অর্ধেক বেগ ...রায়। বুলেটটি দেওয়ালের ভিতর আর কত দূর ঢুকবে?

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$ cm

...কটি তক্তা ভেদ করতে একটি বুলেট তার বেগের $\frac{1}{20}$ অংশ হারায়। ...প্রতিরোধ ক্ষমতা সুষম হলে, থামবার পূর্বে এটি কতগুলো তক্তা ভেদ করবে?

A. 5 খানা B. 10 খানা
C. 20 খানা D. 24 খানা

...কোন সরলরেখায় 1টি বিন্দু হতে 1টি কণা v = 6m/s সমবেগে অপর ...কণা f = 3m/s² সমত্বরণে একই দিকে যাত্রা করলে মিলিত হবার পূর্বে ...কোন সময় তাদের দূরত্ব বৃহত্তম হবে।

A. 2 s B. 3 s
C. 5 s D. কোনটিই নয়

...200 m ও 300 m দৈর্ঘ্য দুটি ট্রেন একটি স্টেশন থেকে একই দিকে দুইটি ...সমান্তরাল রেলপথে যথাক্রমে 40 কি.মি./ঘন্টা এবং 30 কি.মি./ঘন্টা বেগে ...যাত্রা করে। কত সময় পর এরা অতিক্রম করবে?

A. 5 min B. 10.8 min
C. 180 sec D. 108 min

...একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে $\frac{1}{2}$ অংশ বেগ হারায়। প্রতিরোধ সুষম ...বিবেচনা করে এটি থামার পূর্বে আর কতগুলো তক্তা ভেদ করবে?

A. 2 টি B. 9 টি C. 0 টি D. 11 টি

...সমমুখী দুটি বস্তুর বেগ u_1 ও u_2। এদের সর্বোচ্চ মন্দন f_1 ও f_2। এদের ...মধ্যবর্তী সংঘর্ষ এড়ানো সম্ভব হবে যদি $u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = ?$

A. $\frac{2f_1x}{f_2}$ B. $2f_1f_2\,x$ C. $\frac{2uf_1}{f_1}$ D. $\frac{u}{2f_1f_2}$

...কোন কণার বেগ v, যা সময়ের ঘনের সমানুপাতিক। যদি 4 sec পর ...কণার বেগ 8 ms⁻¹ হয় তবে v = ?

A. $\frac{1}{4}t^3$ B. $\frac{1}{8}t^3$ C. t^3 D. $t^3/2$

...A এবং B দুইটি বাস পরস্পর সমকোণে আনত দুইটি রাস্তা বরাবর যথাক্রমে 40kmh⁻¹ এবং 30kmh⁻¹ বেগে চলছে। B বাসের যাত্রীদের ধারণা অনুসারে A বাসের বেগ নির্ণয় কর।

A. 30kmh⁻¹ B. 40kmh⁻¹
C. 50kmh⁻¹ D. 60kmh⁻¹

...একটি ট্রেন প্রথমে 5m/s² সমত্বরণে চলে 1m/s বেগ অর্জন করে। তারপর 0.12 82 m/s² মন্দনে চলে থামলে তা মোট কত সময় গতিশীল ছিল?

A. 2s B. 8s
C. 4s D. 9s

12. কোন কণার বেগ v ms⁻¹, যা সময়ের ঘনের সমানুপাতিক। যদি 2s পরে কণাটির বেগ 4ms⁻¹ হয় তবে v = ?

A. t^3 B. $\frac{t^3}{3}$
C. $\frac{t^3}{2}$ D. $\frac{t^3}{4}$

13. একটি বিমান 50 kmh⁻¹ বেগে সরল রানওয়ে স্পর্শ করে এবং 300m দূরত্ব অতিক্রম করে থাকে। মন্দন সুষম হলে বিমানটি থামতে প্রয়োজনীয় সময় নির্ণয় কর।

A. 30s B. 40s
C. 43.2s D. 60s

14. 450m সরলপথে অতিক্রম করতে একটি ট্রেনের গতিবেগ হ্রাস পেয়ে প্রতি ঘন্টায় 40km হতে 10km দাঁড়ায়। মন্দন সুষম হলে ট্রেনটি থামার আগে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

A. 10m B. 15m
C. 20m D. 30m

15. কোন সরলরেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণা 0.04, 0.08 এবং 0.12 ঘন্টা শেষে যথাক্রমে 2.4, 4.8 এবং 7.2kmh⁻¹ বেগ প্রাপ্ত হলে এক ঘন্টায় কণাটি যে পথ অতিক্রম করবে তা নির্ণয় কর।

A. 20km B. 30km
C. 40km D. 50km

16. একটি কণা সুষম ত্বরণে চলছে। কণাটি একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে যথাক্রমে 720 সে.মি. ও 960 সে.মি. পথ অতিক্রম করে। তাহলে কণাটি 20 সেকেন্ডে কত পথ অতিক্রম করবে?

A. 13800cm B. 14000cm
C. 13600cm D. None

17. u আদিবেগ এবং f সমত্বরণে সরলরেখায় চলমান কোন বস্তু t সময় অন্তে s দূরত্ব অতিক্রম করে। এর অন্তবেগ v হলে, নিচের কোনটি সত্য?

A. $\frac{v}{u}=\frac{s}{t}$ B. $\frac{v-u}{v+u}=\frac{2s}{ft^2}$
C. $\frac{v+u}{v-u}=\frac{2s}{ft^2}$ D. None

18. একটি ট্রেন 4km দূরবর্তী সরলপথ 8min এ অতিক্রম করে। যাত্রাপথের প্রথম অংশে x সমত্বরণে এবং শেষ অংশে y সমমন্দনে যায়। নিচের কোনটি এক্ষেত্রে সত্য?

A. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$
C. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$ D. None

OMR

01.ⒶⒷⒸⒹ	06.ⒶⒷⒸⒹ	11.ⒶⒷⒸⒹ	16.ⒶⒷⒸⒹ
02.ⒶⒷⒸⒹ	07.ⒶⒷⒸⒹ	12.ⒶⒷⒸⒹ	17.ⒶⒷⒸⒹ
03.ⒶⒷⒸⒹ	08.ⒶⒷⒸⒹ	13.ⒶⒷⒸⒹ	18.ⒶⒷⒸⒹ
04.ⒶⒷⒸⒹ	09.ⒶⒷⒸⒹ	14.ⒶⒷⒸⒹ	
05.ⒶⒷⒸⒹ	10.ⒶⒷⒸⒹ	15.ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

18.C	17.C	16.A	15.B	14.D	13.C	12.C	11.B	10.C
09.B	08.B	07.C	06.C	05.A	04.B	03.B	02.B	01.A

অভিকর্ষ ত্বরণ

এক নজরে অভিকর্ষ ত্বরণ-এর গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

➲ উচ্চস্থান হতে অভিকর্ষের অধীনে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে-

(i) $v = u + gt$

(ii) $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

(iii) $v^2 = u^2 + 2gh$

(iv) t তম সেকেন্ডে সরণ $h_t = u + \frac{1}{2}g(2t-1) = u + gt - \frac{1}{2}g = v - \frac{1}{2}g$

➲ খাড়াভাবে উর্ধ্বে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতির ক্ষেত্রে-

(i) $v = u - gt$

(ii) $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$

(iii) $v^2 = u^2 - 2gh$

(iv) t তম সেকেন্ডে সরণ $h_t = u - \frac{1}{2}g(2t-1) = v + \frac{1}{2}g$

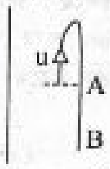
➲ u আদিবেগে খাড়াভাবে প্রক্ষিপ্ত বস্তু h উচ্চতায় v বেগে অর্জন করলে, এর সমমন্দন g বলে গতির সমীকরণ হতে $v^2 = u^2 - 2gh$;

$v = \pm\sqrt{u^2 - 2gh}$

➲ h উচ্চতা হতে উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে-

$\therefore h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore v = -u + gt$



➲ নিক্ষেপন বিন্দু হতে সর্বাধিক উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g}$

➲ বিচরণকাল $T = \frac{2u}{g}$

➲ খাড়াভাবে যে কোন বেগে প্রক্ষিপ্ত কণা সর্বাধিক উচ্চতা অতিক্রান্তের শেষ সময়ে $\frac{1}{2}g$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

সমাধানসহ কিছু গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যাবলি

Ex-01 মাটি হতে 39.2 মিটার উঁচু কোন স্থান হতে এক টুকরো পাথর ছেড়ে দেওয়া হল। একই সঙ্গে ভূমি হতে অপর এক টুকরো পাথর একই খাড়া রেখার উপরের দিকে 19.6 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করা হল। প্রমাণ কর যে, তারা মধ্যপথে মিলিত হবে এবং মিলিত হওয়ার সময় নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, t সেকেন্ড পরে ভূমি হতে h উচ্চতায় মিলিত হবে।

তাহলে, $39.2 - h = \frac{1}{2}gt^2$ ------ (i)

এবং $h = 19.6t - \frac{1}{2}gt^2$ --------- (ii)

$(i) + (ii) \Rightarrow 19.6t = 39.2$

$\therefore t = 2s$

$\therefore h = 19.6 \times 2 - \frac{1}{2}.9.8.2^2 = 19.6$ m

তারা 2s পরে মধ্যপথে মিলিত হবে। **Ans.**

Ex-02 একটি স্তম্ভের শীর্ষবিন্দু হতে 29.4 ms^{-1} বেগে একটি বস্তুকে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। 4s পরে একই স্থান হতে অপর বস্তুকে ছেড়ে দেওয়া হল। তারা একই সময়ে ভূমিতে পতিত হলে স্তম্ভের উচ্চতা এবং দ্বিতীয় বস্তুর পতনকাল নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, স্তম্ভের উচ্চতা h মি. এবং দ্বিতীয় বস্তুর পতনকাল t সেকেন্ড

∴ প্রথম বস্তু (t+4) সেকেন্ডে h দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore h = -29.4(t+4) + \frac{1}{2}g(t+4)^2$ ------ (i) এবং $h = \frac{1}{2}gt^2$ —

$(i) - (ii) \Rightarrow \frac{1}{2}g(8t+16) - 29.4(t+4) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}g \times 8(t+2) - 29.4(t+4) = 0 \Rightarrow 4t + 8 - 3t - 12 = 0$

$\therefore t = 4s \quad \therefore h = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 16 = 78.4$ m

∴ নির্ণেয় উচ্চতা 78.4 মি. এবং দ্বিতীয় বস্তুর পতনকাল 4 সে.

Ex-03 49 ms^{-1} বেগে একটি বলকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। 2s পরে একই বিন্দু হতে একই বেগে অপর একটি বল নিক্ষেপ করা হল। কোথায় এবং কখন তারা মিলিত হবে?

Sol^n: মনে করি, দ্বিতীয় বলটি নিক্ষিপ্ত হওয়ার t সে. পরে ভূমি হতে h উচ্চতায় তারা মিলিত হয়।

তাহলে, $h = 49(t+2) - \frac{1}{2}g(t+2)^2$ ------- (i)

$h = 49t - \frac{1}{2}gt^2$ ------------ (ii)

$(i) - (ii) \Rightarrow 98 - \frac{1}{2}g(4t+4) = 0 \Rightarrow 10 - 2t - 2 = 0 \therefore t = 4$ সেকেন্ড

$\therefore h = 49 \times 4 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 16 = 196 - 78.4 = 117.6$ মি.

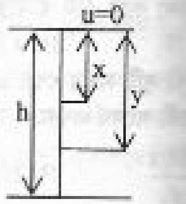
∴ দ্বিতীয় বলটি নিক্ষিপ্ত হওয়ার 4 সে. পরে ভূমি হতে 117.6 মি. উচ্চতায় মিলিত হবে।

Ex-04 একটি টাওয়ারের চূড়া হতে একখন্ড পাথর x মিটার নিচে নামার পর অপর এক খন্ড পাথর চূড়ার y মিটার নিচ হতে ফেলে দেওয়া হল। উভয়েই স্থিরাবস্থা হতে পড়ে এবং একই সঙ্গে ভূমিতে পতিত হয়। দেখাও যে, টাওয়ারের উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ মিটার।

Sol^n: মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা h। প্রথম পাথর খন্ডটি x মি. দূরত্ব অতিক্রম করার মুহূর্তে v বেগ প্রাপ্ত হয়।

$\therefore v^2 = 0 + 2gx$

$\therefore v = \sqrt{2gx}$



এই বেগ নিয়ে পাথর খন্ডটি (h–x) দূরত্ব অতিক্রম করে।

$h - x = \sqrt{2gx}\,t + \frac{1}{2}gt^2$ ----------- (i)

দ্বিতীয় পাথর খন্ডের ক্ষেত্রে, $h - y = 0 + \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore h - y = \frac{1}{2}gt^2$ ----------- (ii) $(i) - (ii) \Rightarrow y - x = \sqrt{2gx}\,t$

$= \frac{y-x}{\sqrt{2gx}}$ (ii) নং হতে, $h - y = \frac{1}{2}g.\frac{(y-x)^2}{2gx}$

$\Rightarrow h = y + \frac{y^2 - 2xy + x^2}{4x} \Rightarrow h = \frac{y^2 + 2xy + x^2}{4x}$

$\therefore h = \frac{(x+y)^2}{4x}$ ∴ টাওয়ারের উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ **(Showed)**

4.5 সেকেন্ড যাবত সমবেগে খাড়া উপরের দিকে উঠবার পর একটি বেলুন হতে একটি ভারী বস্তু পড়ে গেল। যদি বস্তুটি 7 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে তবে বেলুনের গতিবেগ এবং কত উঁচু হতে বস্তুটি পড়েছিল তা নির্ণয় কর।

মনে করি, বেলুনের ঊর্ধ্বমুখী সমবেগ $u\ ms^{-1}$। তাহলে বস্তুটির পতনকালে তার উচ্চতা ছিল 4.5u এবং তার বেগ ছিল $u\ ms^{-1}$ ঊর্ধ্বমুখী। বস্তুটি 7 সেকেন্ডে ভূমিতে পড়ে।

সুতরাং, $4.5\,u = -7u + \frac{1}{2} \times g \times 7^2 \Rightarrow 11.5u = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 49$

$\therefore u = 20.87$ $\therefore$ পতনকালে পাথরের উচ্চতা $= 4.5\,u$

$= 4.5 \times 20.87 = 93.95$ m **Ans.**

-06 সমবেগে খাড়া ঊর্ধ্বগামী একটি বিমান হতে একটি বোমা ছেড়ে দেওয়ার 5 সেকেন্ড পরে তা মাটিতে পড়ে। বোমাটি যখন মাটিতে পড়ে তখন উড়োজাহাজের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে করি, ভূমি হতে $u\ ms^{-1}$ সমবেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত বোমারু বিমানটি h মি. উচ্চতায় অবস্থান কালে উহা হতে একটি বোমা ফেলে দেয়া হলো। গতি জড়তার কারণে বোমাটির আদিবেগ হবে $u\ ms^{-1}$ (ঊর্ধ্বমুখী)। বোমাটি 5 সেকেন্ড সময়ে ভূমিতে পতিত হয়।

$\therefore h = -5u + \frac{1}{2} g.5^2 = -5u + \frac{1}{2}.9.8.25$

$\therefore h = -5u + 122.5$ --------- (i)

আবার 5 সেকেন্ড সময়ে বিমানটির অতিক্রান্ত দূরত্ব h_1 মি.।

$\therefore h_1 = 5u$ ------- (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow h + h_1 = 122.5$ m

বোমাটি যে মুহূর্তে ভূমিতে আঘাত করে, তখন বোমারু বিমানটি ভূমি হতে 122.5 মি. উচ্চতায় অবস্থান করে। **Ans.**

-07 একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি পাথরের টুকরা ছেড়ে দেওয়ার পর তা 19.6 ms^{-1} বেগে কূপের তলদেশে পতিত হয়। টুকরাটি ছেড়ে দেওয়ার $2\frac{2}{35}$ সেকেন্ড পরে পাথরটির পতনের শব্দ শোনা গেল, শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি, পাথরের পতনকাল t সে. এবং কূপের গভীরতা h মি.।

তাহলে, $(19.6)^2 = 2 \times 9.8 \times h$ $\therefore h = 19.6$ মিটার

আবার, $19.6 = 9.8 \times t$ $\therefore t = 2$ সে.

সুতরাং কূপের তলদেশ হতে শব্দের উপরে আসতে সময় লাগে

$= 2\frac{2}{35} - 2 = \frac{2}{35}$ সে.

শব্দের বেগ v হলে, $v \times \frac{2}{35} = 19.6$ $\therefore v = 343\ ms^{-1}$ **Ans.**

-08 একটি কণাকে u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এর n সে. পরে অপর একটি কণাকে একই স্থান হতে v বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। যদি তারা প্রথম কণার বৃহত্তম উচ্চতায় মিলিত হয় তবে দেখাও যে, $v - u = \frac{g^2n^2}{2(u - ng)}$

প্রথম কণার বৃহত্তম উচ্চতা $\frac{u^2}{2g}$। সেখানে পৌছাতে কণার $\frac{u}{g}$ সে. সময় লাগে। তাহলে দ্বিতীয় কণার $\frac{u^2}{2g}$ উচ্চতায় পৌছাতে $\left(\frac{u}{g} - n\right)$ সেকেন্ড সময় লাগে।

তাহলে, $\frac{u^2}{2g} = v\left(\frac{u}{g} - n\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{u}{g} - n\right)^2$

$\Rightarrow u^2 = 2uv - 2vng - u^2 + 2ung - g^2n^2$

$\Rightarrow 2(u-v)(u-ng) = -g^2n^2$

$\therefore v - u = \frac{g^2n^2}{2(u - ng)}$ **(Showed)**

Ex-09 একটি শূন্য কূপের মধ্যে একটি ঢিল ফেলার t সে. পরে কূপের তলদেশে ঢিল পড়ার শব্দ শোনা গেল। যদি শব্দের বেগ এবং কূপের গভীরতা h হয় তবে প্রমান কর যে,

(i) $(2h - gt)v^2 + 2hgtv = h^2g$ (ii) কূপের গভীরতা $= \frac{gt^2}{2\left(1 + \frac{gt}{v}\right)}$

h, এর তুলনায় v এত বৃহৎ যে, $\left(\frac{h}{v}\right)^2$ কে অগ্রাহ্য করা যায়।

Sol^n: (i) v সমবেগে h দূরত্ব অতিক্রম করে কূপের তলদেশ হতে শব্দ উপরে আসার সময় $= \frac{h}{v}$

ঢিলটির h দূরত্ব পতনে T সময় অতিক্রান্ত হলে $h = \frac{1}{2}gT^2$ $\therefore T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\therefore$ ঢিলটির পতনকাল $= \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\therefore t = \frac{h}{v} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = t - \frac{h}{v}$

$\Rightarrow \frac{2h}{g} = t^2 - \frac{2ht}{v} + \frac{h^2}{v^2} \Rightarrow 2hv^2 = v^2gt^2 - 2hgtv + h^2g$

$\therefore (2h - gt^2)v^2 + 2hgtv = h^2g$

(ii) এখন, $\frac{2h}{g} = t^2 - \frac{2ht}{v} + \frac{h^2}{v^2} \Rightarrow \frac{2h}{g} = t^2 - \frac{2ht}{v}$ $\left[\frac{h^2}{v^2}\right.$ অগ্রাহ্য করে$\left.\right]$

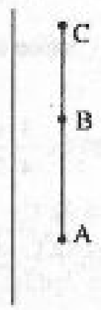
$\Rightarrow 2h\left(1 + \frac{gt}{v}\right) = gt^2$ $\therefore h = \frac{gt^2}{2\left(1 + \frac{gt}{v}\right)}$ **(Proved)**

Ex-10 কোন নির্দিষ্ট উচ্চতা হতে একখণ্ড পাথর ফেলে দেওয়া হল এবং তা পতনের শেষ t সেকেন্ডে h দূরত্ব অতিক্রম করল। দেখাও যে, পতনের মোট সময়কাল $\left(\frac{t}{2} + \frac{h}{gt}\right)$ সেকেন্ড।

Sol^n: মনে করি, পাথর খণ্ডটি C বিন্দু হতে ফেলে দেয়া হল এবং t_1 সেকেন্ডে পরে উহা B বিন্দুতে পৌছায়। B বিন্দুতে পাথর খণ্ডটি v বেগ প্রাপ্ত হলে, $v = gt_1$

আবার, ধরি, পাথরটি B বিন্দু হতে v গতিবেগে t সেকেন্ড সময়ে h দূরত্ব অতিক্রম করে ভূমির উপর A বিন্দুতে পড়ে অর্থাৎ AB = h এবং পতনের মোট সময় T হলে, $T = t + t_1$ বা $t_1 = T - t$

এখন, $h = vt + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{h}{t} = v + \frac{1}{2}gt$



$\Rightarrow \frac{h}{t} = gt_1 + \frac{1}{2}gt$

$\Rightarrow \frac{h}{t} = g(T - t) + \frac{1}{2}gt$

$\Rightarrow \frac{h}{t} = gT - gt + \frac{1}{2}gt$

$\Rightarrow \frac{h}{t} = gT - \frac{1}{2}gt$

$\Rightarrow gT = \frac{h}{t} + \frac{1}{2}gt$ $\therefore T = \frac{h}{gt} + \frac{t}{2}$

$\therefore$ পতনের মোট সময়কাল $\left(\frac{h}{gt} + \frac{t}{2}\right)$ **(Showed)**

Ex-11 খাড়া উপরের দিকে নির্দিষ্ট বেগে নিক্ষিপ্ত একটি কণা t সেকেন্ড সময়ে h উচ্চতায় উঠে এবং আরও t_1 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পৌছায় তবে প্রমান কর যে,

(i) কণার আদি বেগ $= \frac{1}{2}g(t+t_1)$

(ii) $h = \frac{1}{2}gtt_1$

(iii) বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{1}{8}g(t+t_1)^2$

Sol^n: (i) মনে করি, আদি প্রক্ষেপ বেগ = u । কণাটি t সময়ে h উচ্চতায় অবস্থান করে এবং আর t_1 সময় পরে আবার ভূমিতে ফিরে আসে।

তাহলে ভ্রমণকাল $t+t_1 = \frac{2u}{g} \therefore u = \frac{1}{2}g(t+t_1)$

(ii) আবার যেহেতু কণাটি t সময়ে h উচ্চতায় অবস্থান করে,

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h$

$= \frac{1}{2}g(t+t_1)t - \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore h = \frac{1}{2}gtt_1$

(iii) কণাটির বৃহত্তম উচ্চতা H হলে $H = \frac{u^2}{2g}$

$\Rightarrow H = \frac{1}{2g}\left[\frac{1}{2}g(t+t_1)\right]^2$

$\Rightarrow H = \frac{1}{2g} \times \frac{g^2}{4}.(t+t_1)^2$

$= \frac{1}{8}g(t+t_1)^2$

$\therefore$ বৃহত্তম উচ্চতা $= \frac{1}{8}g(t+t_1)$ **(Proved)**

Ex-12 একটি ভারী বস্তুকে একটি নির্দিষ্ট বেগে ভূমি হতে খাড়া উপর দিকে নিক্ষেপ করা হল। দেখাও যে, সর্বাধিক উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ উচ্চতায় যে দুই সময়ে বস্তুটি অবস্থান করবে তার অনুপাত 1 : 3 ।

Sol^n: ধরি, বস্তুটিকে u বেগে খাড়া উপর দিকে নিক্ষেপ করা হল।

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g}$ । ধরি, t সময় পর $\left(\frac{3}{4}.\frac{u^2}{2g}\right)$ উচ্চতায় অবস্থান করবে।

সুতরাং $\frac{3}{4}.\frac{u^2}{2g} = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 4g^2t^2 - 8ugt + 3u^2 = 0$

$\Rightarrow 4g^2t^2 - 6ugt - 2ugt + 3u^2 = 0$

$\Rightarrow 2gt(2gt-3u) - u(2gt-3u) = 0$

$\therefore (2gt-3u)(2gt-u) = 0$

$\therefore 2gt - 3u = 0$ এবং $2gt - u = 0$

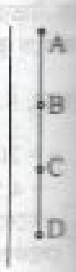
$\therefore t = \frac{3u}{2g}$; $t = \frac{u}{2g}$

$\therefore$ সময় দুটির অনুপাত $\frac{3u/2g}{u/2g} = 3:1$ **(Showed)**

Ex-13 একটি খাড়া রেখার A,B,C,D চারটি সমদূরবর্তী বিন্দু। A বিন্দু [illegible] অভিকর্ষের অধীনে পতনশীল বস্তু t_1, t_2, t_3 সময়ে যথাক্রমে AB, BC ও C[illegible] অংশ অতিক্রম করে। দেখাও যে, $t_1 : t_2 : t_3 = 1:(\sqrt{2}-1):(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Sol^n: দেওয়া আছে, AB = BC = CD

ধরি, প্রতিটি অংশ = h



যেহেতু স্থির হতে বস্তুটি নিচে পড়ে, $\frac{1}{2}gt_1^2 = h$

$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ------ (i)

$\therefore \frac{1}{2}g(t_1+t_2)^2 = 2h \therefore t_1 + t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ --- (ii)

এবং $\frac{1}{2}g(t_1+t_2+t_3)^2 = 3h \quad \therefore t_1+t_2+t_3 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ .... (iii)

(ii) − (i) $\Rightarrow t_2 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{2h}{g}}$

(iii) − (ii) $\Rightarrow t_3 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\therefore t_1 : t_2 : t_3 = 1 : (\sqrt{2}-1) : (\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **(Show[illegible]**

Ex-14 দুইটি স্থানের অভিকর্ষণজনিত ত্বরণ g_1 ও g_2 মি/সে.^{2} । এই দুই [illegible] একই উচ্চতা হতে দুটি বস্তুকে বেগ ছাড়া ছেড়ে দিলে, প্রথম স্থানের [illegible] সেকেন্ড আগে ও v মি/সে. বেগ বেশি নিয়ে ভূমিকে আঘাত করে। [illegible] যে, $\frac{v}{t} = \sqrt{g_1g_2}$

Sol^n: ধরি, সাধারণ উচ্চতা h মিটার। h মিটার উচ্চতা হতে ভূমিতে পড়তে [illegible] বস্তুর t_1 সেকেন্ড লাগে এবং পড়ার মুহূর্তে v_1 m/s ।

$\therefore$ দ্বিতীয় বস্তুর সময় লাগে $(t_1 - t)$ সে. ও বেগ হয় $(v_1 - v)$ মিটার/সে.

$\therefore$ প্রথম বস্তুর ক্ষেত্রে $h = \frac{1}{2}g_1t_1^2 \therefore t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g_1}}$ ------ (i)

দ্বিতীয় বস্তুর ক্ষেত্রে, $h = \frac{1}{2}g_2(t_1+t)^2 \quad \therefore t_1 + t = \sqrt{\frac{2h}{g_2}}$ ------ (ii)

(ii) − (i) $\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g_2}} - \sqrt{\frac{2h}{g_1}} = \sqrt{\frac{2h}{g_1g_2}}(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2})$ ------ (iii)

প্রথম বস্তুর জন্য $v_1^2 = 2gh$; $v_1 = \sqrt{2g_1h}$ ----- (iv)

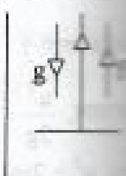
দ্বিতীয় বস্তুর জন্য $v_1 - v = \sqrt{2g_2h}$ ----- (v)

(iv) − (v) $\Rightarrow v = \sqrt{2h}(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2})$ ------ (vi)

(vi) ÷ (iii) $\Rightarrow \frac{v}{t} = \sqrt{g_1g_2}$ **(Show[illegible]**

Ex-15 f মি/সে.^{2} ত্বরণে খাড়া উপরে উঠন্ত একটি লিফট হতে এর সাপেক্ষে [illegible] মি/সে. বেগে খাড়াভাবে প্রক্ষিপ্ত একটি পাথরখণ্ড t সেকেন্ড পর লিফটে ফির[illegible] আসে। দেখাও যে, $f + g = \frac{2v}{t}$

Sol^n: লিফটের সাপেক্ষে প্রক্ষিপ্ত পাথর খণ্ডের নিম্নমুখী ত্বরণ = (f+g) মি/সে^{2} ।



$\therefore$ যখন পাথর খণ্ড লিফটে ফিরে আসবে, তখন লিফটের সাপেক্ষে এর সরণ 0

$\therefore 0 = vt - \frac{1}{2}(f+g)t^2 \Rightarrow v = \frac{1}{2}(f+g)t \quad [\because t \neq 0]$

$\therefore f+g = \frac{2v}{t}$ **(Showed)**

For practice:

একটি নির্দিষ্ট বেগে খাড়া ঊর্ধ্বদিকে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর খন্ড t_1 সময় পর একটি নির্দিষ্ট উচ্চতায় আসে। সেই বিন্দু হতে t_2 সময় পর ভূমিতে ফিরে আসে। দেখাও যে বস্তুটির (i) আদিবেগ $= \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)$

(ii) অর্ধ-সর্বাধিক উচ্চতায় বেগের সাংখ্যমান $\frac{g}{2\sqrt{2}}(t_1 + t_2)$

খাড়াভাবে পতনশীল বস্তু, পতনের শেষ সেকেন্ডে মোট ভ্রমণ পথের $\frac{1}{x^2}(2x - 1)$ অংশে অতিক্রম করে। $x > 1$ হলে, মোট ভ্রমণ পথের দূরত্ব কত?
Ans: $\frac{1}{2}gx^2$ একক

একটি খেজুর গাছের শীর্ষ হতে কাঠি বেয়ে সেকেন্ডে 5 ফোঁটা হারে খেজুর রস (স্থির বাতাসে) খাড়াভাবে পড়ছে। প্রথম ফোঁটা কাঠি হতে 25ft নিচে নামলে, দ্বিতীয় ফোঁটা কাঠি হতে কত নিচে থাকবে? দেখাও যে, প্রথম ও শেষ ফোঁটার দূরত্ব 21.76 ফুট।
Ans: $\frac{441}{25}$ ft

একটি পাথর খন্ড 32ft উঁচুতে স্থাপিত একটি গ্লাস সিট ভেদ করে ভূমিতে পৌঁছে। সিটটিকে আঘাত করার সময় এর বেগ 96'/সে এবং ভেদ করতে এর বেগের $\frac{1}{3}$ অংশ লুপ্ত হয়। পাথরটি অভিকর্ষের অধীনে যাত্রা শুরু করলে এর ভ্রমণকাল নির্ণয় কর।
Ans: $(\sqrt{6} + 1)$ sec

কোন একটি বিন্দু হতে একই মুহূর্তে একই বেগে একটি বস্তুকে খাড়া ঊর্ধ্বদিকে ও অন্য একটি বস্তুকে খাড়া নিম্নদিকে নিক্ষেপ করা হল। প্রথমটি 9 সেকেন্ড ও দ্বিতীয়টি 1 সেকেন্ড পরে ভূমিতে ফিরে আসে। দেখাও যে, এদের যেকোনটিকে একই উচ্চতা হতে শুধু ছেড়ে দিলে এটা 3 সে. শেষে ভূমিতে পড়বে।

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি কণাকে 200 meter/sec বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এর 10 sec পর অপর একটি কণাকে একই স্থান হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। যদি তারা প্রথম কণার বৃহত্তম উচ্চতায় মিলিত হয়, তবে দ্বিতীয় কণার বেগ নির্ণয় কর। [g = 9.8 metre/sec²]
[07-08; CUET : 13-14]

Solve ১ম কণাটির বৃহত্তম উচ্চতা, $h = \frac{200^2}{2 \times 9.8} = 2040.8\text{m}$ এবং বৃহত্তম উচ্চতায় গমনকাল, $t = \frac{200}{9.8} = 20.40\text{sec}$ প্রশ্নমতে, ১ম কণাটির নিক্ষেপের 20.40 sec পরে অর্থাৎ ২য় কণাটির নিক্ষেপের (20.4-10) sec বা 10.4 sec পরে 2040.8m উচ্চতায় কণাদ্বয় মিলিত হবে।

ধরি, ২য় কণার নিক্ষেপণ বেগ u ms^{-1}

এখন $u \times 10.4 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (10.4)^2 = 2040.8$

$$\Rightarrow u = \frac{20.40.8 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (10.4)^2}{10.4} \quad \therefore u = 247.2 \text{ m/s} \quad \textbf{Ans.}$$

02. u আদিবেগে ভূমি হতে একটি ভারী বস্তু খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং t সেকেন্ড পর একই বিন্দু হতে একই বেগে অপর একটি কণাকে একই দিকে নিক্ষেপ করা হয়। এরা h উচ্চতায় এসে মিলিত হয়। মধ্যাকর্ষণ মান g হলে, দেখাও যে, $h = \frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ [99-00]

Solve ধরি. ২য় বস্তুটি নিক্ষিপ্ত হবার t_1 সেকেন্ড পরে ইহা প্রথমটির সহিত h উচ্চতায় মিলিত হয়।

$\therefore$ ২য় বস্তুর জন্য, $h = u(t + t_1) - \frac{1}{2}g(t + t_1)^2$ ... (i)

প্রথম বস্তুর জন্য $h = ut_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ ... (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow$

$\therefore ut - \frac{1}{2}gt^2 - gt_1t = 0$

$\Rightarrow t_1 = \frac{2u - gt}{2g}$ ... (iii)

(ii) নং এ, $t_1 = \frac{2u - gt}{2g}$ বসালে, h

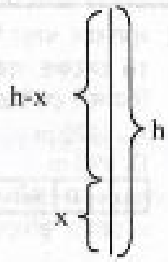
$= u\frac{2u - gt}{2g} - \frac{1}{2}g\frac{(2u - gt)^2}{4g^2}$

$= (\frac{2u - gt}{2g})(u - \frac{1}{2}g\frac{2u - gt}{2g})$

$= (\frac{2u - gt}{2g})(\frac{4u - 2u + gt}{4}) = \frac{4u^2 - g^2t^2}{8g}$ **(Showed)**

03. একটি বস্তু একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে নীচে ছেড়ে দেয়া হল এবং একই সময় টাওয়ারের পাদবিন্দু হতে অন্য একটি বস্তু সরাসরি উপরের দিকে এমন বেগে ছুড়ে মারা হল যেন ইহা টাওয়ারের শীর্ষে পৌঁছাতে পারে। বস্তুদ্বয় কোথায় মিলিত হবে নির্ণয় কর। [95-96]

Solve প্রথম বস্তুর ক্ষেত্রে, $h - x = \frac{1}{2}gt^2$ ... (i)



২য় বস্তুর ক্ষেত্রে, $u^2 = 2gh$ এবং $x = ut - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow x = ut - h + x \Rightarrow h = ut \Rightarrow h^2 = u^2t^2$

$\Rightarrow h^2 = 2gh \times t^2$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{h}{2g}}$

$\therefore x = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}g\frac{h}{2g}$

$= \frac{4h - h}{4} = \frac{3}{4}h$ **Ans.**

04. শূন্য ত্বরণে খাড়া ঊর্ধ্বগামী একটি ফাইটার প্লেন থেকে একটি বোমা ফেললে দেয়া হলে তা 10 সেকেন্ড পর মাটিতে পড়ে। বোমাটি মাটিতে পড়ার সময় প্লেনটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [13-14; CUET : 14-15,04-05]

Solve বিমানের ক্ষেত্রে $h_1 = vt$ .... (i) [ধরি, বিমানের বেগ v]

পাথরের ক্ষেত্রে $h_2 = -vt + \frac{1}{2}gt^2$ .... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow h_1 + h_2 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 490$ m

$\therefore$ পাথরটি ফেলে দেওয়ার সময় বেলুনের উচ্চতা ছিল $= h_1 + h_2$
$= 490$ m **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 19.6 m/sec বেগে একটি পাথর খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে যে সময় পর এটি ভূমিতে পড়বে তা হল– [13-14]

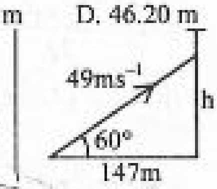
A. 2 sec B. $\frac{1}{2}$ sec C. 4 sec D. $\frac{1}{4}$ sec

Ans C Solve $T = \frac{2V_0}{g} = \frac{2\times19.6}{9.8} = 4s$

02. একটি খাড়া দেয়ালের পাদদেশ থেকে ভূমি বরাবর 147 m দূরত্বে কোন বিন্দু থেকে একটি বস্তু 49 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকের সাথে α কোণে ছোড়া হল। α = 60° হলে, বস্তুটি দেয়ালের যে বিন্দুতে আঘাত করবে তার উচ্চতা নির্ণয় কর। ($g = 9.81\ ms^{-2}$) [10-11]

A. 26.01 m B. 78.03 m C. 254.61 m D. 46.20 m

Ans B Solve



সুতরাং, $147 = 49 \times \cos60° \times t \therefore t = 6s$

এখন, $y = 4 = 49 \times \sin60° \times 6 - \frac{1}{2} 9.8 \times 6^2$

$= 78.03$ m

03. একটি স্তম্ভের শীর্ষ হতে 19.5 m/sec বেগে খাড়া উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত কোন কণা 5 sec পরে স্তম্ভের পাদদেশে পতিত হল। স্তম্ভটির উচ্চতা কত? [08-09]

A. 20 meter B. 15 meter C. 25 meter D. 30 meter

Ans C Solve স্তম্ভটির উচ্চতা h হলে, $h = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$= -19.5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 \quad \therefore h = 25$ m

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বিমান হতে একটি বোমা ছেড়ে দেওয়ার 10 সেকেন্ড পর মাটিতে পড়ে। মাটিতে বোমাটি আঘাত করার মুহূর্তে বিমানটি যে উচ্চতায় পৌঁছায় তা হলো- [17-18]

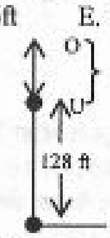
A. 1470 m B. 980 m C. 1960 m
D. 490 m E. 245 m

Ans D Solve বোমাটি আঘাত করার মুহূর্তে বিমানের উচ্চতা
= বোমার ভূমিতে আঘাত করার মুহূর্তে বোমা হতে বিমানের আপেক্ষিক দূরত্ব
$= \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 10^2 = 490m$

02. একটি বস্তু বিনা বাধায় শুধুমাত্র মধ্যাকর্ষণের প্রভাবে খাড়া নিচের দিকে নামা অবস্থায় 128 ফুট দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দু 2 সেকেন্ডে অতিক্রম করে। উপরের বিন্দু হতে কত উচ্চতায় বস্তুটি নীচের দিকে নামতে শুরু করেছিল? [11-12]

A. 13ft B. 14ft C. 15ft D. 16ft E. 17ft

Ans D Solve $s = ut + \frac{1}{2}gt^2$



$\Rightarrow 128 = u \times 2 + \frac{1}{2} \times 32 \times 4$

$\therefore u = 32$ ft/s ∴ উপরের বিন্দুতে বেগ = 32 ft/s

এখন, $u^2 = 2gh \Rightarrow 32^2 = 2 \times 32 \times h \quad \therefore h = 16ft$

03. একটি বস্তুকে সোজা উপরের দিকে 19.6 m/sec বেগে ছুড়ে দিলে উহা সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় উঠবে? [06-07]

A. 4.9m B. 9.8 m C. 19.6 m
D. 29.4 m E. 6.6 m

Ans C Solve $h_{max} = \frac{(19.6)^2}{2\times9.8} = 19.6$ m

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. কুয়ার ভেতর একটি পাথর ছেড়ে দেওয়ার $3\frac{1}{2}$ sec পর পাথরটি পড়ার শব্দ পাওয়া গেল। যদি শব্দের বেগ 327m/s হয়, তবে কুয়ার গভীরতা হবে- [13-14]

A. 45.5 m B. 54.5 m
C. 50.0 m D. None

Ans B Solve ধরি t সেকেন্ডে কুয়ায় পড়ে।

∴ গভীরতা h হলে, $h = \frac{1}{2} \times 9.8\ t^2 = 4.9t^2 \cdot t = \sqrt{\frac{h}{4.9}}$

আবার, $3\frac{1}{2} - t = \frac{h}{327} \Rightarrow h = 327\left(\frac{7}{2} - t\right)$

$\therefore t = \sqrt{\frac{327}{4.9}\left(\frac{7}{2} - t\right)} \Rightarrow 4.9\ t^2 = 1144.5 - 327t$

$\therefore t = 3.33$ sec $\therefore h = 4.9 \times (3.33)^2 \approx 54.5m$

02. একটি শূন্য কূপে একটি পাথর খন্ড ফেললে তা 3 sec-এ কূপের তলদেশে পৌঁছালে কূপের গভীরতা হবে– [10-11]

A. 14.72 m B. 88.29 m
C. 44.15 m D. None

Ans C Solve $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 9 = 44.13$ m

03. একটি শূন্য কূপে একটি পাথরের টুকরা ফেলা হল এবং 4 sec পরে টুকরাটির কূপের তলদেশ পতনের শব্দ পাওয়া গেল। g = 9.80 m/s² ও শব্দের বেগ 330 m / sec হলে কূপের গভীরতা– [09-10]

A. 80.30 m B. 90.40 m
C. 70.30 m D. None of them

Ans C Solve $h = \frac{1}{2}gt_1^2$

$\Rightarrow t_1^2 = \frac{2h}{g}$

এখন, $h = v(t - t_1) \Rightarrow \left(\frac{h}{v} - t\right) = -t_1$

$\Rightarrow \left(\frac{h}{v} - t\right)^2 = t_1^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow \left(\frac{h}{v}\right)^2 - 2\frac{h}{v}t + t^2 = \frac{2h}{g}$

$\Rightarrow \frac{h^2}{(330)^2} - \frac{2}{330} \times 4h - \frac{2}{9.8}h + 4^2 = 0 \therefore h \approx 70.30$ m

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি কণাকে h উচ্চতা হতে মুক্তভাবে পড়তে দেয়া হল এবং এটি পতনকালে শেষ সেকেন্ডে $\frac{9h}{25}$ দূরত্ব অতিক্রম করে (g = 9.8 m/sec²) তাহলে উচ্চতা h হবে- [11-12]

A. 100m B. 122.5m C. 145m
D. 167.5m E. 120.5m

Ans B Solve $\frac{9h}{25} = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2t - 1) = 9.8t - 4.9$

$\Rightarrow h = 4.9t^2 = \frac{25}{9}(9.8t - 4.9)$

$\Rightarrow t^2 = \frac{25}{9}(2t - 1)$

$\Rightarrow 9t^2 - 50t + 25 = 0 \therefore t = 5, \frac{5}{9}\ t \neq \frac{5}{9}$ কিন্তু $t \neq \frac{5}{9}$

$\therefore h = 4.9 \times 5^2 = 122.5$ m

SELF TEST [Written]

মিটার উঁচু একটি স্তম্ভের শীর্ষ হতে একটি কণাকে ছেড়ে দেওয়া হল; একই সময়ে ভূমি হতে অপর একটি কণাকে খাড়া উপর দিকে নিক্ষেপ করা হলে, $\frac{h}{n}$ মিটার গভীরতায় এরা মিলিত হল। দেখাও যে, মিলিত বিন্দুতে তাদের বেগের অনুপাত 2:(n–2) এবং দ্বিতীয়টির আদিবেগ $\sqrt{\frac{1}{2}ngh}$ মি/সে.।

একটি দালানের ছাদ হতে একটি বস্তুকণা শূন্য বেগে পড়া শুরু করল। ভূমিতে পড়ার পূর্বের এক সেকেন্ডে দালানের উচ্চতার $\frac{5}{9}$ অংশ অতিক্রম করে। দালানের উচ্চতা নির্ণয় কর। **Ans.** 44.1 মি.

ভূমি হতে একটি বস্তু খাড়া উপরের দিকে এমনভাবে নিক্ষিপ্ত হল যেন এটা কোনক্রমে A তে পৌছায়। এই বস্তুর প্রক্ষেপণ মুহূর্তে A হতে অন্য একটি বস্তুকে নিচে ছেড়ে দেওয়া হল। দেখাও যে, মিলিত হওয়ার সময় এদের দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত 3:1.

ভূমি হতে $\sqrt{2gy}$ মি/সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত একটি রকেট তার বৃহত্তম উচ্চতায় উঠে বিস্ফোরিত হল। রকেটের প্রক্ষেপবিন্দু এবং তা হতে ভূমি বরাবর x মিটার দূরে ভূমিতে অবস্থিত অপর একটি বিন্দুতে বিস্ফোরিত শব্দ আসতে যে সময় লাগে তাদের অন্তর $\frac{1}{n}$ সেকেন্ড। দেখাও যে, শব্দের গতিবেগ $n\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)$ মি/সে.।

একটি শূন্য কূপে একটি পাথরের টুকরো ফেলা হল এবং $1\frac{49}{3320}$ সে. পরে পাথরটির পড়ার শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ সেকেন্ডে 332 মি. হলে কূপের গভীরতা কত? **Ans.** 4.9 মিটার।

স্থির অবস্থায় ভূমি হতে 0.7 ms^{-2} ত্বরণে উপরের দিকে উঠছে। 20 সে. পরে ঐ লিফট হতে একটি বল ছেড়ে দেওয়া হল। বলটি কতক্ষণ পর ভূমিতে পৌছাবে। **Ans.** $\frac{10}{7}\left(\sqrt{15}+1\right)$ সেকেন্ড।

সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বেলুন যখন ভূমি হতে 420 মিটার উপরে তখন বেলুন হতে একটি পাথরের টুকরা ছেড়ে দেওয়া হল। পাথরের টুকরাটি যদি 10 সেকেন্ড পরে মাটিতে পড়ে তবে ছেড়ে দেওয়ার ঠিক পরেই তা কত উচ্চতায় উঠবে নির্ণয় কর। **Ans.** 2.5 মিটার।

ভূমি হতে 78.4 মি. উচ্চতায় অবস্থিত কোন বিন্দু হতে একটি বল ছেড়ে দেওয়া হল। বলটি যখন 19.6 মিটার নেমেছে, তখন পূর্বোক্ত বিন্দু হতে খাড়া নিম্নমুখী দিকে অপর একটি বল নিক্ষেপ করা হল। বল দুইটি যদি একই সময়ে ভূমিতে পতিত হয়, তবে দ্বিতীয় বলের আদিবেগ কত? **Ans.** 29.4 মি/সে.।

SELF TEST [MCQ]

01. খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি পাথর t_1 এবং t_2 সময়ে ভূমির h উচ্চতায় অবস্থান করলে নিচের কোনটি সত্য-

A. $2h = t_1t_2$ B. $2h=gt_1$
C. $2h=gt_2$ D. $2h=gt_1t_2$

02. খাড়াভাবে প্রক্ষিপ্ত একটি কণা 10 সেকেন্ডে 117 মি. উচ্চতায় পুনরায় ফিরে আসে। ভ্রমণকাল কত?

A. 14 s B. 13.98 s
C. 15.98 s D. None

03. 10 মি/সে. বেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি বেলুন হতে এক খন্ড পাথর ফেলে দেয়া হলো। পাথর খন্ডটি 10 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হলে কত উঁচু হতে পাথর ফেলা হয়েছিল?

A. 390 মিটার (প্রায়) B. 290 মিটার (প্রায়)
C. 370 মিটার (প্রায়) D. 270 মিটার (প্রায়)

04. একটি চূড়ার শীর্ষ হতে একটি বলকে খাড়া নীচের দিকে u বেগে নিক্ষেপ করা হল। ইহা ভূমিকে 3u বেগে স্পর্শ করে। বলটির ভূমি স্পর্শ করতে প্রয়োজনীয় সময়-

A. $\frac{u}{g}$ B. $\frac{2u}{g}$
C. $\frac{3u}{g}$ D. $\frac{4u}{g}$

05. টাওয়ারের উপর থেকে একটি বল ফেলে দেয়া হল। একই সময় আরেকটি বল $8ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। টাওয়ারের উচ্চতা 24 m হলে কতক্ষণ পর বলদ্বয় মিলিত হবে?

A. 1 s B. 2 s
C. 3 s D. 4 s

06. একটি টাওয়ারের চূড়া থেকে খাড়া নিচে পতিত হয়। ভূমিতে পৌছাতে 2 sec সময় নেয়। বস্তুটির ভূমি থেকে উচ্চতা কত ছিল?

A. 19.6 m B. 20.6 m
C. 18.6 m D. 20 m

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Corrcet Answer

06.A	05.C	04.B	03.A	02.B	01.D

প্রাস

এক নজরে প্রাস-এর গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলী

➲ ভূমি থেকে u আদিবেগে এবং α কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকটি t সময়ে h উচ্চতায় গমন করলে,

(i) অনুভূমিক দূরত্ব $d = u\cos\alpha\, t$

(ii) উল্লম্ব দূরত্ব / উচ্চতা $h = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$

(iii) t সময় পরে বেগ v হলে এবং v এর ক্রিয়ারেখা অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, অন্তবেগের অনুভূমিক উপাংশে $v\cos\theta = u\cos\alpha$, অন্তবেগের উল্লম্ব উপাংশে $v\sin\theta = u\sin\alpha - gt$

(iv) h উচ্চতায় গমনকালে $t = \frac{u\sin\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^2\alpha - 2gh}}{g}$

(v) h উচ্চতায় শেষবেগ $= \pm\sqrt{u^2 - 2gh}$

(vi) সর্বোচ্চ উচ্চাতায় গমনকাল $= \frac{u\sin\alpha}{g}$

(vii) সর্বোচ্চ উচ্চতা $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

(viii) বিচরণকাল $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$

(ix) অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = u\cos\alpha\left(\frac{2u\sin\alpha}{g}\right)$

$=$ অনুভূমিক বেগ $\times$ T

(x) $\alpha = 45^\circ$ হলে $R_{max} = \frac{u^2}{g}$

➲ একটি নির্দিষ্ট বেগে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের নির্দিষ্ট অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য দুটি বিচরণ পথ থাকতে পারে। এদের একটি বিচরন পথের জন্য নিক্ষেপন কোণ α হলে অপরটির জন্য নিক্ষেপন কোণ হবে $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

➲ t সময় পরে কোন প্রক্ষেপক P (x, y) বিন্দুতে পৌছালে ঃ

(i) $x = ut\cos\alpha$ (ii) $y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

(iii) $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$ (iv) $y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

(v) $y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

➲ প্রক্ষেপকের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে ঃ

(i) বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়।

(ii) বেগ সর্বনিম্ন হয় এবং তা বেগের অনুভূমিক উপাংশের সমান হয়।

(iii) বেগের দিক অনুভূমিক হয়।

(iv) অনুভূমিক দূরত্ব পাল্লার অর্ধেক হয়।

(v) সময় বিচরণকালের অর্ধেক হয়।

➲ $\tan\alpha = \frac{4H}{R}$ ➲ $T^2 = \frac{8H}{g}$ ➲ $T^2 = \frac{2R\tan\alpha}{g}$

➲ h উচ্চতায় ভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে

(i) $h = -u\sin\alpha t + \frac{1}{2}gt^2$ (ii) $x = u\cos\alpha t$

(iii) $v\sin\theta = -u\sin\alpha + gt$ (iv) $v\cos\theta = u\cos\alpha$

সমাধানসহ কিছু গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক সমস্যাবলী

Ex-01 একজন খেলোয়াড় 3.5 মি. উচ্চতা হতে ভূমির সাথে 30° কোণে ... মি/সে. বেগে একটি বল নিক্ষেপ করে এবং অপর একজন খেলোয়াড় ... উচ্চতায় বলটি ধরে ফেলেন। খেলোয়াড় দুজন পরস্পর কত দূরে ছিল

Solⁿ: বল কর্তৃক অতিক্রান্ত উল্লম্ব দূরত্ব = 3.5 − 2.1 = 1.4 মি. অতিক্রম ... ts হলে, $1.4 = -9.8\sin 30t + \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore 7t^2 - 7t - 2 = 0 \therefore t = \frac{7 \pm \sqrt{49+56}}{14} = \frac{7 \pm \sqrt{105}}{14}$

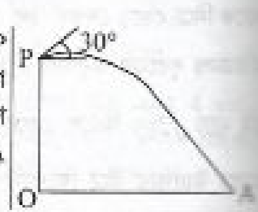
বলটি ধরার সময় $t = \frac{7+\sqrt{105}}{14}$, কারণ t ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore t = 1.23$ সে.

∴ খেলোয়াড়দের দূরত্ব = 9.8 cos 30°×1.23 = 10.44 মিটার

Ex-02 60 মিটার উঁচু একটি পাহাড়ের চূড়া হতে একখন্ড পাথর 40 ms⁻¹ ... এবং অনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হল। এটি ... পাদদেশ হতে কতদূরে ভূমিতে পড়বে?

Solⁿ: মনে করি, OP = 60 মিটার এবং P বিন্দু হতে পাথরটি 40 ms^{-1} বেগে অনুভূমিক তলের সাথে 30° কোণে প্রক্ষিপ্ত হল এবং t সেকেন্ড পরে A বিন্দুতে ভূমিতে পতিত হল।



∴ পাথরের আদি উল্লম্ব বেগ $= 40\sin 30^\circ = 20\ ms^{-1}$ উর্ধমুখী ...

অনুভূমিক বেগ $= 40\cos 30^\circ = 20\sqrt{3}$ মি/সে.

$OP = -20t + \frac{1}{2}.9.8t^2 \Rightarrow 4.9t^2 - 20t - 60 = 0$

$t = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 4.(4.9)(-60)}}{2 \times 4.9}$

ধণাত্মক মান নিয়ে, $t = 6.09$ s $\therefore OA = 20\sqrt{3} \times 6.0.9 = 210.96$m

∴ পাথরটি পাহাড়ের পাদদেশ হতে 210.96 মি. দূরে ভূমিতে পড়বে। Ans.

Ex-03 u আদিবেগে প্রক্ষিপ্ত কণা কর্তৃক লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতা H হলে দেখাও যে, তার অনুভূমিক পাল্লা $R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$

Solⁿ: মনে করি, প্রক্ষেপ কোণ α

তাহলে $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

আবার, $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \sqrt{\frac{u^4\sin^2 2\alpha}{g^2}} = \sqrt{\frac{u^4.4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}}$

$= \sqrt{\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} \times \frac{u^2(1-\sin^2\alpha)}{2g} \times 16}$

$= 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)}$

$\therefore R = 4\sqrt{H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$ (Showed)

Ex-04 একটি গুলি 9.8 মিটার দূরে অবস্থিত 2.45 মিটার উচ্চ একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে অনুভূমিকভাবে চলে যায়। গুলির প্রক্ষেপ বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

Sol^n: ধরি, প্রক্ষেপণ বেগ u মি/সে.

কোণ α, সর্বোচ্চ উচ্চতা H মি., অনুভূমিক পাল্লা R মি.

$\therefore H = 2.45$ মি. এবং $R = 2 \times 9.8 = 19.6$ মি.

আমরা জানি, $\tan\alpha = \frac{4H}{R} = \frac{4 \times 2.45}{19.6} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = 26.57°$

আবার, $R = 19.6 = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{19.6 \times 9.8}{\sin(2 \times 26.57)}}$

$\therefore u = 15.49$ মি/সে. **Ans.**

Ex-05 একটি ফুটবল 11.76 মি/সে. বেগে আঘাত প্রাপ্ত হয়ে 5.88 মি. দূরে অবস্থিত 3.43 মি. উচ্চ একটি দন্ডের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়। আঘাতের দিক নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, আঘাতের দিক অনুভূমিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে এবং t সে. পরে দন্ডের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়।

$\therefore 3.43 = 5.88 \tan\alpha - \frac{g \times (5.88)^2}{2 \times (11.76)^2} \sec^2\alpha$

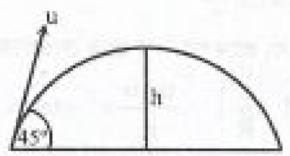
$\Rightarrow 3.43 = 5.88 \tan\alpha - \frac{9.8}{8} \sec^2\alpha \Rightarrow 5 \tan^2\alpha - 24 \tan\alpha + 19 = 0$

$\therefore \tan\alpha = \frac{19}{5}$ এবং $\tan\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 45° \quad \therefore \alpha = 75.25°$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ, 75.25° বা 45° **Ans.**

Ex-06 একটি খাড়া দেওয়ালের পাদদেশ হতে ভূমি বরাবর x দূরত্বে কোন বিন্দু হতে 45° কোণে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হল। তা দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে গেল এবং দেওয়ালের অপর পার্শ্বে y দূরত্বে গিয়ে মাটিতে পড়ল। দেখাও যে, দেওয়ালটির উচ্চতা $\frac{xy}{x+y}$।

Sol^n:



ধরি দেওয়ালের উচ্চতা h। এখানে, পাল্লা, $R = x + y$

এখন $h = x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{R}\right) = x \tan 45° \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)$

$\therefore h = \frac{xy}{x+y}$ **(Showed)**

Ex-07 একটি রাইফেলের বৃহত্তম পাল্লা 1000 মিটার। একই প্রক্ষেপ কোণে ঘণ্টায় 24.5 কি. মি. বেগে চলন্ত কোন বাস হতে ঐ রাইফেল দ্বারা একই বেগে গুলি করা হলে দেখাও যে, তার পাল্লা আর ও $97\frac{2}{9}$ মিটার বৃদ্ধি পাবে।

Sol^n: পাল্লা বৃদ্ধি = গাড়ির বেগ × প্রাসের বিচরণকাল $= \frac{24.5 \times 1000}{3600} \times T$

এখানে $R_{max} = 1000 \Rightarrow \frac{1}{2} g T^2 = 1000$

$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{2 \times 1000}{9.8}} = \frac{100}{7}$ sec. $\therefore$ পাল্লা বৃদ্ধি $= \frac{245 \times 1000}{3600} \times \frac{100}{7}$

$= \frac{875}{9}$ m $= 97\frac{2}{9}$ m **(Showed)**

Ex-08 কোন অনুভূমিক তলের উপরস্থ কোন নির্দিষ্ট স্থান হতে একটি বন্দুক u বেগে চতুর্দিকে গোলা নিক্ষেপ করতে পারে। প্রমাণ কর যে, গোলাগুলি তলের উপর কোন একটি বৃত্তের মধ্যে পতিত হবে এবং ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

Sol^n: মনে করি, যে কোন একটি কণার প্রক্ষেপ বেগ u এবং প্রক্ষেপ কোণ α; প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখাকে যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ ধরে t সময়ে ঐ কণার অবস্থান মনে করি, (x, y) বিন্দু।

তাহলে, $x = ut\cos\alpha$ এবং $y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$

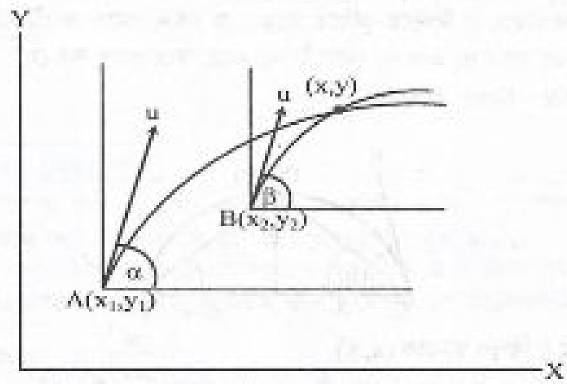
$\therefore u\cos\alpha = \frac{x}{t}$ এবং $u\sin\alpha = \frac{1}{t}\left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)$

α অপসারন করে, $\frac{x^2}{t^2} + \frac{1}{t^2}\left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = u^2$

$\therefore x^2 + (y + \frac{1}{2}gt^2)^2 = u^2t^2$; যা t ও u এর নির্দিষ্ট মানের জন্য একটি বৃত্ত সূচিত করে। $\therefore$ এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ = ut **Ans.**

Ex-09 দুইটি কণা নির্দিষ্ট বিন্দু হতে একই সময়ে একই বেগে α ও β উন্নতি কোণে একই খাড়া তলে প্রক্ষিপ্ত হল এবং পরে তারা মিলিত হল। দেখাও যে, $\alpha + \beta =$ ধ্রুবক।

Sol^n:



ধরি ১ম কণার স্থানাংক $A(x_1, y_1)$ এবং ২য় কণার স্থানাংক $B(x_2, y_2)$

আবার, ধরি কণাদ্বয় একই u বেগে (x,y) বিন্দুতে একই সময়ে মিলিত হয়।

$\therefore x - x_1 = u\cos\alpha t$ ——— (i)

$x - x_2 = u\cos\beta t$ ——— (ii); $y - y_1 = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ ——— (iii)

$y - y_2 = u\sin\beta t - \frac{1}{2}gt^2$ ——— (iv)

(i) – (ii) $\Rightarrow$

$x_2 - x_1 = ut(\cos\alpha - \cos\beta)$ ——— (v)

(iii) – (iv) $\Rightarrow$

$y_2 - y_1 = ut(\sin\alpha - \sin\beta)$ ——— (vi)

(vi) ÷ (v) $\Rightarrow$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ut(\sin\alpha - \sin\beta)}{ut(\cos\alpha - \cos\beta)}$

$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \cot\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \cot^{-1}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}\right) \quad \therefore \alpha + \beta = 2\cot^{-1}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}\right)$

যেহেতু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় স্থির।

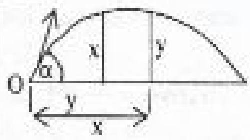
সুতরাং $2\cot^{-1}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}\right) =$ ধ্রুবক $\therefore \alpha + \beta =$ ধ্রুবক **(Showed)**

Ex-08 কোন O বিন্দু হতে প্রক্ষিপ্ত একটি বল দুইটি দেওয়াল অতিক্রম করে। O বিন্দু হতে তাদের একটির অনুভূমিক দূরত্ব y এবং খাড়া দূরত্ব x এবং O বিন্দু হতে অপরটির অনুভূমিক দূরত্ব x এবং খাড়া দূরত্ব y হলে দেখাও যে, O বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের পাল্লা $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

Sol^n: ধরি, প্রক্ষেপকের নিক্ষেপ কোণ α এবং পাল্লা R।

$\therefore y = x\tan\alpha\left(1-\frac{x}{R}\right)$........(i)

এবং $x = y\tan\alpha\left(1-\frac{y}{R}\right)$........(ii)



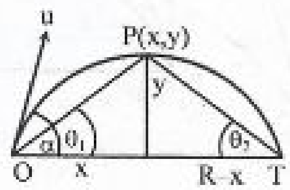
$(i)\div(ii) \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y}\cdot\frac{R-x}{R-y} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{R-x}{R-y}$

$\Rightarrow Ry^2 - y^3 = Rx^2 - x^3 \Rightarrow (x^2-y^2)R = x^3 - y^3$

$\therefore R = \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ **(Showed)**

Ex-11 O বিন্দু হতে একটি কণা u বেগে অনুভূমিক তলের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হয়ে T বিন্দুতে ভূমিতে পড়ে। যে কোন সময়ে কণাটি যদি O এবং T এর সাথে θ_1 এবং θ_2 কোণ উৎপন্ন করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha = \tan\theta_1 + \tan\theta_2$

Sol^n:



ধরি P বিন্দুর স্থানাংক (x, y)

$\therefore \tan\theta_1 = \frac{y}{x}$ এবং $\tan\theta_2 = \frac{y}{R-x}$ $\therefore \tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{y}{x} + \frac{y}{R-x} = \frac{Ry}{x(R-x)}$

আবার, $y = x\tan\alpha\left(1-\frac{x}{R}\right) = x\tan\alpha\,\frac{R-x}{R}$

$\therefore \tan\alpha = \frac{Ry}{x(R-x)}$ $\therefore \tan\alpha = \tan\theta_1 + \tan\theta_2$ **(Proved)**

Ex-12 কোন নির্দিষ্ট অনুভূমিক পাল্লার জন্য যদি α_1, α_2 যে কোন দুইটি সম্ভাব্য প্রক্ষেপ কোণ এবং t_1, t_2 যথাক্রমে বিচরণকাল হয় তবে দেখাও যে, $\frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2} = \frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$

Sol^n: আমরা জানি, $T^2 = \frac{2R\tan\alpha}{g}$

$\therefore t_1^2 = \frac{2R\tan\alpha_1}{g}$ $\therefore t_2^2 = \frac{2R\tan\alpha_2}{g}$

$\therefore \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_1}$

$\Rightarrow \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2} = \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2} = \frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$ **(Showed)**

Ex-13 একটি বস্তুকণা d মি. দূরে h মিটার উঁচু একটি দেওয়ালের উপর দিয়ে কোন রকমে চলে গিয়ে 2d মিটার দূরে h মিটার উঁচু নির্দিষ্ট স্থানে আঘাত করল। প্রক্ষেপ বেগ u হলে দেখাও যে, $\frac{4u^2}{g} = \frac{4d^2+9h^2}{h}$

Sol^n: ধরি, u বেগে α কোণে প্রক্ষিপ্ত কণাটি t সেকেন্ড পরে h উচ্চতায় অবস্থান করে।

$\therefore h = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ $\therefore gt^2 - 2ut\sin\alpha + 2h = 0$

এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। মনে করি এর মূলদ্বয় t_1 এবং t_2; তা হলে t_1 ও t_2 সেকেন্ড পরে অনুভূমিক দূরত্ব $d = ut_1\cos\alpha$ এবং $2d = ut_2\cos\alpha$

$\therefore t_2 = 2t_1$ .... (ii)

আবার, $t_1 + t_2 = \frac{2u\sin\alpha}{g} \Rightarrow 3t_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$..................(iii)

$\therefore t_1 t_2 = 2t_1^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t_1^2 = \frac{h}{g}$...............(iv)

কিন্তু $t_1 = \frac{d}{u\cos\alpha} = \frac{2u\sin\alpha}{3g}$........(v)

(iv) ও (v) হতে, $t_1^2 = \frac{d^2}{u^2\cos^2\alpha} = \frac{h}{g} = \frac{4u^2\sin^2\alpha}{9g^2}$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{gd^2}{hu^2}$ এবং $\sin^2\alpha = \frac{9hg}{4u^2}$

কিন্তু, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\therefore \frac{gd^2}{hu^2} + \frac{9hg}{4u^2} = 1 \Rightarrow \frac{9hg}{4u^2} = 1 - \frac{gd^2}{hu^2} \Rightarrow 4u^2 = 9hg + \frac{4gd^2}{h}$

$\therefore \frac{4u^2}{g} = \frac{9h^2+4d^2}{h}$ **(Showed)**

Ex-14 অনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তু 2a দূরবর্তী a উচ্চতা বিশিষ্ট দুইটি উল্লম্ব দেওয়ালকে কোনমতে অতিক্রম করে। দেখাও যে, অনুভূমিক পাল্লা $2a\cot\frac{\alpha}{2}$

Sol^n: ধরি, পাল্লা R এবং প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে দেওয়ালের দূরত্ব = x

$\therefore a = x\tan\alpha\left(1-\frac{x}{R}\right)$ $\therefore \frac{\tan\alpha}{R}x^2 - \tan\alpha.x + a = 0$

x এর দুই মান x_1 ও x_2 হলে, $x_1 + x_2 = R$

$x_1x_2 = \frac{aR}{\tan\alpha}$ এবং $|x_1 - x_2| = 2a$ আবার, $(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4a^2$

$\Rightarrow R^2 - 4.\frac{aR}{\tan\alpha} = 4a^2 \Rightarrow R^2 - 4a\cot\alpha.R - 4a^2 = 0$

$\Rightarrow R = \frac{4a\cot\alpha \pm \sqrt{16a^2\cot^2\alpha + 16a^2}}{2}$

$\Rightarrow R = 2a\cot\alpha \pm 2a\sqrt{1+\cot^2\alpha} \Rightarrow R = 2a(\cot\alpha + \text{cosec}\alpha)$

$\Rightarrow R = \frac{2a}{\sin\alpha}(\cos\alpha \pm 1)$

যেহেতু R ধনাত্মক, সুতরাং (cosα−1) গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore R = \frac{2a}{\sin\alpha}(\cos\alpha + 1) \Rightarrow R = \frac{2a.2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha/2}$

$\therefore R = 2a\cot\frac{\alpha}{2}$ **(Showed)**

Ex-15 বুলেটের প্রক্ষেপন কোণ α ও β হলে এটা একই অনুভূমিক তলস্থিত লক্ষ্যবস্তু হতে যথাক্রমে a দূরত্ব কাছে এবং b দূরত্ব পিছনে পড়ে। দেখাও যে, লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করার জন্য সঠিক প্রক্ষেপণ কোণ $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left[\frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}\right]$

Sol^n: ধরি, সঠিক প্রক্ষেপণ কোণ $= \theta$

প্রক্ষেপণ বেগ $= u$; লক্ষ্যবস্তুর দূরত্ব R

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে, $R - a = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ ....(i)

$\therefore$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $R + b = \frac{u^2\sin 2\beta}{g}$ ....(ii)

$(i)\times b + (ii)\times a \Rightarrow (a+b)R = \frac{u^2}{g}(b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta)$ .... (iii)

আবার, $R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

(iii) নং হতে, $(a+b)\frac{u^2\sin 2\theta}{g} = \frac{u^2}{g}(b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta)$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b} \therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left[\frac{a\sin 2\beta + b\sin 2\alpha}{a+b}\right]$

(Showed)

Ex-16 ভূমির বিস্ফোরিত একটি শেলের কণাগুলো 19.6 মি/সে. বেগে চারদিকে ছুটল। ভূমির এক বিন্দুতে কণাগুলোর গমনকালের ব্যবধান 2 সে. হলে বিস্ফোরণ বিন্দু হতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব কত?

Sol^n: ধরি, বিস্ফোরণ বিন্দু হতে প্রদত্ত বিন্দুর দূরত্ব x মি. $\therefore$ এই দূরত্বের জন্য দুটি প্রক্ষেপন কোণ থাকবে। এদের একটি α হলে অপরটি $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$।

ধরি, এই দুই কোণের বিচরণ কাল যথাক্রমে t_1 ও t_2

$\therefore |t_1 - t_2| = 2$

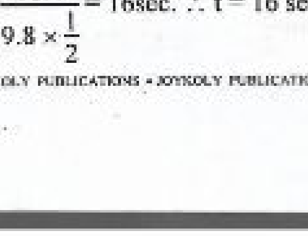
$\Rightarrow \left|\frac{2u\sin\alpha}{g} - \frac{2u\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{g}\right| = 2 \Rightarrow \frac{u}{g}|\sin\alpha - \cos\alpha| = 1$

$\Rightarrow |\sin\alpha - \cos\alpha|^2 = \left(\frac{9.8}{19.6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4} \therefore x = \frac{(19.6)^2\sin 2\alpha}{9.8} = \frac{(19.6)^2\times 3}{4\times 9.8} = 29.4$ মি. **Ans.**

Ex-17 একটি বস্তু $78.4\ ms^{-1}$ বেগে ভূমির সাথে 30° কোণে নিক্ষিপ্ত হল। কত সময় পরে বস্তুটি নিক্ষেপ দিকের সাথে লম্বভাবে চলবে?

Sol^n:



$\therefore$ u বরাবর গতির সূত্র প্রয়োগ করে,

$v\cos 90^\circ = u + g\cos(90^\circ + 30^\circ)t \Rightarrow 0 = u - g\sin 30^\circ t$

$\Rightarrow t = \frac{u}{g\sin 30^\circ} = \frac{78.4}{9.8\times\frac{1}{2}} = 16\text{sec.} \therefore t = 16$ sec. **Ans.**

Ex-18 একটি রকেট ভূমিতে বিস্ফোরিত হলে এর টুকরোগুলো 40 মি/সে. গতিবেগে চারদিকে ছিটকে পড়ল। দেখাও যে, বিস্ফোরণ স্থান থেকে 120 মিটার দূরে কোন স্থানে টুকরোগুলো 4 সেকেন্ড অন্তর অন্তর পড়ার সম্ভাবনা আছে। $[g = 10\ ms^{-1}]$

Sol^n: এক্ষেত্রে, প্রক্ষেপ কোণ দুটি α ও $\frac{\pi}{2}-\alpha$

অতএব, $120 = \frac{40^2}{g}\sin 2\alpha \therefore \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$

মনেকরি, α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণাটির বিচরণকাল T_1 এবং $\frac{\pi}{2}-\alpha$ কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণাটির বিচরণকাল T_2।

$\therefore T_1 = \frac{2\times 40\sin\alpha}{g} = \frac{80\sin\alpha}{10} = 8\sin\alpha$

$\therefore T_2 = \frac{2\times 40\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{g} = \frac{2\times 40\cos\alpha}{10} = 8\cos\alpha$

অতএব, $|T_1 - T_2| = \sqrt{(T_1+T_2)^2 - 4T_1T_2}$

$= \sqrt{64(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 4.8^2\sin\alpha\cos\alpha}$

$= 8\sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} = 8\sqrt{1-\sin 2\alpha} = 8\sqrt{1-\frac{3}{4}}$

$= 8\sqrt{\frac{1}{4}} = 8\times\frac{1}{2} = 4$ সেকেন্ড **(Showed)**

For practice:

01. h উচ্চতা হতে u বেগে ও α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণা অনুভূমিক x দূরত্বে ভূমিতে পড়ে। দেখাও যে, $2u^2(h + x\tan\alpha) = gx^2\sec^2\alpha$
02. α কোণে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক a অনুভূমিক ও b উলম্ব দূরবর্তী একটি দেওয়ালকে কোনক্রমে অতিক্রম করে। দেখাও যে, প্রক্ষেপকটির সর্বোচ্চ উচ্চতা $= \frac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha - b)}$
03. দেখাও যে, কোন উলম্ব তলে $\sqrt{2gk}$ বেগে নিক্ষিপ্ত কণাগুলোর শীর্ষসমূহের সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত, যার সমীকরণ $x^2 + 4y(y-k) = 0$
04. কোন প্রক্ষেপকের বিচরণ পথের উপকেন্দ্রিক জ্যা- এর প্রান্তবিন্দুতে অন্তবেগ v_1 ও v_2 এবং অনুভূমিক বেগ v হলে, দেখাও যে $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{v^2}$
05. s উচ্চতাবিশিষ্ট একটি পাহাড়ের মাথায় অবস্থিত শত্রুপক্ষকে আঘাত করতে হলে দেখাও যে, গুলির ক্ষুদ্রতম নিক্ষেপন বেগ $\sqrt{gs(1+\operatorname{cosec}\beta)}$, যেখানে পাহাড়ের শীর্ষ ও নিক্ষেপন বিন্দুর সংযোজক রেখা অনুভূমির সাথে β কোণে নত।
06. h উচ্চতার একটি পাহাড়ের শীর্ষে অবস্থিত একটি দুর্গ লক্ষ্য করে সমুদ্রস্থিত একটি জাহাজ হতে $\sqrt{2gk}$ বেগে গুলি করা হল। দেখাও যে, সর্বাধিক $2\sqrt{k(k-h)}$ অনুভূমিক দূরত্ব হতে লক্ষ্যভেদ করা যায়।
07. একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে 50 ফুট/সে. বেগে এবং 30° ও 45° প্রক্ষেপন কোণে নিক্ষিপ্ত দুটি কণা ভূমিকে একই বিন্দুতে আঘাত করে। টাওয়ারের পাদবিন্দু হতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব কত? **Ans:** $\frac{625}{8}(3-\sqrt{3})$ ft
08. ভূমি হতে 100 ফুট উঁচুতে বেগে বিস্ফোরিত বোমার টুকরাগুলো 40 ফুট/সে. বেগে ছড়িয়ে পড়লে দেখাও যে, এদের সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা $50\sqrt{5}$ ফুট।
09. u আদিবেগে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক নিক্ষেপণ বিন্দুগামী ও অনুভূমির সাথে β কোণে আনত তলকে সমকোণে আঘাত করে। দেখাও যে,
    (i) তল বরাবর এর বিচরণকাল $= \frac{2u}{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$
    (ii) ভূমি হতে আঘাতপ্রাপ্ত বিন্দুর উচ্চতা $= \frac{2u^2\sin^2\beta}{g(1+3\sin^2\beta)}$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. ভূমি থেকে উলম্ব তলে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু 4 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপন বিন্দু হতে 58.8 মিটার দূরে পুনরায় ভূমিতে ফিরে আসে। নিক্ষেপন বেগের মান এবং বস্তুটির সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর। [13-14]

Solve $2R\tan\alpha = gT^2$

$\therefore 2 \times 58.8 \times \tan\alpha = 9.8 \times 4^2$

$\therefore \alpha = 53.13^\circ$

এখন $58.8 = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

$\therefore u = 24.5\ ms^{-1}$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = 19.6$ m **Ans.**

02. বন্দুক থেকে নিক্ষিপ্ত একটি গোলা নিক্ষেপণ বিন্দু থেকে **50 yards** দূরে এবং **75 feet** উঁচু দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে আনুভূমিকভাবে অতিক্রম করে। গোলার নিক্ষেপণ গতিবেগ ও নিক্ষেপণ কোণের মান নির্ণয় কর। [02-03]

Solve ধরি, গোলার গতিবেগ u এবং নিক্ষেপণ কোণ α

$\therefore 150 = \dfrac{R}{2} = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha\alpha}{2g} \Rightarrow u^2 \sin 2\alpha = 300 \times 32$ .... (i)

এবং $75 = H = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha\alpha}{2g} \Rightarrow u^2\sin^2\alpha = 150 \times 32$ .... (ii)

(ii) ÷ (i) $\dfrac{\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan\alpha = 1$



$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$ (i) এ α এর মান বসিয়ে, $u^2.1 = 300 \times 32$

$\therefore u = \sqrt{9600}\ fts^{-1} = 97.98\ fts^{-1}$ **Ans.**

03. একই গতিবেগে নিক্ষিপ্ত কোন নির্দিষ্ট পাল্লা R এর জন্য কোন প্রক্ষেপকের দুইটি বিচরণ পথের সর্বাধিক উচ্চতা h এবং h_1 হলে, দেখাও যে, $R = 4\sqrt{hh_1}$ [01-02]

Solve R পাল্লার জন্য একটি নিক্ষেপণ কোণ α হলে, অপরটি $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

$\therefore h = \dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$ এবং $h_1 = \dfrac{u^2 \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2g} = \dfrac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$

পাল্লা, $R = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \dfrac{2u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$

$= 2\sqrt{\dfrac{u^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}} = 2 \times 2\sqrt{\dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g} . \dfrac{u^2\cos^2\alpha}{2g}}$

$\therefore R = 4\sqrt{hh_1}$ **(Showed)**

04. একটি বস্তু অনুভূমির সঙ্গে θ কোণে উপর দিকে নিক্ষিপ্ত হইল। বস্তুটির নিক্ষেপ করিবার গতি 25 m/sec. 1.25 সেকেন্ডে বস্তুটি নিক্ষেপ করিবার স্থানের উপরে তাহার সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছালে বস্তুটির নিক্ষেপ করিবার কোণটি কত ছিল? g = 10 m/sec² [95-96; KUET : 04-05]

Solve $t = \dfrac{u\sin\theta}{g} \Rightarrow 1.25 = \dfrac{25\sin\theta}{10}$

$\therefore \theta = 30^\circ$ **Ans.**

05. একটি বলকে ভূমি হতে **100 ft/sec** আদিবেগে এবং অনুভূমির সাথে $\cos^{-1}(3/5)$ কোণে শূন্যে নিক্ষেপ করা হল। 2 সেকেন্ড পর নিক্ষেপণ বিন্দু হতে বলটির দূরত্ব নির্ণয় কর। [95-96]

Solve $x = u\cos\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{5}\right) \times 2 = 100 \times \dfrac{3}{5} \times 2 = 120$ ft

$y = 100 \sin\left(\cos^{-1}\dfrac{3}{5}\right) \times 2 - \dfrac{1}{2}g\ 2^2 = 96$ [$\because g = 32$ ft/sec²]

$\therefore$ নিক্ষেপণ বিন্দু হতে বলটির দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(120)^2 + (96)^2}$

$= 153.67$ ft **Ans.**

সুতরাং কণাগুলো 4 sec অন্তর অন্তর 384ft দূরে গিয়ে পড়বে **(Showed)**

06. প্রতি সেকেন্ডে 20 ফুট গতিবেগে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুকণার আনুভূমিক পাল্লা 12 ফুট। দেখাও যে এর নিক্ষেপণ কোণ θ- এর মান $\tan^{-1}(4/3)$ বা $\tan^{-1}(3/4)$. [98-99]

Solve $R = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g} \Rightarrow 12 = \dfrac{(20)^2 \sin 2\theta}{32} \Rightarrow \sin 2\theta = 0.96$

$\Rightarrow \dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = 0.96 = \dfrac{24}{25}$

$\Rightarrow 25\tan\theta = 12 + 12\tan^2\theta$.

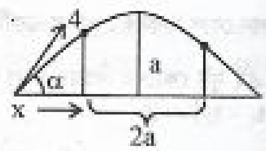
$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{4}{3}$ or $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\dfrac{4}{3}$ বা, $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ **(Showed)**

07. একটি কণা আনুভূমিকের সাথে α কোণে এমনভাবে নিক্ষিপ্ত হইল, যাহা '2a' ফুট ব্যবধানে অবস্থিত 'a' ফুট উচ্চ দুইটি দেয়ালকে স্পর্শ করিয়া যায়। দেখাও যে, নিক্ষিপ্ত কনাটির পাল্লা **R = 2a cot (α/2).** [96-97]

Solve We know

$y = x\tan\alpha\left(1 - \dfrac{x}{R}\right)$



$\therefore a = x\tan\alpha - \dfrac{x^2}{R}\tan\alpha$

$\Rightarrow aR = (R\tan\alpha)x - (\tan\alpha)x^2$

$\Rightarrow (\tan\alpha)x^2 - (R\tan\alpha)x + aR = 0$ .... (i)

যা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার মূল দুইটি x_1, x_2

$\therefore x_1 + x_2 = \dfrac{R\tan\alpha}{\tan\alpha} = R$ .... (ii); $x_1x_2 = \dfrac{aR}{\tan\alpha}$ .... (iii)

এখন, $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$\Rightarrow (2a)^2 = R^2 - 4\dfrac{aR}{\tan\alpha} \Rightarrow R^2 = \dfrac{4aR}{\tan\alpha} + 4a^2$

$\Rightarrow R^2 - \dfrac{4aR}{\tan\alpha} - 4a^2 = 0 \therefore R = \dfrac{\dfrac{4a}{\tan\alpha} \pm \sqrt{\dfrac{16a^2}{\tan^2\alpha} - 4.1(-4a^2)}}{2.1}$

$= \dfrac{4a \pm 4a\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}{2\tan\alpha} = 4a\dfrac{(1 \pm \sec\alpha)}{2\tan\alpha}$

$= 2a\dfrac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$ (ঋণাত্মক চিহ্ন বাদ দিয়ে)

$= 2a\dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{a}{2}} = 2a\cot\dfrac{\alpha}{2}$ **(Showed)**

একটি বোমা বিস্ফোরিত হওয়া মাত্র কণাগুলি 128 ft/sec গতিবেগে সবদিকে ছুটতে থাকে। দেখাও যে, 384 ft আনুভূমিক দূরত্বে অবস্থিত কোন বিন্দুতে এর কণাগুলো 4 sec অন্তর অন্তর পড়বে। [99-00]

Solve নির্দিষ্ট পাল্লার জন্য একটি প্রাসের নিক্ষেপন কোণ α হলে অপর প্রাসের নিক্ষেপন কোণ $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ হবে।

১ম ক্ষেত্রে $T_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ .... (i)

২য় ক্ষেত্রে $T_2 = \frac{2u\cos\alpha}{g}$ .... (ii)

দেওয়া আছে, $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g} = 384$

$\Rightarrow \frac{128^2\sin2\alpha}{32} = 384 \Rightarrow \sin2\alpha = \frac{384\times32}{128^2} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 1-\sin2\alpha = 1-\frac{3}{4} \Rightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore |\sin\alpha-\cos\alpha| = \frac{1}{2}$ এখন $|T_1-T_2| = \left|\frac{2u\sin\alpha}{g}-\frac{2u\cos\alpha}{g}\right|$

$= \frac{2u}{g}|\sin\alpha-\cos\alpha| = \frac{2\times128}{32}\times\frac{1}{2} = 4$ sec.

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষ বিন্দু হতে একটি পাথর খণ্ডকে 19.62 m/s গতিবেগে অনুভূমির দিকে নিক্ষেপ করা হলো। পাথর খণ্ডটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে 98.1 m দূরে ভূমিকে আঘাত করলে টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [03-04]

Solve ধরি, উচ্চতা = h এবং $x = 98.1 = u\cos\alpha t = 19.62\times t$

$\Rightarrow t = 5$sec $\therefore h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times9.8\times5^2 = 122.5$m **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

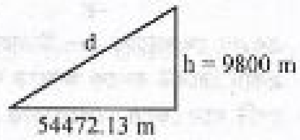
একটি বস্তুকে 60 m উচ্চতায় একটি বাড়ীর ছাদের উপর হতে 40 m/sec বেগে ভূমির সঙ্গে 90° কোণে ছোঁড়া হল, কত দূরে এবং কখন এটি ভূমিকে স্পর্শ করবে? [09-10]

Solve We know, $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 60 = \frac{1}{2}\times9.8t^2 \Rightarrow t = 3.5$ sec

$x = vt = 40\times3.5 = 140$m **Ans.**

ভূমি হতে 9.8 কি.মি উপর দিয়ে ঘন্টায় 360 কি.মি / ঘন্টা বেগে চলন্ত একটি উড়োজাহাজ হতে একটি বস্তু নিচের দিকে ছেড়ে দেওয়া হল। বস্তুটি ভূমিতে যে স্থানে পতিত হবে সে স্থান হতে নিক্ষেপ বিন্দুর সরল রৈখিক দূরত্ব নির্ণয় কর। [07-08]

Solve $9.8\times1000 = \frac{1}{2}\times9.8t^2$



$t = 44.7213$s

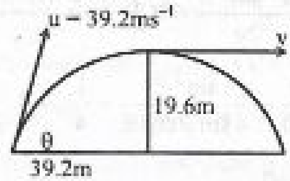
$u = \frac{360\times1000}{3600} = 100\text{ms}^{-1}$

$x = ut = 100\times44.7213 = 4472.13$ m

$d = \sqrt{4472.13^2+9800^2} = 10772.18$ m **Ans.**

03. একটি বুলেট 39.2 মিটার দূরবর্তী 19.6 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট একটি দেওয়াল স্পর্শ করে অনুভূমিকভাবে চলে যায়। বুলেটটির প্রক্ষেপণ বেগ ও কোণ নির্ণয় কর। [05-06]

Solve



যেহেতু বুলেটটি দেওয়াল স্পর্শ করে অনুভূমিক ভাবে চলে যায় সুতরাং বুলেটটির সর্বাধিক উচ্চতা H = 19.6m এবং $\frac{R}{2} = 39.2$m $\therefore R = 78.4$m

আমরা জানি $R = 4H\cot\alpha$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{R}{4H} = \frac{78.4}{4\times19.6} = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \cot45° \therefore \alpha = 45°$

আবার $\frac{u^2\sin2\alpha}{g} = R$

$\Rightarrow \frac{u^2\sin90°}{9.8} = 78.4 \Rightarrow u = \sqrt{78.4\times7.8} \therefore u = 27.72\text{ ms}^{-1}$

$\therefore$ নিক্ষেপন বেগ 27.72 ms^{-1} এবং নিক্ষেপন কোণ 45° **Ans.**

04. ভূমি হতে 28 ms^{-1} বেগে বুলেট ছোঁড়া হল। তা নিক্ষেপণ বিন্দু থকে 40 m দূরে এবং H মিটার উঁচু একটি দেওয়াল কোন রকমে আনুভূমিকভাবে অতিক্রম করল। দেওয়ালের উচ্চতা H এবং বুলেট নিক্ষেপণের কোণ নির্ণয় কর। (g = 9.81 m sec^{-2}) [03-04]

Solve $R = \frac{u_0^2\sin2\alpha}{g} \Rightarrow 40\times2 = \frac{(28)^2\times\sin2\alpha}{9.8} \Rightarrow \alpha = 45°$

আবার, $H = \frac{u_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{(28)^2\times(\sin45)^2}{2\times9.8} = 20$ m **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

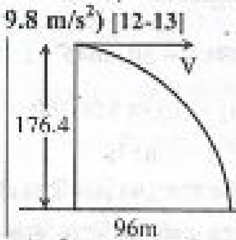
01. 176.4 m উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু থেকে একটি পাথরকে আনুভূমিক বরাবর ছোড়া হলো। পাথরটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 96 m দূরে ভূমিতে গিয়ে পড়ল। পাথরটি কত সময় পর ভূমিতে এসে পড়ল? কী দ্রুতিতে পাথরটি ছোড়া হয়েছিল? (g = 9.8 m/s²) [12-13]

Solve সূত্রমতে, $h = 176.4 = \frac{1}{2}\times g\times t^2$

$\therefore t = 6$ sec

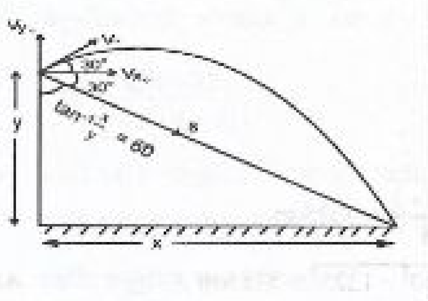
এখন, $x = 96 = vt$

$\therefore v = 16\text{ms}^{-1}$ **Ans.**



02. 39.2 m উঁচু হতে 19.6 m/sec বেগ এবং 30° উন্নতি কোণে একটি বল ছুঁড়ে দেওয়া হল। বলটি কখন, কোথায় এবং কত বেগে মাটিতে আঘাত করবে? [11-12]

Solve



$V_x = V_0\cos\theta = \frac{19.6\sqrt{3}}{2}$

$V_y = -v_0\sin\theta + gt$

$= -19.6\times\frac{1}{2}+9.8\times4$

$= 29.4$

$\therefore$ মাটিতে পতনের বেগ

$= \sqrt{v_x^2+v_y^2}$

$= 33.95\text{ ms}^{-1}$ **Ans.**

03. একটি বস্তু θ কোণে (ভূমির সংগে) নিক্ষিপ্ত হলো। $H:R=1:4\sqrt{3}$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর। [08-09]

Solve $H=\dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g}$ এবং $R=\dfrac{u^2\sin 2\theta}{g}$

$\therefore \dfrac{H}{R}=\dfrac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{4}\tan\theta$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{4}\tan\theta$

$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta=30^\circ$ **Ans.**

04. ভূমি হতে 1 m উপরে অবস্থিত একটি ক্রিকেট বলকে t = 0 সময়ে ব্যাট দিয়ে আঘাত করা হলো। বলটি ভূমির সাথে 30° কোণে 20 m/s গতিতে ব্যাট ছাড়লে, মাটিতে আঘাত করতে বলটি কত সময় নিবে? বল কর্তৃক অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্বও নির্ণয় কর। [06-07]

Solve আমরা জানি, $h=-(u\sin\alpha)t+\frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 1=-20\times\sin30^\circ\times t+\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2$

$\therefore t=2.136\text{s}\ (t>0)$

$\therefore x=(u\cos\alpha)t$

$=20\times\cos30^\circ\times 2.136=37\text{m}$ **Ans.**

05. 100 মিটার উচ্চ একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে 50 মিঃ/সেঃ বেগে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে নীচের দিকে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। একই সময়ে টাওয়ারের পাদদেশ হতে অপর একটি বস্তু অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। কত সময় পরে বস্তু দুইটি মিলিত হবে? [04-05]

Solve $100-x=50\sin30\times t+\frac{1}{2}gt^2$ ...... (i)

এবং $x=50\sin45\times t-\frac{1}{2}gt^2$ ..... (ii)

(i) + (ii) নং হতে $100=(50\sin30)t+(50\sin45)t$

$\therefore t=1.657\text{s}$ **Ans.**

06. ভূমি হতে 2.94 কিমি উপর দিয়ে ঘন্টায় 180 কি.মি. বেগে চলন্ত একটি উড়োজাহাজ হতে একটি বস্তু নিচের দিকে ছেড়ে দেয়া হল। বস্তুটি ভূমিতে যে স্থানে পতিত হবে, সে স্থান হতে নিক্ষেপ বিন্দুর সরল রৈখিক দূরত্ব নির্ণয় কর। [03-04]

Solve $u=\dfrac{180\times1000}{3600}\text{ms}^{-1}=50\text{ ms}^{-1},\ h=\frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 2940=\frac{1}{2}gt^2$

$\therefore t=\sqrt{\dfrac{2940\times2}{9.8}}$ sec

$x=ut=50\times\sqrt{\dfrac{2940\times2}{9.8}}=1225\text{ m}$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{2940^2+1225^2}=3185\text{ m}$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে

01. একটি কণা v বেগে নিক্ষিপ্ত হলে, তার অনুভূমিক পাল্লা উচ্চতার 4 গুণ হয়। এক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ কোণ হবে : [11-12]

A. 90° B. 60° C. 30° D. 45°

Ans D Solve সূত্রমতে, $\tan\theta=\dfrac{4H}{R}$ এখন, $R=4\times H$

$\tan\theta=\dfrac{4H}{4H}=1\ \therefore \theta=45^\circ$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে

01. একটি কণা u বেগে নিক্ষিপ্ত হলে যদি তার অনুভূমিক উচ্চতার দ্বিগুণ হয় তবে তার অনুভূমিক পাল্লা হল- [05-06]

A. $\dfrac{4u}{5g}$ B. $\dfrac{2u^2}{5g}$ C. $\dfrac{4u^2}{5g}$ D. $\dfrac{2u}{5g}$

Ans C Solve $R=2H\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{4H}{R}=\dfrac{4H}{2H}=2$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ \therefore R=\dfrac{u^2 2\sin\theta\cos\theta}{g}=\dfrac{4u^2}{5g}$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে

01. একটি বস্তু 39.2 m/sec বেগে ভূমির সাথে 30° কোনে নিক্ষিপ্ত সময় পরে বস্তুটি নিক্ষেপ দিকের সাথে লম্বভাবে থাকবে? [15-16]

A. 9 sec B. 6 sec C. 7 sec D. 8 sec

Ans D Solve সময় $=\dfrac{u}{g\sin\alpha}=\dfrac{39.2}{9.8\sin30^\circ}=\dfrac{39.2}{9.8\times\frac{1}{2}}=\dfrac{39.2}{4.9}$

02. বন্দুক থেকে নিক্ষিপ্ত একটি গুলি নিক্ষেপণ বিন্দু থেকে 50 গজ 75 ফুট উঁচু দেয়ালের ঠিক উপর দিয়ে আনুভূমিকভাবে অতিক্রম গুলির নিক্ষেপণ গতি ও নিক্ষেপণ দিক বের কর। [14-15]

A. 97.98 ft ps, 45° B. 97.98 ft ps, 30°
C. 9.798 ft ps, 45° D. 9.798 ft ps, 60°

Ans A Solve $H=\dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\ \Rightarrow 75=\dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$ ----

$x=\dfrac{u\cos\alpha.u\sin\alpha}{g}\Rightarrow 150=\dfrac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ ----- (ii)

$(i)\div(ii)\Rightarrow \dfrac{75}{150}=\dfrac{\tan\alpha}{2}\ \therefore \tan\alpha=1\Rightarrow\alpha=45^\circ$

আবার, $75=\dfrac{u^2(\sin45)^2}{2g}\ \therefore u=97.98$ ftps

03. একজন খেলোয়াড় 2m উচ্চতায় ভূমির সাথে 30° কোণে 20 একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করলে, অন্য একজন খেলোয়াড় 1m বলটি ধরে ফেলে। খেলোয়াড় দু'জনের দূরত্ব কত? [12-13]

A. 10 m B. 37 m
C. 74 m D. None

Ans B Solve $2-1=20\sin30^\circ\times t-\frac{1}{2}\times9.8\times t^2$

$\Rightarrow t=2.14\ \therefore x=20\cos30^\circ\times2.14\approx37\text{ m}$

একটি বস্তু অনুভূমির সাথে θ কোণে উপর দিকে নিক্ষিপ্ত হল। বস্তুটির নিক্ষেপ করার গতি 25 m/sec। বস্তুটি নিক্ষেপ করার 1.25 sec পর সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছালে θ এর মান নির্ণয় কর। [12-13]

A. 30° B. 45°
C. 60° D. None

Ans A **Solve** $v\sin\theta = u\sin\alpha - gt$; সর্বোচ্চ উচ্চতায়, $v = 0$

so, $\sin\alpha = \frac{gt}{u} = \frac{10 \times 1.25}{25} = 0.5 \therefore \alpha = 30°$

u বেগে এবং অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে প্রক্ষিপ্ত কণার আনুভূমিক পাল্লা হল: [11-12]

A. $\frac{u^2}{2g}$ B. $\frac{u^2}{\sqrt{2g}}$ C. $\left(\frac{u}{\sqrt{g}}\right)^2$ D. None of these

Ans C **Solve** $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{u^2 \sin(2\times45)}{g} = \frac{u^2}{g} = \left(\frac{u}{\sqrt{g}}\right)^2$

একটি টাওয়ারের 90 m দূর হতে 30° নিক্ষেপণ কোণে একটি বন্দুকের গুলি ছোড়া হল। টাওয়ারের উচ্চতা যদি 15 m হয় তবে গুলিটি টাওয়ারের শীর্ষ বিন্দুতে আঘাত করে। গুলির আদিবেগ কত? [11-12]

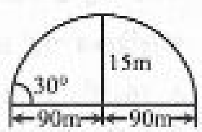
A. 37.8m/s B. 67.8m/s
C. 38.7m/s D. None of these

Ans A **Solve** We know,

$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2(V_o\cos\theta)^2}$

$\Rightarrow 15 = 90\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{g \times (90)^2}{2(V_o\cos 30)^2}$

$\therefore V_o = 37.8\ ms^{-1}$



একজন বৈমানিক 4900 মি. উপর দিয়ে 126 কিমি/ঘণ্টা বেগে উড়ে যাবার সময় একটি বোমা ফেলে দিল। সে যে বস্তুতে আঘাত করতে চায় সে বস্তু হতে তার আনুভূমিক দূরত্ব কত ($g = 9.8\ m/s^2$)? [10-11]

A. 1106.8 m B. 553.4 m
C. 1660.2 m D. None

Ans A **Solve** $4900 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow t = 31.628s$

$[v = \frac{126 \times 10^3}{3600} = 35\ ms^{-1}] \therefore x = 35 \times 31.623 \approx 1106.8\ m$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি উঁচু টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে একটি বল 21 m/s গতিবেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বলটি টাওয়ারের পাদদেশ হতে 84 m দূরে ভূমিতে আঘাত করলে টাওয়ারের উচ্চতা কত? [12-13]

A. 30 m B. 39 m C. 45 m
D. 20 m E. None

Ans E **Solve** $84 = v\cos0° \times t = v \times t$

$\therefore t = \frac{84}{21} = 4$ sec $\therefore$ উচ্চতা, $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4^2 = 78.4$ m

02. 100 m অনুভূমিক পাল্লার জন্য একটি বুলেটের উড্ডয়ন কাল হল 10 sec, নিক্ষেপণ কোণ কত? [09-10]

A. $\tan^{-1}(9.8)$ B. $\sin^{-1}(4.9)$ C. $\cos^{-1}(10.5)$
D. $\tan^{-1}(7.8)$ E. $\tan^{-1}(4.9)$

Ans E **Solve** $T^2 = \frac{2R\tan\alpha}{g}$

$\Rightarrow 10^2 = \frac{2 \times 100 \times \tan\alpha}{9.8} \Rightarrow \tan\alpha = 4.9 \therefore \alpha = \tan^{-1}4.9$

SELF TEST [Written]

01. একজন বালক একটি বল খাড়া উপরের দিকে H মিটার উচ্চতায় উৎক্ষেপন করতে সক্ষম। দেখাও যে, সে d মিটার দূরত্বে h মিটার উচ্চ একটি দেয়ালের উপর দিয়ে বলটি নিক্ষেপ করবে যদি $2H \geq h + \sqrt{h^2 + d^2}$ হয়।

02. একটি বস্তুকণাকে ভূমির সাথে α কোণে একটি নির্দিষ্ট বেগে নিক্ষেপ করা হল। বস্তুকণাটির সর্বাধিক উচ্চতা h হলে প্রমাণ কর যে, $h\sin^2\alpha$ উচ্চতায় ও সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছার সময়ের পার্থক্য $\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\alpha$

03. $\frac{13}{2}g$ সেন্টিমিটার উঁচু একটি স্তম্ভের শীর্ষ থেকে একটি নির্দিষ্ট বেগে, যার উল্লম্ব এবং অনুভূমিক লম্বাংশের পরিমাণ যথাক্রমে 6g ও 8g, একটি বস্তুকে নিক্ষেপ করা হল। মোট বিচরণ সময় এবং স্তম্ভের পাদদেশ থেকে ভূমি হতে কত দূরে বস্তুটি পতিত হয়েছিল তা নির্ণয় কর।

Ans. $\sqrt{13}$ সেকেন্ড, 282.67 মিটার

04. 24 মিটার উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষ হতে 39 মি/সে. বেগে এবং 30° প্রক্ষেপণ কোণে একটি বস্তুকণা নিক্ষিপ্ত হল। টাওয়ারের পাদদেশ হতে কত দূরে ও কত বেগে এটা ভূমিকে আঘাত করবে?

Ans. 168.87 মি. এবং বেগ 44.84 ms^{-1} এবং এর দিক 41°।

05. কোন নির্দিষ্ট বেগের জন্য বৃহত্তম পাল্লা D হলে দেখাও যে, $R = D\sin2\alpha$ এবং এ হতে প্রমাণ যে, কোন অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য সাধারণত দুটি সঞ্চার পথ থাকে। উপরিউক্ত দুটি সঞ্চারপথে লব্ধ বৃহত্তম উচ্চতা h_1, h_2 হলে দেখাও যে, $D = 2(h_1 + h_2)$

06. কোন প্রক্ষিপ্ত বস্তু এমন দুটি বিন্দু দিয়ে যায় যারা প্রক্ষেপ বিন্দু হতে যথাক্রমে 10, 20 মি. দূরত্বে এবং 3 মিটার ও 4 মি. খাড়া দূরত্বে অবস্থিত। প্রক্ষেপ বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।

Ans. 23.84 মি/সে, $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণে।

07. একটি খাড়া দণ্ড AB তার পাদবিন্দুগামী অনুভূমিক তলে অবস্থিত তলে O বিন্দুতে θ কোণ ধারন করে। O বিন্দু হতে দুটি কণা একই সময়ে অনুভূমিক তলের সাথে α ও β কোণে নিক্ষিপ্ত হল যেন একই সময়ে প্রথমটি দণ্ডের শীর্ষে এবং দ্বিতীয়টি দণ্ডের পাদদেশে আঘাত করে। প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha - \tan\beta = \tan\theta$।

08. u বেগে সম্মুখদিকে এবং পশ্চাদদিকে চলন্ত কোন ট্রাক হতে নিক্ষিপ্ত গুলির অনুভূমিক পাল্লা যথাক্রমে R এবং S। দেখাও যে, গুলির প্রক্ষেপ কোণ $\tan^{-1}\left[\frac{g(R-S)^2}{4u^2(R+S)}\right]$।

09. একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হল যেন 7 মিটার ব্যবধানে অবস্থিত 3.5 মি. উচ্চ দুইটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে চলে যায়। বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর।

Ans. $7\sqrt{3}$ মি.

SELF TEST [MCQ]

01. অনুভূমিক দিকে $49ms^{-1}$ বেগে চলন্ত একটি বেলুন হতে একখন্ড পাথর ফেলে দেওয়া হল এবং 4 সেকেন্ড পরে তা মাটিতে গিয়ে পড়ল। মাটিতে পতনকালে তার বেগ-

A. 62.75 B. 63.75
C. 66.75 D. $61.75\ ms^{-1}$

02. একটি দুর্গের 490 মিটার দূর হতে 45° উন্নতিতে একটি কামানের গোলা ছোড়া হল। দুর্গটি যদি 49 মিটার উঁচু হয় এবং কামানের গোলা যদি দুর্গটির শীর্ষে আঘাত করে তবে কামানের গোলার আদিবেগ-

A. 72 B. 73
C. 74 D. $75ms^{-1}$

03. পৃথিবীপৃষ্ঠে মাধ্যাকর্ষণ শক্তি চন্দ্রপৃষ্ঠের মাধ্যাকর্ষণ শক্তির ছয়গুণ। পৃথিবীতে যে রাইফেলের পাল্লা 1000 মিটার, চন্দ্রপৃষ্ঠে তার পাল্লা কত হবে?

A. 5000 m B. 4000 m
C. 6000 m D. 700 m

04. ভূমিতে পতিত একটি বোমা ফাটলে তার কণাগুলো u গতিবেগে ছুটতে থাকে। ভূমিকর যে অংশে নিয়ে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়বে তার ক্ষেত্রফল-

A. $\frac{\pi u^4}{g}$ B. $\frac{\pi u^4}{g^2}$
C. $\frac{\pi u^2}{g^2}$ D. $\frac{u^4}{g^2}$

05. একটি প্রক্ষেপকের সর্বোচ্চ পাল্লা 200m। ইহা সর্বোচ্চ কত উচ্চতা অর্জন করে?

A. 25m B. 50m
C. 75m D. 100m

06. একই আদিবেগ সম্পন্ন দুইটি প্রক্ষেপকের অনুভূমিক পাল্লা সমান। একটি নিক্ষেপন কোণ 20° হলে অপরটির নিক্ষেপন কত?

A. 70° B. 60°
C. 80° D. 160°

07. অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে $24ms^{-1}$ বেগে একটি বস্তু শুন্যে প্রক্ষিপ্ত হল। কত বেগে খাড়া উর্ধ্বদিকে নিক্ষিপ্ত হলে সর্বাধিক উচ্চতা একই হবে?

A. $12\sqrt{2}ms^{-1}$ B. $12ms^{-1}$
C. $10ms^{-1}$ D. $12\sqrt{3}ms^{-1}$

08. সর্বাধিক পাল্লা R হবার জন্য সর্বাধিক উচ্চতা হবে-

A. R/2 B. R/5
C. R D. R/4

09. α কোণে নিক্ষিপ্ত একটি গুলির আনুভূমিক পাল্লা R এবং উড্ডয়নকাল T হলে tan α এর মান হবে-

A. $\frac{5R}{T}$ B. $\frac{9.8T^2}{2R}$
C. $\frac{5T^2}{R}$ D. $\frac{9.8T^2}{R}$

10. t সময় অন্তে একটি প্রক্ষেপক এর বিচরণ পথের P বিন্দুতে পৌঁছে। আরও t' সময়ে শেষে তা P বিন্দুগামী অনুভূমিক সমতলে ফিরে আসে। P বিন্দুর উচ্চতা কত?

A. $\frac{1}{2}gtt'$ B. $\frac{1}{2}g(t+t')$
C. $\frac{1}{2}g(t-t')$ D. $\frac{1}{2}gt^2$

11. 2.25m উচ্চতা হতে একজন খেলোয়াড় একটি টেনিস বল অনুভূমিক... নিক্ষেপ করে এবং তা খেলোয়াড় হতে 15m দূরে ভূমিকে আঘাত ক... বলটি যদি খেলোয়াড় হতে 10m দূরে একটি জালকে স্পর্শ করে ত... জালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

A. 1.5m B. 1.25m
C. 2m D. 1m

12. কোন পাহাড়ের শীর্ষদেশ হতে ভূমির সমান্তরালে $50ms^{-1}$ বেগে নি... একটি পাথর এর পাদদেশ হতে 350m দূরে ভূমিতে পতিত ... পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

A. 220m B. 230m
C. 240.1m D. 300m

13. ভূমি থেকে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 4 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দু ... 78.4m দূরে ভূমিতে আঘাত করে। নিক্ষেপন বেগের মান নির্ণয় কর।

A. $25ms^{-1}$ B. $26ms^{-1}$
C. $27ms^{-1}$ D. $27.72ms^{-1}$

14. একটি বস্তু u বেগে অনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষেপ করা ... অনুভূমিকের পাল্লা R এবং সর্বাধিক উচ্চতা H হলে নিচের কোনটি স...

A. $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ B. $8gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$
C. $4gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$ D. None

15. অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত কোন বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা এর সর্বোচ্চ উচ্চ... তিনগুণ হলে বিচরণকাল-

A. $\frac{4u}{5g}$ B. $\frac{8u}{5g}$
C. $\frac{2u}{g}$ D. None

16. একটি মার্কিন যুদ্ধ বিমান 700 km/h বেগে আনুভূমিক ভাবে ... সময় একটি শত্রু ঘাটিকে লক্ষ করে বোমা ছেড়ে দিল। বিমানটি ভূ... থেকে 1500 m উপরে ছিল। যেই মুহূর্তে বোমা ছাড়ছিল শত্রু ঘাটি ... থেকে 3000 মি. দূরে থাকলে বোমা পড়বে কি?

A. হ্যাঁ B. না
C. বলা সম্ভব নয় D. ঘাটি থেকে আগেই বোমা বিস্ফোরিত হ...

OMR

01. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	05. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	09. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13. Ⓐ ...
02. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	06. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14. Ⓐ ...
03. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	07. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15. Ⓐ ...
04. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	08. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12. Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16. Ⓐ ...

Correct Answer

16.B	15.B	14.A	13.D	12.C	11.B	10.A	[illegible]
08.D	07.A	06.A	05.B	04.B	03.C	02.B	[illegible]

বিবিধ অধ্যায়

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

একটি ওজনবিহীন তারের সাথে 3 kg ও 2 kg ভরের দুইটি বস্তু একটি স্থির পুলির উপর দিয়ে অবাধে ঝুলছে। গতি শুরু হওয়ার 5 sec পর রশিটি কেটে দিলে হালকা বস্তুটি আর কত উপরে উঠবে? [15-16]

Solve ত্বরন $f = \left(\frac{3-2}{3+2}\right) \times 9.8 = 1.96\ ms^{-2}$

$v_0 = 0 + (1.96 \times 5) = 9.8ms^{-1}$

ধরি, তারটি ছিড়ে গেলে হাল্কা বস্তুটি h উচ্চতা উঠে থেমে যায়।

$v^2 = v_0^2 - 2gh$

$\therefore 0^2 = (9.8)^2 - 2.9.8.h$

$\Rightarrow h = 4.9m$ **Ans.**

10. কিঃ গ্রাঃ ভরের একটি বস্তু অনুভূমির সঙ্গে 60° একটি মসৃণ তলের উপর পিছলাইয়া পড়িতেছে। বস্তুটির ত্বরণ নির্ণয় কর এবং বস্তুটির সঙ্গে তলের প্রতিক্রিয়া বাহির কর। [95-96]

Solve বস্তুর ত্বরণ $= g\sin60°$

$= 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8.49\ ms^{-2}$

তলের প্রতিক্রিয়া, $R = mg\cos60°$

$= 10 \times 9.8 \times \frac{1}{2} = 49\ N$ **Ans.**

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

যদি 5 কেজি ভরের একটি বস্তু মধ্যাকর্ষণের প্রভাবে 40 মি./সে. বেগে নীচে পড়ে তবে যে বল তাকে 10 মিটার দুরত্বে থামিয়ে দেবে তার পরিমাণ হবে: [05-06]

A. 449 N B. 99 N
C. 49 N D. 944 N

Ans A Solve $f = \frac{40^2}{2\times10} = 80$

$\Rightarrow F = 5\ (9.8 + 80) = 449\ N$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 4 গ্রাম ভরের একটি বস্তু 6 মিটার উচ্চ স্থান হতে পতিত হয়ে কাদায় 5 সে.মি. প্রবেশ করে স্থির হয়ে পড়ল। ভরটির উপর কাদার গড় ধাক্কার পরিমাপ কত? [16-17]

A. 18.973 N B. 9.486 N C. 4.7432 N
D. 2.3716 N E. 1.1856 N

Solve $mg\ (h+x) = Fx \ \therefore F = mg\left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$= 0.004 \times 9.8 \times \left(1 + \frac{6}{0.05}\right) = 4.7432\ N$ **Ans.**

02. 36kg ভরের একটি বস্তুর উপর কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করলে এক মিনিটে এর বেগ ঘন্টায় 15km বৃদ্ধি পাবে? [14-15]

A. 6N B. 4N C. 2N
D. 2.5N E. 5N

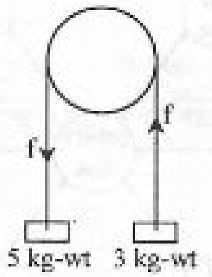
Ans D Solve $F = ma = 36 \times \frac{15km/h}{3.6 \times 60s} = 2.5N$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি পাতলা তারের দুই প্রান্তে সংযুক্ত 5 kg এবং 3 kg ভরের দুইটি বস্তু একটি পুলির উভয় পার্শ্বে অবাধে ঝুলছে 4 sec পর তারটি ছিঁড়ে গেল। হালকা ভরটি আর কতদূর উঠবে এবং আর কতক্ষণ পর হালকা ভরটি যাত্রাস্থলে ফিরে আসবে? [15-16]

A. None of them B. $\sqrt{5}$ sec
C. $(\sqrt{5} - 1)$sec D. $(\sqrt{5} + 1)$sec

Ans D Solve



সাধারণ ত্বরণ, $f = \frac{5-3}{5+3} \times 9.8 = 2.45ms^{-2}$

4 sec পরে বেগ $v = 0 + ft = 2.45 \times 4 = 9.8\ ms^{-1}$

ধরি হালকা ভরটি আরও h উচ্চতায় উঠবে।

$\therefore 0 = v^2 - 2fh$

$\therefore h = \frac{v^2}{2f} = \frac{(9.8)^2}{2 \times 2.45} = 19.6\ m$

আবার, $h = -vt + \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow 19.6 = -9.8t + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$

$\Rightarrow 2 = -t + \frac{1}{2}t^2$

$\Rightarrow t^2 - 2t - 4 = 0$

$\therefore t = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

কিন্তু $t \neq 1 - \sqrt{5}$ $[\because 1 - \sqrt{5} < 0]$ $\therefore t = (\sqrt{5} + 1)$ sec.

১০ম অধ্যায়	বিস্তার পরিমাপ ও সম্ভাবনা (Measures of Dispersion & Probability)
দ্বিতীয় পত্র	

A-বিস্তার পরিমাপ

➲ **পরিসংখ্যান:**

গুরুত্বপূর্ণ তত্ত্বাবলি:

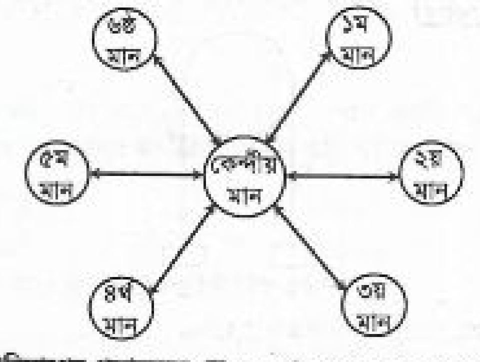
☐ সংখ্যা তত্ত্বের যে বিজ্ঞান তাই হল পরিসংখ্যান। মানব সভ্যতার উষালগ্ন থেকে বর্তমান পর্যন্ত জ্ঞান বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার সাথে স্বতন্ত্র বিজ্ঞান হিসাবে পরিসংখ্যান কাজ করে আসছে। বিভিন্ন উপাত্তের উপস্থাপনে পরিসংখ্যান ব্যাপকভাবে প্রায় সকল ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়।

☐ **উপাত্তের বিস্তার (Dispersion of Data):** যেমন একটি উপাত্ত- পাঁচ জন ব্যক্তির আয়ু-

A	B	C	D	E
56	58	60	62	64

উপাত্ত থেকে দেখা যায় যে, উপাত্তের মান গুলির কেন্দ্রের দিকে ঝুকে থাকার একটি প্রবণতা বিদ্যমান থাকে। এই ঝোঁককেই বলা হয় কেন্দ্রীয় প্রবণতা। যেমন গড়, মধ্যমা বা প্রচুরক হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। উপরের উপাত্তের মধ্যে কেন্দ্রীয় মান থেকে দূরে যাবারও একটা প্রবণতা থাকে এটি ই হল বিস্তার (Dispersion) যেমন উপরের A এর সাধারণ বিস্তার হল '4'। কারণ কেন্দ্রীয় প্রবণতা 60 এবং A এর মান ব্যবধান 4।

➲ **উপাত্তের বিস্তার পরিমাপ (Measures of dispersion of data):** সাধারণত কোন নিবেশনের বিস্তার পরিমাপ বলতে নিবেশনের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানগুলির ব্যবধানকেই বোঝায়।



➲ **বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ (Type of measares of dispersion):**



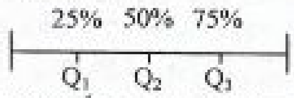
➲ **পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ (Absolute measures of dispersion):** কোন উপাত্তের কেন্দ্রীয় মান হতে অন্যান্য মানসমূহের ব্যবধানের গড় যা উপাত্তের মানসমূহের মূল এককে প্রকাশিত হয়, তাই পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ। পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ চার প্রকার। যথা:-

01. পরিসর (Range): অশ্রেণিবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে, কোন উপাত্তের বৃহত্তম মান x_n এবং ক্ষুদ্রতম মান x_1 হলে পরিসর $R = (x_n - x_1)$ অথবা $R = \ldots$ আর, শ্রেণীবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে, সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা এবং সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমার পার্থক্য কে পরিসর বলে। অর্থাৎ সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা L_n এবং সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা L_1 হলে, পরিসর $R = (L_n \sim L_1)$ অথবা $L_n - L_1$

02. গড় ব্যবধান (Mean Deviation): কোন উপাত্তের মানগুলি হতে তাদের কেন্দ্রমানের (গড়/মধ্যমা/প্রচুরক) ব্যবধানের পরমমানের সমষ্টিকে মোট উপাত্ত সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ কেন্দ্র মান হতে গড় ব্যবধান বলে।

03. পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation): উপাত্তের মানগুলি থেকে গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে উপাত্তের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তার ধনাত্মক বর্গমূলকে পরিমিত ব্যবধান বলে।

04. চতুর্থক ব্যবধান (Quartile Deviation): উপাত্তের মানগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে যে মানগুলি উপাত্তের মানকে সমান চার ভাগে ভাগ করে সেগুলিই চতুর্থক। চতুর্থক তিনটি-



যথা- ১ম, ২য় ও ৩য় চতুর্থক। এদেরকে যথাক্রমে Q_1, Q_2 ও Q_3 দ্বারা প্রকাশ করা হয়। Q_1 উপাত্তকে 1:3, Q_2 উপাত্তকে 2:2 এবং Q_3 উপাত্তকে 3:1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

এখানে, চতুর্থক ব্যবধান $QD = \frac{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

➲ **আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative measures of Dispersion):** কোন উপাত্তের পরম/অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ এবং ঐ পরম বিস্তার পরিমাপের সাথে সংশ্লিষ্ট কেন্দ্রীয় মানসমূহের যোগফলের অনুপাতকে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ বলে।

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ চার প্রকার। যথা-

1. **পরিসরাঙ্ক (Coefficient of range):** কোন উপাত্তের পরিসরকে তার বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে পরিসরাঙ্ক বলে।
2. **গড় ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of mean deviation):** কোন নিবেশনের গড় ব্যবধান এবং ঐ গড় ব্যবধান নির্ণয়ে সংশ্লিষ্ট মধ্যক মানের (গড় বা মধ্যমা বা প্রচুরক) অনুপাত কে গড় ব্যবধানাঙ্ক বলে।
3. **বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Variation):** কোন উপাত্তের পরিমিত ব্যবধান ও গাণিতিক গড়ের অনুপাতকে বিভেদাঙ্ক বলে। একে শতকরায় প্রকাশ করা হয়।
4. **চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation):** কোন উপাত্তের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থকের পার্থক্যকে উহাদের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়। তাই চতুর্থক ব্যবধানাংক।

➲ **ভেদাংক (Variance):** পরিমিত ব্যবধানের বর্গকেই ভেদাংক বলা হয়ে থাকে। অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধান σ হলে ভেদাঙ্ক হল σ^2।

❖ **প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:**

☐ **গড় ব্যবধান নির্ণয়:**

কেন্দ্রমান হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে	শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে
গড় হতে নির্ণীত ব্যবধান	$MD_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$MD_{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - \bar{x}$
মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$MD_{me} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - M_e \rvert$	$MD_{me} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - M$
প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান	$MDm_o = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - M_o \rvert$	$MDm_o = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - M$

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়:

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান
পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ (তাত্ত্বিক সূত্র)
$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$ (গণনা সূত্র)
শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে পরিমিত ব্যবধান
পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \bar{x})^2}$ (তাত্ত্বিক সূত্র)
$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f_i x_i\right)^2}$ (গণনা সূত্র)

চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয়:

চতুর্থক ব্যবধান $QD = \left(\frac{Q_3 - Q_1}{2}\right)$

অশ্রেণিকৃত কোনো নিবেশনের i-তম চতুর্থক, $Q_i =$

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{N\times i}{4}\right)\text{তম পদ} + \left(\frac{N\times i}{4}+1\right)\text{তম পদ}}{2}, & \text{যখন N জোড়} \\ \dfrac{(N+1)\times i\ \text{তম পদ}}{4}; & \text{যখন N জোড়} \end{cases}$$

শ্রেণিকৃত কোনো নিবেশনের i-তম চতুর্থক, $Q_i = L_i + \dfrac{\frac{N\times i}{4} - f_c}{f_n} \times c$

যেখানে, L_i = i-তম চতুর্থক শ্রেণির নিম্নসীমা।

f_c = i-তম চতুর্থক শ্রেণির পূর্ব শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা।

f_n = i-তম চতুর্থক শ্রেণির গণসংখ্যা।

C = চতুর্থক শ্রেণির শ্রেণি ব্যবধান।

পরিসরাংক নির্ণয়:

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে বৃহত্তম মান x_n এবং ক্ষুদ্রতম মান x_1 হলে পরিসরাঙ্ক, $CR = \left(\frac{x_n - x_1}{x_n + x_1}\right) \times 100$

আর, শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে সর্বপ্রথম শ্রেণির নিম্নসীমা L_1 এবং সর্বশেষ শ্রেণির উচ্চসীমা L_n হলে পরিসরাঙ্ক, $CR = \frac{L_n - L_1}{L_n + L_1} \times 100$

গড় ব্যবধানাংক নির্ণয়: কোন উপাত্তের কেন্দ্রীয় মানের গড়, মধ্যমা ও প্রচুরক থেকে নির্ণীত গড় ব্যবধান যথাক্রমে $MD(\bar{x})$, MD (me) ও $MD(m_o)$ হলে,

গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধাঙ্ক, $CMD(\bar{x}) = \frac{MD(\bar{x})}{\bar{x}} \times 100$

মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধাঙ্ক, $CMD\ (me) = \frac{MD\ (me)}{Me} \times 100$

প্রচুরক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধাঙ্ক, $CMD\ (m_o) = \frac{MD\ (m_o)}{M_o} \times 100$

বিভেদাঙ্ক বা ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয়:

বিভেদাঙ্ক $= \left(\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\right)$ | $\bar{x}$ = গাণিতিক গড়, σ = পরিমিত ব্যবধান

চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয়:

$CQD = \left(\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100\right)$ — Q_1 = প্রথম চতুর্থক। Q_3 = তৃতীয় চতুর্থক।

□ **ভেদাংক নির্ণয়:**

অশ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক
ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (তাত্ত্বিক সূত্র)
ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ (গণনা সূত্র)
শ্রেণিকৃত উপাত্তের ক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক
ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \bar{x})^2$ (তাত্ত্বিক সূত্র)
ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f_i x_i\right)^2$ (গণনা সূত্র)

Calculator Type
বিস্তার পরিমাপ

তোমার Calculator গড়, পরিমিত ব্যবধান এগুলোর Answer নিমিষেই করে দিতে পারবে এবং অবশ্যই নির্ভুল পদ্ধতিতে।

আমরা নিচের অংকটার ক্ষেত্রেই গড় ও পরিমিত ব্যবধান দুই-ই বের করে দেখাচ্ছি:

নিম্নের গণসংখ্যা সারণী থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর:

শ্রেণি	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
গণসংখ্যা	10	20	30	40	50	60	70	80

আমাদের অংকটি মধ্যবর্তী এক ধাপেই গড়ও বের করা লাগবে। তাই আমরা এখানে দুটো বের করাই শিখিয়ে দিচ্ছি:

এখানে আমাদের নিচের দুটি Column এর Data input লাগবে।

শ্রেণি মধ্যবিন্দু (x_1)	গণসংখ্যা (f_i)
9.5	10
19.5	20
29.5	30
39.5	40
49.5	50
59.5	60
69.5	70
79.5	80

Model (f_x – 100/570/MS)

Step-1: SD mode-এ প্রবেশ

Calculator এর ডান পাশে উপরের দিকে কোণায় ON চিহ্নিত বোতামে চাপ দিয়ে Calculator চালু করতে হবে। এরপর MODE চিহ্নিত বোতামে ২ বার চাপ দিলে display তে নিম্নরূপ চিত্র আসবে:

SD	REG	BASE
1	2	3

এরপর Calculator এ (1) বোতাম চাপ দিলে নিম্নরূপ display আসবে:

SD	D
	0

Step-2: Data input দেয়া

প্রথম Data টাই ধরি অর্থাৎ

শ্রেণি মধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
9.5	10

এটাকে

এভাবে লিখবঃ 9.5;10 এ চিহ্ন আনতে (Shift) [,] চাপলেই হবে।

লেখা শেষ হলে [M+] বোতাম চাপবে (১ বার!)। তাহলে হবে নিচের মতোঃ

SD	D
n =	10

এর অর্থ হলঃ 10টি data input দেয়া হল, অবাক হচ্ছ। আমরা তো 1টি data input দিলাম। আসলে গণসংখ্যা 10 মানে হল 9.5 আছে 10 বার একথা ভুলে যেওনা। এভাবে ২য় Data অর্থাৎ 19.5;20 input দাও। এবং আবার [M+] বোতাম চাপবে (১ বার!)। ঠিকভাবে input দিলে display হবে নিম্নরূপঃ

SD	D
n =	10

কারণ ১ম 10টা Data আর পরের 20টা Data মিলে মোট 30টা data input দিলাম।

এভাবে সবকটি data input দিতে থাক। সর্বশেষ Data অর্থাৎ 79.5;80 input দিলে এবং [M+] ১বার চাপলে display দেখাবে নিচের মতোঃ

SD	D
n =	360

এ 360-ই কিন্তু মোট গণসংখ্যা তাই এটাও Check করা হয়ে গেল।

Step-3: গড় নির্ণয়

data input দেয়া শেষ। এবার [A.C] বোতামে চাপ দাও। Screen Clear হয়ে যাবে।

এবার [SHIFT] [2] চাপলে হবে নিচের মতো দেখতেঃ

x̄	xσn	xσn – 1
1	2	3

[1] বোতামে চাপ দিলে হবে নিচের মতোঃ

x̄	SD	D
		0

এবার [=] বোতাম চাপলেই answer আসবেঃ 56.16666667

Step-4: পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়

উপরের কাজ শেষ করে আবার [AC] দিয়ে Screen Clear কর।

এবার [SHIFT] [2] চাপলে Screen হবে

x̄	xσn	xσn –1
1	2	3

এবার [2] বোতামে চাপ দিলে হবে নিচের মতোঃ

xσn	SD	D
		0

এবার [=] বোতাম চাপলেই answer আসবেঃ 19.72026594

কী? মিলেছে? এখন আর কি বস্তুর খাতা দেখতে হবে?

Model (f_x– 100/570/991ES)

ঝটপট বলছি, করে নাওঃ

শুরুতেই এক কাজ করে নাও এবং Calculator সারাজীবন এই form এ রাখবে।

[SHIFT] চেপে [MODE] চাপ, display আসবে নিম্নরূপঃ

1: Math IO	2: Line IO
3: Deg	4: Rad
5: Gra	6: Fix
7: Sci	8: Norm

এবার  display আসবে নিম্নরূপঃ

(এখানে press করো)

1: ab/c	2: d/c ▲
3: CMPLX	4: Rad
5: Disp	6: ◄CONT►

এবার [4] চাপলে display আসবে নিম্নরূপঃ

Frequency?	
1: ON	2: OFF

এরপর ❶ চাপ।

Step-1: STAT Mode-এ প্রবেশ

[MODE] চাপ দিলে Screen আসবে নিচের মতোঃ

1: COMP	2: CMPLX
3: STAT	4: BASE-N
5: EQN	6: MATRIX
7: TABLE	8: VECTOR

STAT Mode এ প্রবেশের জন্য ❸ চাপ। নিচের মতো। display আসবে

1: 1-VAR	2: A + BX
3: – + CX²	4: lnX
5: e^x	6: A.B^X
7: A.X^B	8: 1/X

❶ চাপলে হবে নিম্নরূপঃ

	STAT X	D freq
1	▒▒	
2		
3		

Step-2: DATA input দেওয়াঃ

কালো Shaded অংশে আমাদের অংকে প্রদত্ত Table টার মতো data input দাও। Display উপরের অবস্থাতে থাকতেই লেখ 9.5 এবং [=] চাপ। এবার  (এখানে press করো) button এর প্রথমে ডানে চেপে তারপর উপরে চেপে Shaded অংশ FREQ এর নিচে নাও। Shaded দেখতে হবে নিম্নরূপঃ

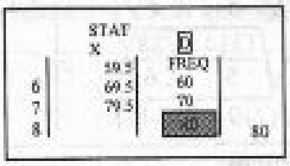
	STAT X	D freq
1	9.5	▒▒
2		
3		1

এবার ❶ ⓪ চাপ এবং [=] চাপার পর Screen হবে পাশের চিত্রের মতো

	STAT X	D freq
1	9.5	10
2		▒▒
3		

এখানে Shaded bar টাকে  button এর সাহায্যে Mouse এর

Cursor এর মতো সরাও এবং অবিকল আমাদের Table এর মতো কর। সব Data input দেয়া শেষ হলে Screen টি হবে পরবর্তী পৃষ্ঠার চিত্রের মতো:



সব fillup করা শেষ হলে [AC] দিয়ে Screen Clear কর।

Step-3: গড় ($\bar{x}$) এবং পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation, SD) নির্ণয়:

এবার [SHIFT] [1] চাপলে display আসবে নিচের মতো:

1: Type	2: Data
3: Edit	4: Sum
5: Var	6: Min Max
7: Distr	

⑤ চাপলে display আসবে নিম্নরূপ:

1:n	2:$\bar{x}$
3:xσn	4:xσn−1

গড় চাইলে ← → পরিমিত ব্যবধান চাইলে

② চাপলে display হবে এরকম:

STAT	D
$\bar{x}$	0

[=] চাপলে Ans. আসবে 56.166....

③ চাপলে display হবে এরকম:

xσn STAT	D
	0

[=] চাপলে unswer. আসবে 19.72

বিস্তারের গাণিতিক সমস্যা সমূহকে নিম্নোক্ত Type ভাগ করা যায়।

Type-01

গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাংক নির্ণয়:

Ex-01 10 জন শ্রমিকের বয়স হলো 18, 20, 35, 55, 38, 24, 45, 85, 37, 53 প্রদত্ত উপাত্তের গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, উপাত্তের গড় হতে নির্ণীত গড় ব্যবধান,

$MD_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$ যেখানে গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

গণনা সারণি

x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
18	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $= \frac{410}{10} = 41$	18 − 41 = −23	23
20		20 − 41 = −21	21
35		35 − 41 = −6	6
55		55 − 41 = 14	14
38		38 − 41 = −3	3
24		24 − 41 = −17	17
x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
45		45 − 41 = 4	4
85		85 − 41 = 44	44
37		37 − 41 = −4	4
53		53 − 41 = 12	12
$\Sigma x_i = 410$			$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 148$

অতএব, গড় ব্যবধান $MD_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \left(\frac{1}{10} \times 148\right) = 14.8$ **Ans.**

Ex-02 নিচের নিবেশনের (সারণি) গড় থেকে গড় ব্যবধান নির্ণয় কর:

শ্রেণিব্যাপ্তি	গণসংখ্যা
20 − 29	7
30 − 39	11
40 − 49	15
50 − 59	19
60 − 69	5
70 − 79	3

সমাধান: গড় ব্যবধান নির্ণয়ের সারণি নিম্নরূপ:

শ্রেণিব্যাপ্তি	গণসংখ্যা f_i	শ্রেণি মধ্যমান x_i	$f_i x_i$	$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
20 − 29	7	24.5	171.5	46.67	22.17	155.19
30 − 39	11	34.5	379.5		12.17	133.87
40 − 49	15	44.5	667.5		2.17	32.55
50 − 59	19	54.5	1035.5		7.83	148.77
60 − 69	5	64.5	322.5		17.83	89.15
70 − 79	3	74.5	223.5		27.83	83.49
	$N = \Sigma f_i = 60$		$\Sigma f_i x_i = 2800$			$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 643.02$

গড় থেকে নির্ণীত গড় ব্যবধান, $MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i|x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{643.02}{60} = 10.72$

$\therefore$ গড় ব্যবধান = 10.72 **Ans.**

Ex-03 নিম্নের উপাত্ত হতে মধ্যমা ও প্রচুরক হতে গড় ব্যবধান ও গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।

x:	2	4	6	8	10
f:	1	4	6	4	1

সমাধান: মধ্যমা ও প্রচুরক নির্ণয় সারণি:

x	f	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
2	1	1
4	4	5
6	6	11
8	4	15
10	1	16

এখানে, n = 16

অর্থাৎ, মধ্যমা = $\frac{16}{2}$-তম পদের বিপরীত মান = 6 এবং প্রচুরক = 6. [যেহেতু 6 সংখ্যাটি বেশিবার ঘটেছে]

এক্ষেত্রে মধ্যমা ও প্রচুরক উভয়ই সমান অর্থাৎ গড় ব্যবধান উভয় ক্ষেত্রে একই হবে।

$\therefore$ গড় ব্যবধান, $MD = \frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16} f_i\,|x_i - 6|\right)$

$= \frac{1}{16}(1|2-6| + 4|4-6| + ... + 1|10-6|) = \frac{24}{16} = 1.5$

এবং গড় ব্যবধানাঙ্ক, $CMD = \frac{MD}{6} \times 100 = \frac{1.5}{6} \times 100 = 25\%$ **Ans.**

Practice Problem:

01. −2a, −a, 0, a, 2a সংখ্যা গুলির গড় ব্যবধান হিসাব কর। Ans. $\frac{6a}{5}$

Type-02

পরিমিত ব্যবধান এবং বিভেদাংক নির্ণয়:

Ex-01 নিচের তথ্য ছক হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর:

শ্রেণি	গণসংখ্যা
0 – 5	5
5 – 10	12
10 – 15	20
15 – 20	8
20 – 25	3

সমাধান: এখানে শ্রেণিগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে 2.5, 7.5, 12.5, 17.5, 22.5; প্রতিটি শ্রেণী ব্যবধান = 5.

তাই a = 12.5 এবং c = 5 নিয়ে নতুন চলক $u = \frac{x - 12.5}{5}$ প্রবর্তন করি।

নিচের সারণিতে ফল সংকলন করা হলো।

সারণি

শ্রেণী	গণসংখ্যা f_i	মধ্যবিন্দু x_i	$u_i = \frac{x_i - a}{c}$	f_iu_i	$f_iu_i^2$
0 – 5	5	2.5	–2	–10	20
5 – 10	12	7.5	–1	–12	12
10 – 15	20	12.5	0	0	0
15 – 20	8	17.5	1	8	8
20 – 25	3	22.5	2	6	12
	N = 48			$\Sigma f_iu_i = -8$	$\Sigma f_iu_i^2 = 52$

এখানে $\bar{u} = \frac{-8}{48} = -\frac{1}{6} = -0.16667;\ \frac{\Sigma f_iu_i^2}{N} = \frac{52}{48} = \frac{13}{12} = 1.08333$

অতএব $\sigma_u^2 = \frac{\Sigma f_iu_i^2}{N} - \bar{u}^2 = 1.08333 - 0.02777 = 1.05556.$

সুতরাং নির্ণেয় পরিমিত ব্যবধান $\sigma_x = c\sigma_u = 5\sqrt{1.05556} = 6.137$ (প্রায়)। **Ans.**

Ex-02 **কোনো কারখানার 32 জন শ্রমিকের বাৎসরিক অনুপস্থিতির আদর্শ বিচ্যুতির মান 5 দিন। শ্রমিকদের অনুপস্থিতির বর্গের সমষ্টি 1000 হলে, বিভেদাঙ্কের মান কত?**

সমাধান: ধরি, সংখ্যাগুলির চলক, x

আমরা জানি, $\sigma_x^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

$\Rightarrow (5)^2 = \frac{1000}{32} - \bar{x}^2$

$\Rightarrow \bar{x}^2 = \frac{1000 - 800}{32}$

$\Rightarrow \bar{x} = 2.5$

এখানে, $\sigma_x = 5$
$\Sigma x_i^2 = 100$
$n = 32$

সুতরাং, বিভেদাঙ্ক, $CV(x) = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{5}{2.5} \times 100 = 200\%$ **Ans.**

Ex-03 **একজন ছাত্রের চতুর্থ শ্রেণীর পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর যথাক্রমে 13, 16, 12, 14, 15, 18 হলে, প্রাপ্ত নম্বরের পরিমিত ব্যবধান হিসাব কর।**

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের তালিকা:

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	x_i^2
13	169
16	256
12	144
14	196
15	225
18	324
$\Sigma x_i = 88$	$\Sigma x_{i2} = 1314$

পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1314}{6} - \left(\frac{88}{6}\right)^2}$

$= \sqrt{(219 - 215.11)}$

$= \sqrt{3.89}$

$= 1.98$ **Ans.**

Practice Problem:

01. নিম্নের প্রদত্ত নিবেশন হতে পরিমিত ব্যবধান এবং বিভেদাংক নির্ণয় কর।

শ্রেণি	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 7[illegible]
গণসংখ্যা	5	10	15	20	10	5

Ans. 13.37, 33.11%

Type-03

চতুর্থক ব্যবধান এবং চতুর্থক ব্যবধানাংক নির্ণয়:

Ex-01 **15 জন শ্রমিকের দৈনিক খরচ এর উপাত্ত দেওয়া আছে, তাদের চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় কর। 20, 30, 15, 25, 22, 27, 15, 20, 35, [illegible] 32, 12, 30, 25, 17**

সমাধান: প্রথমে উপাত্তের মানগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাই, 12, [illegible] 15, 17, 20, 20, 22, 22, 25, 25, 27, 30, 30, 32, 35

এরপর Q_1 ও Q_3 এর মান বের করতে হবে।

এখানে, N = 15 (বিজোড়)

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ তম পদের মান $= \frac{(15+1)}{4}$ তম পদের মান = 4 তম পদের মান = 17

$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ তম পদের মান $= \frac{3(15+1)}{4}$ তম পদের মান = 12 তম পদের মান = 30

আমরা জানি, চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{30 - 17}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ **Ans.**

Ex-02 **নিম্নলিখিত উপাত্ত হতে চতুর্থক ব্যবধান এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

5, 7, 0, –3, 11, 25, 17, 4, 20, 26

সমাধান: প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই, – 3, 0, 4, 5, 7, 11, 17, 20, 25, 26

আমরা জানি, চতুর্থক ব্যবধান $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100$

এরপর Q_1 ও Q_3 হলো প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক।

যেহেতু, n = 10, জোড় সংখ্যা এবং ইহা 4 দ্বারা বিভাজ্য নয়। সেহেতু তথ্যসারিটিকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে নিয়ে প্রত্যেক অংশের মধ্যমা নিয়ে নিবেশনটির চতুর্থক নির্ণয় করা হলো।

$\therefore Q_1$ = ১ম অংশের $\frac{5+1}{2}$ তম পদ = ১ম অংশের ৩য় পদ = 4

Q_3 = ২য় অংশের $\frac{5+1}{2}$ তম পদ = ২য় অংশের ৩য় পদ = 20

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{20 - 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$ এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক

$\frac{20 - 4}{20 + 4} \times 100 = \frac{16}{24} \times 100 = 66.67\%$ (প্রায়) **Ans.**

Practice Problem:

নিম্নের ঘটন সংখ্যা বিন্যাস হতে চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উচ্চতা	58	59	60	61	62	63	64	65	66
ছাত্রের সংখ্যা	15	20	32	35	35	22	20	10	8

নিম্নের প্রদত্ত নিবেশন হতে চতুর্থক ব্যবধান এবং চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় কর।

শ্রেণি	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
গণসংখ্যা	4	5	7	12	20	15	8	2

Ans: 5.73, 13.16%

Type-04: ভেদাংক নির্ণয়

বি.দ্র: পরিমিত ব্যবধান এর বর্গই হল ভেদাংক।

Ex-01 **অনন্যাদের পরিবারের 5 জনের বয়স হলো যথাক্রমে 55, 45, 15, 7 ও 30 বছর হলে, বয়সের বিচ্যুতির পরিমাণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, বয়সের চলক, $x_i = 55, 45, 15, 7, 30$

এখানে, মোট সদস্য, $n = 5$

$\therefore \Sigma x_i = 55 + 45 + 15 + 7 + 30 = 152$ বছর

এবং $\Sigma x_i^2 = 55^2 + 45^2 + 15^2 + 7^2 + 30^2 = 6224$ বছর

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2 = \frac{6224}{5} - \left(\frac{152}{5}\right)^2$

$= 320.64$ বছর **Ans.**

Ex-02 **প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গড়, ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান: আমরা জানি, প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যা 1, 2 ...... n

এখন সংখ্যাগুলির যোগফল, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

আমরা জানি, গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{n(n+1)}{2.n} = \frac{n+1}{2}$

আমরা জানি, ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

এখন, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6.n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right]$

$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{4n+2-3n-3}{6}\right] = \frac{n^2-1}{12}$

$\therefore$ বিভেদাঙ্ক, $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}{\frac{n+1}{2}} \times 100$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \times 100$ **Ans.**

Ex-03 **একটি অফিসের এক দিনের টেলিফোন তথ্য সারণী নিম্নে দেওয়া হলো। পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় কর।**

টেলিফোন কলের দৈর্ঘ্য (মিনিটে)	$0 < l \le 5$	$5 < l \le 10$	$10 < l \le 5$	$15 < l \le 20$	$20 < l \le 60$	$60 < l \le 70$
সংখ্যা	4	15	5	2	0	1

সমাধান: পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের তালিকা:

টেলিফোন কলের দৈর্ঘ্য	গণসংখ্যা (f)	মধ্যবিন্দু (x)	fx	fx^2
$0 < l \le 5$	4	2.5	$4 \times 2.5 = 10$	$4 \times 6.25 = 25$
$5 < l \le 10$	15	7.5	112.5	843.75
$10 < l \le 15$	5	12.5	62.5	781.25
$15 < l \le 20$	2	17.5	35	612.5
$20 < l \le 60$	0	40	0	0
$60 < l \le 70$	1	65	65	4225
মোট	27	285	285	6487.5

$\therefore \Sigma fx^2 = 6487.5, \Sigma fx = 285, \Sigma f = 27$

ভেদাংক, $\sigma^2 = \frac{6487.5}{27} - \left(\frac{285}{27}\right)^2 = 128.85802$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{128.85802} = 11.35$ **Ans.**

Practice Problem:

01. নিম্নের গণসংখ্যা নিবেশন হতে মধ্যমা হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানাংকে নির্ণয় কর।

শ্রেণি	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
গণসংখ্যা	4	7	14	20	12	9	4

Ans. 220.82; 14.86

02. নিচের উপাত্ত হতে ভেদাংক নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	200–300	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800
গণসংখ্যা	12	18	36	24	10	8

Ans. 18124.142

Special Math

Ex-01 **4001, 4002, 4003, ..., 4030 সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর।**

সমাধান: মনে করি, $x_i = 4001, 4002, ..., 4030$ এবং $u_i = x_i - 4000$.

$\therefore u_1 = 1, 2, 3, 4, ..., 30.$

আমরা জানি, ভেদাংক মূল হতে স্বাধীন এবং প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক $= \frac{n^2-1}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভেদাংক $= \frac{30^2-1}{12} = \frac{900-1}{12} = 74.92$ (প্রায়) **Ans.**

Ex-02 **প্রথম n সংখ্যক জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক নির্ণয় কর।**

সমাধান: মনে করি, x_i চলক দ্বারা প্রথম n সংখ্যক জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা নির্দেশিত।

$\therefore x_i$ চলকের মানসমূহের সেট $= \{2, 4, 6, ..., 2n\}$

ধরি, $u_i = \frac{x_i}{2}$, তাহলে, u_i চলকের মানসমূহের সেট $= \{1, 2, 3, ..., n\}$

$\therefore u_i$ হচ্ছে প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যার ভেদাংক $= \frac{n^2-1}{12}$

আমরা জানি, ভেদাংক মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

$\therefore$ নির্ণেয় ভেদাংক $= 2^2 \times \frac{n^2-1}{12} = \frac{n^2-1}{3}$ **Ans.**

Ex-03 যদি চলক x প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার মান গ্রহণ করে তবে (2x − 1) এর ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধান: চলক x এর মানগুলির প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার গড়,

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+\ldots\ldots+n}{n} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

ভেদাংক, $V(x) = \frac{n^2-1}{12}$

ধরি, $y = 2x - 1$ তাহলে, $\bar{y} = 2\bar{x} - 1$ এবং

ভেদাংক, $V(y) = \Sigma(y-\bar{y})^2 = \Sigma(2x-1-2\bar{x}+1)^2 = 2^2\,\Sigma(x-\bar{x})^2$

$$\Rightarrow V(2x-1) = 4V(x) = 4 \times \frac{n^2-1}{12}$$

$\therefore$ (2x − 1) এর ভেদাংক $= \frac{n^2-1}{3}$ **Ans.**

Ex-04 কোন চলক প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার মান গ্রহণ করে এবং উহার গণসংখ্যা নিজ নিজ মানের সমান হলে ভেদাংক নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, চলক x এর মানগুলি প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যা এবং গণসংখ্যা f তাহলে,

x : 1, 2, 3, 4, ..., n

f : 1, 2, 3, 4, ..., n

$$\therefore \text{ গড়, } \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{1.1+2.2+3.3+\ldots\ldots+n.n}{1+2+3+\ldots\ldots+n}$$

$$= \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$$

$$\text{ভেদাংক, } \sigma^2 = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2$$

$$= \frac{1.1^2+2.2^2+3.3^2+\ldots\ldots+n.n^2}{1+2+3+\ldots\ldots+n} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3}{n(n+1)/2} - \frac{4n^2+4n+1}{9}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \times \frac{2}{n(n+1)} - \frac{4n^2+4n+1}{9}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{4n^2+4n+1}{9} = \frac{9n^2+9n-8n^2-8n-2}{18}$$

$$= \frac{n^2+n-2}{18}$$ **Ans.**

Practice Problem:

01. প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার ভেদাংক নির্ণয় কর। **Ans.** $\left(\frac{n^2-1}{3}\right)$

02. প্রথম n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার ভেদাংক 85 হলে n এর মান নির্ণয় কর। **Ans. 16**

03. 20, 25, 30 ...., 110 সংখ্যাগুলির ভেদাংক নির্ণয় কর। **Ans. 750.**

Type-05: সমন্বিত

Ex-01 কোন শ্রেণির 15 জন ছাত্রের বয়সের গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 10 ও 2; ঐ শ্রেণিতে 20 বছর বয়সী একজন নতুন ছাত্র ভর্তি হলে তাদের বয়সের গড় ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, x চলক 15 জন ছাত্রের বয়স গ্রহণ করে এবং তাদের বয়সের গড় $\bar{x}$

$$\therefore \text{ গড়, } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 10$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{15} x_i = 15 \times 10 = 150$$

$$\text{পরিমিত ব্যবধান} = 2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - (\bar{x})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - (10)^2 = 4 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} = 104 \Rightarrow \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 1560$$

$\therefore$ 20 বছর বয়সী একজন নতুন ছাত্র ভর্তি হলে তাদের বয়সের সমষ্টি

$$= \sum_{i=1}^{15} x_i + x_{16} = 150 + 20 = 170,$$

$$\text{বয়সের বর্গের সমষ্টি} = \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = \sum_{i=1}^{15} x_i^2 + x_{16}^2 = 1560 + 20^2 = 1960$$

এবং ছাত্রসংখ্যা = 15 + 1 = 16

$\therefore$ তাদের বয়সের গড় $= \frac{170}{16} = 10.625$ বছর

এবং পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\frac{1960}{16} - (10.625)^2} = \sqrt{9.61} = 3.1$ বছর **Ans.**

Ex-02 কোন তথ্যসারির 10টি সংখ্যার গড় ও ভেদাংক যথাক্রমে 20 ও 153.8; ঐ তথ্য সারিতে 15 ও 25 সংখ্যা দুইটি অন্তর্ভুক্ত করা হলে নতুন গড় ও ভেদাংক কত হবে?

সমাধান: ধরি, তথ্যসারির x চলকের n = 10টি সংখ্যার গড় = $\bar{x}$ এবং তাদের

$$\text{সমষ্টি} = \sum_{i=1}^{10} x_i \quad \therefore \text{ গড়, } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 20$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 20 \times 10 = 200$$

$$\text{ভেদাংক} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - (\bar{x})^2 = 153.8 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - (20)^2 = 153.8$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - 400 = 153.8 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 5538$$

$\therefore$ ঐ তথ্য সারিতে 15 ও 25 সংখ্যা দুইটি অন্তর্ভুক্ত করা হলে তাদের সমষ্টি

$$= \sum_{i=1}^{12} x_i = \sum_{i=1}^{10} x_i + x_{11} + x_{12} = 200 + 15 + 25 = 240$$

$$\text{তাদের বর্গের সমষ্টি} = \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + x_{11}^2 + x_{12}^2$$

$= 5538 + 15^2 + 25^2 = 6388$ এবং সংখ্যাগুলির সংখ্যা = 10 + 2 = 12

$\therefore$ নতুন গড় $= \frac{240}{12} = 20$ বছর এবং

$$\text{নতুন ভেদাংক} = \frac{6388}{12} - (20)^2$$

= 132.33 বছর **Ans.**

Ex-03 দুইটি সংখ্যার গড় 7 ও পরিমিত ব্যবধান 1 হলে সংখ্যা দুইটি কত?

সমাধান: মনে করি, সংখ্যা দুইটি x_1 ও x_2 তাহলে,

গড়, $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 7$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 14 \Rightarrow x_1 = 14 - x_2$ ... ... (i) এবং

পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x})^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - 7^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - 49 = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = 50$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 100 \quad \Rightarrow (14 - x_2)^2 + x_2^2 = 100$, [(i) হতে]

$\Rightarrow 196 - 28x_2 + x_2^2 + x_2^2 = 100$

$\Rightarrow 2x_2^2 - 28x_2 + 96 = 0 \Rightarrow x_2^2 - 14x_2 + 48 = 0$

$\Rightarrow (x_2 - 8)(x_2 - 6) = 0 \Rightarrow x_2 = 8, 6$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $x_1 = 14 - 8 = 6$, যখন $x_2 = 8$

এবং $x_1 = 14 - 6 = 8$ যখন $x_2 = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 6 ও 8. **Ans.**

Ex-04 50টি সংখ্যার গড় 2 ও ভেদাংক 9; ঐ তথ্যসারিতে আরও দুইটি সংখ্যা যোগ করা হলে সম্মিলিত গড় 2 এবং ভেদাংক $\frac{113}{13}$ হয়। নতুন সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান: 50টি সংখ্যার সমষ্টি = 50 × তাদের গড় = 50 × 2 = 100 এবং

50টি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি = 50 × (তাদের গড় + তাদের ভেদাংক)

$= 50(2 + 9) = 550$

আবার (50 + 2) অর্থাৎ 52টি সংখ্যার সমষ্টি = 52 × তাদের গড়

$= 52 \times 2 = 104$ এবং

52টি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি = 52 × (তাদের গড় + তাদের ভেদাংক)

$= 52\left(2 + \frac{114}{13}\right) = 560$

ধরি সংখ্যা দুইটি x ও y

$\therefore x + y = 104 - 100 \Rightarrow x + y = 4$

$\Rightarrow y = 4 - x$ ... ... (i) এবং

$x^2 + y^2 = 560 - 550 \Rightarrow x^2 + y^2 = 10$

$\Rightarrow x^2 + (4 - x)^2 = 10$

$\Rightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 = 10$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$

$\therefore$ (i) হতে পাই, $y = 4 - 1 = 3$,

যখন $x = 1$ এবং $x_1 = 4 - 3 = 1$ যখন $x = 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 1 ও 3. **Ans.**

Practice Problem:

01. দুইটি রাশির গড় ও ভেদাংক যথাক্রমে 10 এবং 38 হলে সংখ্যাদ্বয় এবং বিভেদাংক নির্ণয় কর। **Ans.** 16.16, 3.84, 61.6%

02. 4, 5, 8, 11 তথ্যসারির গড় ব্যবধান ও বিভেদাংক নির্ণয় কর। **Ans:** 2.5, 39.12%

03. দুই জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের 10 ইনিংসের স্কোর নিচে দেয়া হলো। ক্রিকেটারদ্বয়ের দক্ষতা তুলনা কর–

ক	114	45	0	31	75	102	198	8	0	7
খ	15	25	18	30	11	4	23	21	31	22

Ans: গড় বিবেচনা করে, ক > খ

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

MCQ Part

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. 2, 5, 9, 16 এর বিভেদাঙ্ক হলো- [17-18]

A. $\sqrt{\frac{55}{2}}\%$ B. $\sqrt{\frac{55}{128}}\%$ C. $\sqrt{\frac{1375}{8}}\%$

D. $\sqrt{2750}$ E. $\sqrt{\frac{2750}{8}}$

Ans **Blank** **Solve** বিভেদাঙ্ক $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$,

[এখানে, $\bar{x} = \frac{2 + 5 + 9 + 16}{4} = 8$]

$= \frac{\sqrt{\frac{(8-2)^2 + (8-5)^2 + (8-9)^2 + (8-16)^2}{4}}}{8} \times 100\% = \frac{25}{4}\sqrt{110}\,\%$

B সম্ভাব্যতা

এক নজরে এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

➲ সম্ভাব্যতা $= \frac{\text{সম্ভাব্য অনুকূল ঘটনার সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য মোট ফলাফলের সংখ্যা}}$

Example: ফলাফলের সংখ্যা n(S) এবং কোন A ঘটনার অনুকূল ঘটনা সংখ্যা n(A) হলে A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

Note: যে সকল ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা সমান তাদের সমসম্ভাব্য (Equiprobable) ঘটনা বলা হয়।

➲ **সম্ভাবনার আরোহী সংজ্ঞা:** কোনো একটি চেষ্টা অনেকবার পুনরাবৃত্তি করা হলে এর নমুনাক্ষেত্রের মোট ফলাফলের সংখ্যা n(S) খুব বেশি বা অসীম এবং ঐ নমুনাক্ষেত্রের কোনো ঘটনা A এর অনুকূলে ফলাফলের সংখ্যা n(A) হলে $\frac{n(A)}{n(S)}$ একটি স্থির রাশি হবে। এ স্থির রাশিটির সীমাস্থ মানকে ঐ ঘটনার আরোহী সম্ভাবনা বলে। এক্ষেত্রে, ঘটনা A এর সম্ভাবনা হবে,

$P(A) = \lim_{n(S) \to \infty} \frac{n(A)}{n(S)}$

➲ যে সকল ক্ষেত্রে ঘটনা ঘটতে পারে তাকে ঘটনজগত (Event space) বলে এবং পরীক্ষণে প্রাপ্ত সকল সম্ভাব্য স্বতন্ত্র ফলাফলের সেটকে নমুনা ক্ষেত্র (Sample space) বলে।

➲ সম্ভাব্যতার মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। অর্থাৎ $0 \le P(A) \le 1$। কোন নিশ্চিত ঘটনার সম্ভাব্যতা 1 (যেমন- মানুষ মরণশীল) এবং একেবারেই অনিশ্চিত বা কখনোই ঘটবে না এরকম ঘটনার সম্ভাব্যতা 0 (যেমন– মানুষ অমর)।

➲ একটি পরীক্ষণের নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n এবং পরীক্ষণ সর্বশেষে প্রাপ্ত প্রতিটি নমুনা বিন্দুতে মূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা r হলে, নমুনা ক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n^r$.

➲ একটি মুদ্রা n বার নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= 2^n$.

➲ একটি ছক্কা n বার নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= 6^n$.

- ঘটনা তিন ধরনের। যথাঃ
  - i. নিশ্চিত ঘটনাঃ $n(A) = n(S); P(A) = 1$
  - ii. অনিশ্চিত ঘটনাঃ $n(A) > 0; n(S) > 0; 0 < P(A) < 1$
  - iii. অসম্ভব ঘটনাঃ $n(A) = 0; P(A) = 0$

- দুইটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে যোগসূত্র $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  তিনটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে যোগসূত্র
  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
  দুইটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্র যোগসূত্র $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্র যোগসূত্র $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
  দুইটি স্বাধীন ঘটনার জন্য গুননসূত্র $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  দুইটি অধীন ঘটনার জন্য গুননসূত্র $P(A \cap B) = P(A) . P(B/A)$
  $= P(B) .P(A/B)$

- বায়েসের সূত্রঃ একটি ঘটনা X ঘটতে পারে যদি n সংখ্যক পরস্পর পৃথক (Mutually exclusive) ও সম্পূর্ণ (Exhaustive) ঘটনা $A_1, A_2 .... A_n$, এর মধ্যে একটি ঘটে। ধরা যাক, $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ সম্ভাব্যতা সমূহ এবং $P\left(\frac{X}{A_1}\right), P\left(\frac{X}{A_2}\right), ..., P\left(\frac{X}{A_n}\right)$ শর্তাধীন সম্ভাবনাসমূহের মান জানা আছে। তাহলে X ঘটনা ঘটেছে এই শর্তে কোন A_i ঘটনার শর্তাধীন সম্ভাব্যতা বা $P\left(\frac{A_i}{X}\right)$ এর মান নিম্নরূপঃ

$$P\left(\frac{A_i}{X}\right) = \frac{P(A_i)P\left(\frac{X}{A_i}\right)}{P(A_1)P\left(\frac{X}{A_1}\right) + P(A_2)P\left(\frac{X}{A_2}\right) + ... + P(A_n)P\left(\frac{X}{A_n}\right)}$$

[যেখানে $i = 1, 2 .... n$]

- কোন পরীক্ষায় 2টি ফলাফল (পাশ ও ফেল) থাকলে এবং 1 বার পাশ করার সম্ভাব্যতা p এবং 1 বার ফেল করার সম্ভাব্যতা q হলে, n সংখ্যক পরীক্ষায় সফলতার সম্ভাবনা, $P(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$
- একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা P(A) হলে, না ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A^C)$
- $P(A) + P(A^C) = 1$
- $P\left(\frac{B^C}{A^C}\right) = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}$ এবং $P\left(\frac{B^C}{A}\right) = 1 - P\left(\frac{B}{A}\right)$
- Card পরিচিতিঃ

01. Total number of cards = 52
02. এদের চারটি শ্রেণী আছেঃ
    - i. হরতন (হার্টস) → 13
    - ii. রুইতন (ডায়মন্ড) → 13
    - iii. ইস্কাবন (স্পেড) → 13
    - iv. চিরাতন (ক্লাবস) → 13
03. Colour: লাল → 26 (হরতন + রুইতন)
    কাল → 26 (ইস্কাবন + চিরাতন)
    52
04. 13টি কার্ড এর সমন্বয়ঃ
    Tecca → 1
    King → 1
    Queen → 1
    Jack → 1
    4টি + 9টি = 13টি
    ↓
    নম্বরযুক্ত Card

- মৌলিক সংখ্যাঃ (1 থেকে 100 এর মধ্যে)

মৌলিক	0-11	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	[illegible]
সংখ্যা	4	4	2	2	3	2	2	3	2	[illegible]

এই অধ্যায়ের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাসমূহকে নিম্নোক্ত Type-এ শ্রেণিভুক্ত করা যায়।

Type-01: নমুনাক্ষেত্র সম্পর্কিত সমস্যা

Ex-01 একটি সুষম মুদ্রা পরপর তিনবার টস করা হল। প্রতিটি টসেই ... পাওয়ার শর্তে 2 বা ততোধিক হেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত? কোন শর্ত ... না করা হলে, দুই বা ততোধিক হেড পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

Solⁿ: নমুনা ক্ষেত্রঃ

	H	T
HT	HTH	HTT
HH	HHH	HHT
TH	THH	THT
TT	TTH	TTT

প্রথম হেড পাওয়ার শর্তে নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{4}$

কোন শর্ত আরোপ না করে নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ex-02 6 জন বালিকা ও 5 জন বালক একটি সারিতে একত্রে দৈবভাবে ... দুইজন বালক পাশাপাশি বসেনি, এ সম্ভাবনা কত?

Solⁿ: বালক-বালিকাদের মোট $\lfloor 11$ ভাবে সাজানো যায় আবার, প্রদত্ত ...

নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{{}^7P_5 \times \lfloor 6}{\lfloor 11}$

Ex-03 এক ব্যক্তি 4টি ঠিকানায় 4টি চিঠি লেখে এবং চিঠিগুলো ... দৈবক্রমে ঢুকানো হলে সঠিক ঠিকানায় চিঠি পাঠাবার সম্ভাবনা কত?

Solⁿ: সর্বমোট উপায়ে চিঠি ঢুকাতে পারে $= \lfloor 4$ ভাবে। এর মধ্যে একটি সঠিক ...

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{1}{\lfloor 4}$

Ex-04 একটি ছক্কার গুটির সাথে এমনভাবে ভার বেঁধে দেওয়া হল যে ... সংখ্যা আসার সম্ভাবনা একটি বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনার ... গেল। ছক্কা একবার নিক্ষেপে 4 এর কম ফোটা আসার ঘটনা A হলে, ... নির্ণয় কর।

Solⁿ: এখানে, $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
প্রতিটি বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা = P
প্রতিটি জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা = 2P
$\therefore P(1) = P(3) = P(5) = P$
$P(2) = P(4) = P(6) = 2P$
শর্তানুযায়ী, $P + 2P + P + 2P + P + 2P = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{9}$
$\therefore P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = P + 2P + P = 4P = \frac{4}{9}$

For practice:

01. 1 হতে 200 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোর মধ্য হতে নিরপেক্ষভাবে যে ... একটিকে বাছাই করলে সেই সংখ্যাটি 3 অথবা 7 এর গুণিতক ... সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। Ans. [illegible]

Type-02 : Card সম্পর্কিত সমস্যা

Ex-01 এক প্যাকেট তাস হতে (ক) পুনঃস্থাপন করিয়া (খ) পুনঃস্থাপন না করিয়া 2টি তাস নেওয়া হল। 2টি তাসই রাজা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Solⁿ: পুনঃস্থাপন হলে / পুনঃস্থাপন না করা হলে } সম্ভাবনার গুণ সূত্র
পুনঃস্থাপন করা ⟶ স্বাধীন ঘটনা
পুনঃস্থাপন না করা ⟶ অধীন ঘটনা

(ক) প্যাকেটে মোট তাস 52টি এবং রাজা তাস 4টি।
ধরি, ঘটনা A = প্রথম তাসটি রাজা।
ঘটনা B = দ্বিতীয় তাসটি রাজা হবার সম্ভাবনা,

$$P(A)=\frac{^4C_1}{^{52}C_1}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

পুনঃস্থাপন পদ্ধতিতে দ্বিতীয় তাসটি উঠানোর আগে প্রথম তাসটি প্যাকেটে ফেরত দেওয়া হল। ফলে তাসের সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকে।

অতএব, দ্বিতীয় তাসটি রাজা হবার সম্ভাবনা, $P(B)=\frac{1}{13}$

এখন A ও B ঘটনা দু'টি স্বাধীন।
সুতরাং দুইটি তাসটি রাজা হবার সম্ভাবনা হবে,

$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)=\frac{1}{13}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{169}$ **Ans.**

(খ) পুনঃস্থাপন না করে ২য় তাসটি উঠানোর আগে প্যাকেটে মোট তাস থাকবে 51টি এবং রাজা তাস থাকবে 3টি। সুতরাং দ্বিতীয় তাসটি রাজা হওয়ার সম্ভাবনা হবে $P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$

∴ উভয় তাসই রাজা হওয়ার সম্ভাবনা হবে,

$P(A\cap B)=P(A).P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{13}\times\frac{1}{17}=\frac{1}{221}$ **Ans.**

For practice:

01. এক প্যাকেটে তাস থেকে একটি তাস দৈবভাবে নেওয়া হলো তাসটি হরতন বা টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? **Ans.** $\frac{4}{13}$

02. এক প্যাকেট তাস থেকে একটি তাস দৈবভাবে নেওয়া হল। তাসটি হরতন বা ইস্কাবন হবার হওয়ার সম্ভাবনা কত? **Ans.** $\frac{1}{2}$

Type-03 : অবর্জনশীল বা স্বাধীন ঘটনার সংযোগসূত্র সম্পর্কিত

Ex-01 $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{3}{4}$, A ও B স্বাধীন হলে $P(A\cup B)$ নির্ণয় কর।

Solⁿ: সকল স্বাধীন ঘটনাই অবর্জনশীল হয়,

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{4+9-3}{12}=\frac{5}{6}$ **Ans.**

Ex-02 এক প্যাকেট তাস হতে 2টি তাস দৈবভাবে টানা হল। তাস দু'টি হরতন বা রাজা হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Solⁿ: দুটি তাসই হরতন হওয়ার সম্ভাবনা $P(H)=\frac{^{13}C_2}{^{52}C_2}$

দুটি তাসই রাজা হওয়ার সম্ভাবনা $P(K)=\frac{^4C_2}{^{52}C_2}$

দুটি তাসই হরতন এবং রাজা হওয়ার সম্ভাবনা, $P(H\cap K)=0$

∴ তাস দুটি তনতন বা রাজা হওয়ার সম্ভাবনা

$P(H\cup K)=P(H)+P(K)=\frac{^{13}C_2}{^{52}C_2}+\frac{^4C_2}{^{52}C_2}=\frac{14}{221}$ **Ans.**

Ex-03 A ও B এর একটি অঙ্কের সমাধান করতে পাবার সম্ভাব্যতা যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$ তারা একত্রে অঙ্কটি সমাধানের চেষ্টা করলে অঙ্কটির সমাধান নির্ণয়ের সম্ভাব্যতা কত?

Solⁿ: দুইজনে একত্রে অঙ্কটি সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা $=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{4+3-1}{12}=\frac{1}{2}$ **Ans.**

For practice:

01. কোন বাণিজ্যিক প্রতিষ্ঠানের তিনটি পদের জন্য একজন প্রার্থী আবেদন করেছে। ঐ তিনটি পদে প্রার্থী সংখ্যা যথাক্রমে 3, 4, 2 হলে, ঐ প্রার্থীর অন্তত একটি পদে চাকরি পাওয়ার সম্ভাবনা কত? **Ans.** $\frac{3}{4}$

Type-04 : বর্জনশীল ঘটনার সংযোগসূত্র

Ex-01 কোন নির্বাচনে চারজন প্রার্থী A, B, C, D এর জয়ের সম্ভাবনা যথাক্রমে 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 নির্বাচনের পূর্বমুহূর্তে C তার প্রার্থীতা প্রত্যাহার করল। এখন অবশিষ্ট তিনজন প্রার্থীর জয়ের সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Solⁿ: C তার প্রার্থীতা প্রত্যাহার করলে তার জয়ের সম্ভাবনা 0.2, অবশিষ্টদের নিজ নিজ জয়ের সম্ভাবনা সম্ভাব্যতার অনুপাতে তাদের মধ্যে বর্ণিত হবে।

A এর জয়ের সম্ভাবনা $=\frac{0.4}{0.8}\times0.2+0.4=0.5$

B এর জয়ের সম্ভাবনা $=\frac{0.3}{0.8}\times0.2+0.3=0.375$

D এর জয়ের সম্ভাবনা $=\frac{0.1}{0.8}\times0.2+0.1=0.125$

Ans. 0.5; 0.375; 0.125

Ex-02 একটি ব্যাগে 4টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। একজন লোক নিরপেক্ষভাবে তিনটি বল উঠালেন। তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Solⁿ: ব্যাগ থেকে 3টি বল উঠালে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $={}^9C_3=84$
তিনটি বলই কালো হওয়ার পক্ষে অনুকূল উপাদান সংখ্যা $={}^5C_3=10$

∴ তিনটি বলই কালো হওয়ার সম্ভাবনা $=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$ **Ans.**

Ex-03 একটি পাত্রে 6টি সাদা এবং 9টি কালো বল আছে। একবারে 4টি করে (i) পুনঃস্থাপন সহকারে (ii) পুনঃস্থাপন ব্যতিরেকে দু'বার মোট 8টি বল উত্তোলন করা হল। প্রথম চারটি বল সাদা এবং দ্বিতীয় চারটি বল কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Solⁿ: i. পুনঃস্থাপন প্রক্রিয়ায় 4টি করে দুইবার বল নেওয়া হলে দ্বিতীয় নির্বাচনের পূর্বে বল ফেরত দেওয়ার ফলে পাত্রে বলের সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকবে। অর্থাৎ উত্তোলনদ্বয় পরস্পর স্বাধীন হবে।

নির্ণেয় সম্ভাবনা = P(১ম উত্তোলনে 4টি সাদা বল) × P(দ্বিতীয় উত্তোলনে 4টি কালো বল) $=\frac{^6C_4}{^{15}C_4}\times\frac{^9C_4}{^{15}C_4}=\frac{6}{5915}$

ii. পুনঃস্থাপন ব্যতিরেকে 4টি করে দুইবার বল উঠানো হলে দ্বিতীয় উত্তোলনের পূর্বে বল 4টি পাত্রে ফেরৎ দেওয়া হয় নাই সুতরাং পাত্রে বলের সংখ্যা পরিবর্তিত হলে পরবর্তীতে মোট বলের সংখ্যা হবে (15–4) = 11টি অর্থাৎ দ্বিতীয় উত্তোলন প্রথম উত্তোলনের উপর অধীন।

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা = P(১ম উত্তোলনে 4টি সাদা) × P(দ্বিতীয় উত্তোলনে 4টি কালো বল)

$=\frac{^6C_4}{^{15}C_4}\times\frac{^9C_4}{^{11}C_4}=\frac{3}{715}$ **Ans.**

For practice:

01. তিনটি লুডুর গুটি নিক্ষেপ করা হল। উপরের পৃষ্ঠের সংখ্যা তিনটির সমষ্টি 15 অপেক্ষা অধিক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। Ans. $\frac{5}{108}$

02. একটি বাক্সে 4টি লাল, 5টি নীল এবং 7টি সাদা রং এর বল আছে। দৈবচয়নে একটি বলের লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? Ans. $\frac{11}{16}$

Type-05 : স্বাধীন ঘটনার সম্ভাব্যতা

Ex-01 একটি বাক্সে 5টি লাল ও 10টি সাদা মার্বেল আছে। একটি বালক যেমন খুশি টানলে প্রতিবারের দু'টি ভিন্ন রংয়ের মার্বেল পাওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

Sol^n: যেমন খুশি টানলে প্রতিবারে দু'টি ভিন্ন রংয়ের মার্বেল পাওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{{}^5C_1 \times {}^{10}C_1}{{}^{15}C_2} = \frac{10}{21}$ Ans.

For practice:

01. একটি থলিতে 3টি সাদা ও 2টি কালো বল আছে। অপর একটি থলিতে 2টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। নিরপেক্ষভাবে প্রত্যেক থলি হতে একটি করে বল তোলা হল। দু'টি বলের মধ্যে অন্তত একটি সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। Ans. $\frac{5}{7}$

02. একটি ব্যাগে 5টি সাদা, 7টি লাল, ও 8টি কালো বল আছে। যদি বিনিময় না করে একটি একটি করে পরপর চারটি বল তুলে নেওয়া হয়, তবে সবগুলো বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? Ans. $\frac{1}{969}$

Type-06 : অধীন ঘটনার সম্ভাব্যতা

Ex-01 কোন বিদ্যালয় হতে জুনিয়র বৃত্তি পরীক্ষায় 10 জন অংশগ্রহণ করে। সকলেরই বৃত্তি পাওয়ার বা না পাওয়ার সম্ভাবনা সমান। ঐ বিদ্যালয় হতে কেবলমাত্র তিনজনের বৃত্তি পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

Sol^n: একজন বৃত্তি পাওয়ার সম্ভাবনা = একজন বৃত্তি না পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ 3 জনের বৃত্তি পাওয়ার ও 7 জনের বৃত্তি না পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^7} = \frac{1}{2^{10}}$

আবার, 10 জন হতে 3 জন নিয়ে দলের সংখ্যা $= {}^{10}C_3$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{{}^{10}C_3}{2^{10}} = \frac{15}{128}$ Ans.

For practice

01. একটি কলেজে একাদশ শ্রেণীর 40 জন ছাত্রের মধ্যে 20 জন ফুটবল খেলে, 25 জন ক্রিকেট খেলে এবং 10 জন ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে। তাদের মধ্য হতে দৈবচয়নে একজনকে নির্বাচন করা হল। যদি ছেলেটি ফুটবল খেলে তবে তার ক্রিকেট খেলার সম্ভাবনা কত? Ans. $\frac{1}{2}$

02. গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 40 জন গণিতে ফেল করে। উভয় বিষয়ে 10 জন ফেল করে। নিরপেক্ষভাবে একজন ছাত্রকে বাছাই করলে, তার পরিসংখ্যানে পাশ ও গণিতে ফেল করার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। Ans. $\frac{3}{20}$

Type-07 : বায়েসের উপপাদ্য সম্পর্কিত সমস্যা

Ex-01 দুইটি একই রকম বাক্সের ১মটিতে 4টি সাদা ও 3টি লাল এবং দ্বিতীয়টিতে 3টি সাদা ও 7টি লাল বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হল। ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল টানা হলে, বলটি সাদা হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। যদি বলটি সাদা হয়, তাহলে ১ম বাক্স নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Sol^n: ১ম বাক্স = A; ২য় বাক্স = B; সাদা বল = X.

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ এবং $P\left(\frac{X}{A}\right) = \frac{4}{7}, P\left(\frac{X}{B}\right) = \frac{3}{10}$

$\therefore P(X) = P(A).P\left(\frac{X}{A}\right) + P(B).P\left(\frac{X}{B}\right) = \frac{1}{2}.\frac{4}{7} + \frac{1}{2}.\frac{3}{10} = \frac{61}{140}$

$\therefore P\left(\frac{A}{X}\right) = \left(\frac{P(A).P\left(\frac{X}{A}\right)}{P(X)}\right) = \frac{\frac{1}{2}.\frac{4}{7}}{\frac{61}{140}} = \frac{40}{61}$ Ans.

For practice:

01. একটি বল্টু কারখানায় তিনটি মেশিনে A, B, C তে প্রতিদিন যথাক্রমে 2000, 2500, 4000 বল্টু উৎপাদন হয়। তিনটি মেশিনের উৎপাদিত বল্টুর মধ্যে যথাক্রমে 3%, 4% এবং 2.5% ত্রুটিপূর্ণ। যে কোন একদিনের উৎপাদন হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল্টু নিয়ে দেখা গেল, তা ত্রুটিপূর্ণ। বল্টুটি B মেশিনে উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাবনা কত? Ans.

02. দুইটি পাত্রের মধ্যে প্রথমটিতে 2টি লাল ও 3টি সাদা এবং দ্বিতীয়টিতে [illegible] লাল ও 5টি সাদা বল আছে। প্রথম পাত্র হতে যথেচ্ছভাবে একটি বল তুলিয়া দ্বিতীয় পাত্রে রাখা হয় এবং অতঃপর দ্বিতীয়টি হইতে একটি বল তোলা হয়। যদি উত্তোলিত বলটি লাল হয়, তবে প্রথম পাত্র হইতে দ্বিতীয় পাত্রে স্থানান্তরিত বলটি সাদা হইবার সম্ভাবনা কত? Ans.

বিবিধ সমস্যাবলি:

01. পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 1, 2, 3, 4, 5 সংখ্যাগুলো হতে দুই অংকবিশিষ্ট একটি সংখ্যা নেওয়া হল। (i) সংখ্যাটি যুগ্ম (ii) 5 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা কত?

Sol^n: নমুনাক্ষেত্রঃ

12	13	14	15
21	23	24	25
31	32	34	35
41	42	43	45
51	52	53	54

i. যুগ্ম সংখ্যা = ৪টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ Ans.

ii. 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা = 4টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা

$= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

বিকল্পঃ

i. P (জোড়) $= \frac{{}^2C_1 \times {}^4C_1}{{}^5P_2}$

$= \frac{2}{5}$

ii. P (5 দ্বারা বিভাজ্য)

$= \frac{{}^1C_1 \times {}^4C_1}{{}^5P_2} = \frac{1}{5}$ Ans.

02. একটি ঘটনার অনুকূল সুযোগ 4:3। অন্য একটি স্বাধীন ঘটনার প্রতিকূল সুযোগ 2:3। ঘটনাদ্বয়ের কমপক্ষে একটি ঘটনার সম্ভাবনা কত?

Sol^n: A, B হল উক্ত ঘটনাদ্বয়

$P(A) = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$ এবং $P(B^C)\ \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$

$\therefore P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

$= \frac{4}{7} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7}.\frac{3}{5} = \frac{20+21-12}{35} = \frac{29}{35}$ Ans.

0, 1, 2, 3, 4 অংকগুলির কোন অংক একাধিকবার ব্যবহার না করে 5 অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা গঠন করা হয়। গঠিত সংখ্যাটি 2 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

Solⁿ: 5 অংক বিশিষ্ট গঠিত মোট সংখ্যা $= (\lfloor 5 - \lfloor 4) = 96$টি

$\therefore$ এর মধ্যে 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা মোট

$= \lfloor 4 - \lfloor 3 + \lfloor 4 - \lfloor 3 + \lfloor 4 = 60$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{60}{96} = \frac{5}{8}$ **Ans.**

For practice

1. দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলো। উপরের পিঠের সংখ্যাগুলির যোগফল 5 এর কম বা বেশি হবার সম্ভাবনা কত? **Ans.** $\frac{8}{9}$

2. একটি পাত্রে 5টি লাল বল ও 7টি নীল বল আছে। পাত্র হতে নির্বিচারে 3টি করিয়া বল দুইবার লওয়া হলো। যদি প্রথম নির্বাচনের পর 3টি বল পাত্রে ফেরৎ দেয়া না হয় তবে প্রথম নির্বাচনে 3টি লাল বল এবং ২য় নির্বাচনে 3টি নীল বল পাওয়ার সম্ভাবনা কত? **Ans.** $\frac{5}{264}$

3. 5 জন বালক ও 3 জন বালিকার একটি দল থেকে 3 জনকে দৈবভাবে নির্বাচিত করা হলো। নির্বাচিতদের মধ্যে (i) কোন বালিকা না থাকার (ii) একজন বালিকা থাকার (iii) অন্ততঃ একজন বালিকা থাকার (iv) বড়জোড় একজন বালক থাকার (v) বালিকা বেশি থাকার সম্ভাবনা কত?

Ans. (i) $\frac{5}{28}$ (ii) $\frac{15}{28}$ (iii) $\frac{23}{28}$ (iv) $\frac{2}{7}$ (v) $\frac{2}{7}$

BUET, KUET, CUET & RUET
[বিগত প্রশ্ন ও সমাধান]

Written Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন পরিসংখ্যানে এবং 40 জন গণিতে ফেল করে, এবং উভয় বিষয়ে 10 জন ফেল করে। নিরপেক্ষভাবে একজন ছাত্রকে বাছাই করলে তার পরিসংখ্যানে পাশ ও গণিতে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা বের কর। [17-18]

Solⁿ অংকে ফেল করার সম্ভাবনা, $P(M) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$

পরিসংখ্যানে ফেল করার সম্ভাবনা, $P(S) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$

উভয় বিষয়ে ফেল করার সম্ভাবনা, $P(M \cap S) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ একজন ছাত্রের পরিসংখ্যানে পাশ এবং অংকে ফেল হওয়ার সম্ভাবনা,

$P(M - S) = P(M) - P(M \cap S)$

$= \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$ **Ans.**

02. একটি পাত্রে নয়টি বল আছে, যার মধ্যে দুটি লাল, তিনটি নীল এবং চারটি কালো। তিনটি বল পাত্রটি হতে দৈবভাবে নেওয়া হল। (ক) বল তিনটি ভিন্ন রংয়ের এবং (খ) বল তিনটি একই রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা কত? [16-17]

Solve

Red – 2
Blue – 3
Black – 4

(ক) সবগুলো ভিন্ন ভিন্ন হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{^2C_1 \times {^3C_1} \times {^4C_1}}{^9C_3} = \frac{2}{7}$

(খ) সবগুলো একই রঙের (নীল বা কালো, লাল ২টি আছে) হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{^3C_3}{^9C_3} + \frac{^4C_3}{^9C_3} = \frac{1}{84} + \frac{1}{21} = \frac{5}{84}$ **Ans.**

03. একটি বাক্সে সমাকৃতির 8টি লাল ও 3টি কালো বল আছে। আরেকটি বাক্সে 10টি লাল ও 2টি কালো বল আছে। একটি বাক্স লটারির মাধ্যমে নির্বাচিত করে তা হতে যদি একটি বল তোলা হয় এবং তা যদি লাল হয় তাহলে প্রথম বাক্সটি নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কত? [15-16]

Solve বায়েসের সূত্র অনুযায়ী, $P\left(\frac{B_1}{R}\right) = \frac{P(B_1).P\left(\frac{R}{B_1}\right)}{P(B_1).P\left(\frac{R}{B_1}\right) + P(B_2).P\left(\frac{R}{B_2}\right)}$

$= \left(\frac{\frac{1}{2}.\frac{8}{11}}{\frac{1}{2}.\frac{8}{11} + \frac{1}{2}.\frac{10}{12}}\right) \therefore P\left(\frac{B_1}{R}\right) = \frac{48}{103}$ **Ans.**

04. তিনটি একই রকমের বাক্সের প্রতিটিতে দুইটি একই রকমের ড্রয়ার আছে। প্রথম বাক্সের দুইটি ড্রয়ারের প্রতিটিতে একটি করে পেন্সিল, দ্বিতীয় বাক্সের প্রতি ড্রয়ারে একটি করে কলম এবং তৃতীয় বাক্সের একটি ড্রয়ারে একটি পেন্সিল ও আর একটি ড্রয়ারে একটি কলম আছে। লটারী করে একটি বাক্স নির্বাচন করা হল ও নির্বাচিত বাক্সের একটি ড্রয়ার খুলে পেন্সিল পাওয়া গেল। পেন্সিলটি যে প্রথম বাক্সের তার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [14-15]

Solve

১ম বাক্স থেকে 1টি পেন্সিল পাওয়ার সম্ভাব্যতা, $P(A_1)P\left(\frac{B}{A_1}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2}$

২য় বাক্স থেকে 1টি পেন্সিল পাওয়ার সম্ভাব্যতা, $P(A_2)P\left(\frac{B}{A_2}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{0}{2}$

৩য় বাক্স থেকে 1টি পেন্সিল পাওয়ার সম্ভাব্যতা, $P(A_3)P\left(\frac{B}{A_3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

১ম বাক্স থেকে পেন্সিল পাওয়ার সম্ভাব্যতা,

$$P\left(\frac{A_1}{B}\right) = \frac{P(A_1)P\left(\frac{B}{A_1}\right)}{P(A_1)P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2)P\left(\frac{B}{A_2}\right) + P(A_3)P\left(\frac{B}{A_3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} + 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$ **Ans.**

05. একজন ছাত্র ভর্তি পরীক্ষায় চারটি বিষয় Math, Phy, Chem, Eng এ অংশগ্রহণ করে। তার পাশের সম্ভাব্যতা Math এ $\frac{4}{5}$, Phy এ $\frac{3}{4}$, Chem এ $\frac{5}{6}$ এবং Eng এ $\frac{2}{3}$ যোগ্যতা অর্জনের জন্য তাকে অবশ্যই Math এ এবং ন্যূনতম অন্য যে কোন দুই বিষয়ে পাশ করতে হবে। ভর্তি পরীক্ষায় তার যোগ্যতা অর্জনের সম্ভাব্যতা কত? [14-15]

Solve দেওয়া আছে, $p(M) = \frac{4}{5}, P(P) = \frac{3}{4}, P(C) = \frac{5}{6}, P(E) = \frac{2}{3}$

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা = অংকে পাশ করার সম্ভাবনা × কমপক্ষে অন্য যেকোন দুই বিষয়ে পাশের সম্ভাবনা

$$= \frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{61}{90}$$ **Ans.**

06. কোন বোল্ট কারখানায় A এবং B মেশিনগুলি মোট উৎপাদনের যথাক্রমে 30% এবং 70% তৈরি করে। মেশিনগুলি যথাক্রমে 2% এবং 5% ত্রুটিপূর্ণ বস্তু তৈরি করে। একটি বস্তু তুলে দেখা গেল এটি ত্রুটিপূর্ণ। বোল্টটি B মেশিনে তৈরি হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [13-14]

Solve মনেকরি,
বস্তুটি A যন্ত্রে উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাবনা = 0.3
বস্তুটি B যন্ত্রে উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাবনা = 0.7

ধরি, ত্রুটিপূর্ণ বস্তুটি B মেশিনে তৈরি হওয়ার সম্ভাবনা $P\left(\frac{B}{D}\right)$ হলে বায়েসের

সূত্রমতে, $$P\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{P(B).P\left(\frac{D}{B}\right)}{P(B).P\left(\frac{D}{B}\right) + P(A).P\left(\frac{D}{A}\right)}$$

$$= \frac{.7 \times .05}{.7 \times .05 + .3 \times .02} = \frac{35}{41}$$ **Ans.**

07. A ও B মেশিন দু'টি বস্তু প্রস্তুত করে, কিন্তু একটি নির্দিষ্ট সময়ে A মেশিনটি, B মেশিন-এর দ্বিগুণ বস্তু তৈরি করে। জানা আছে যে, A ও B মেশিন দু'টি যথাক্রমে 2% ও 1% ত্রুটিপূর্ণ বস্তু তৈরি করে। একটি বস্তু পরীক্ষা করে দেখা গেল যে, বস্তুটি ত্রুটিপূর্ণ। বোল্টটি A মেশিনে প্রস্তুত হবার সম্ভাব্যতা কত? [11-12]

Solve A মেশিনটি B মেশিনের দ্বিগুণ বস্তু তৈরি করে

∴ কোন বস্তু A মেশিনে হওয়ার সম্ভাব্যতা $P(A) = \frac{2}{3}$

ও B মেশিনে হওয়ার সম্ভাব্যতা $P(B) = \frac{1}{3}$

∴ ত্রুটিপূর্ণ বস্তুটি A তে পাওয়ার সম্ভাব্যতা

$$P\left(\frac{A}{D}\right) = \frac{P(A) \times P\left(\frac{D}{A}\right)}{P(A) \times P\left(\frac{D}{A}\right) + P(B) \times P\left(\frac{D}{B}\right)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{100}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{100}}$$

$= 0.8$ **Ans.**

08. দুইটি একই রকম বাক্সের প্রথমটিতে 5 টি নীল এবং 4 টি কাল ও দ্বিতীয়টিতে 4 টি নীল এবং 8 টি কাল বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি বাক্স নির্বাচন করা হল এবং ঐ বাক্স হতে নিরপেক্ষভাবে একটি বল টানা হল। বলটি নীল হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। যদি বলটি নীল হয়, তাহলে সেটি প্রথম বাক্স থেকে টানার সম্ভাব্যতা কত? [10-11]

Solve বলটি নীল হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{12} = \frac{4}{9}$

বলটি নীল এবং প্রথম বাক্সে হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{18} \times \frac{9}{4} = \frac{5}{8}$ **Ans.**

09. একটি কলেজের একাদশ শ্রেণীর 80 জন ছাত্রের মধ্যে 20 জন ফুটবল ... জন ক্রিকেট এবং 10 জন উভয়টি খেলে। তাদের মধ্য হতে একজন... দৈবভাবে নির্বাচন করা হল। (I) যদি ছাত্রটি ক্রিকেট খেলে, তার ফুটবল খেলার সম্ভাবনা কত? (II) যদি ছাত্রটি ফুটবল খেলে, তার ক্রিকেট খেলার সম্ভাবনা কত? [08-09,03-04]

Solve এখানে, ফুটবল খেলার সম্ভাবনা $P(F) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

ক্রিকেট খেলার সম্ভাবনা $P(C) = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

$\therefore P(F \cap C) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

∴ (i) ছাত্রটি ক্রিকেট খেলে এইশর্তে ফুটবল খেলার সম্ভাব্যতা,

$$P\left(\frac{F}{C}\right) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{5}$$

(ii) ছাত্রটি ফুটবল খেলে এই শর্তে ক্রিকেট খেলার সম্ভাব্যতা,

$$P\left(\frac{C}{F}\right) = \frac{P(F \cap C)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$$ **Ans.**

10. তিনটি দল I, II, এবং III-এ বিভক্ত শিশুদের দলে যথাক্রমে 3 জন বালিকা ও 1 জন বালক, 2 জন বালিকা ও 2 জন বালক এবং 1 জন বালিকা ও 3 জন বালক বিদ্যমান আছে। প্রতিটি দল হতে নিরপেক্ষভাবে একজন করে নির্বাচিত করা হলে, তিনজনের একটি বাছাইয়ে 1 জন বালিকা ও 2 জন বালক থাকার সম্ভাবনা কত? [07-08]

Solve ১ম দলে বালক আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{4}$ এবং বালিকা আসার সম্ভাবনা $\frac{3}{4}$

২য় দলে বালক আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$ এবং বালিকা আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$

৩য় দলে বালক আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$ এবং বালিকা আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা = ১ম ও ২য় দলে বালক এবং ৩য় দলে বালিকা আসার সম্ভাবনা + ২য় ও ৩য় দলে বালক এবং ১ম দলে বালিকা আসার সম্ভাবনা + ১ম ও ৩য় দলে বালক এবং ২য় দলে বালিকা আসার সম্ভাবনা

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{32}$$ **Ans.**

11. একটি বাক্সে 6 টি লাল বল, 4 টি সাদা বল এবং 5 টি নীল বল আছে। দৈবচয়ন পদ্ধতিতে ক্রমাগতভাবে তিনটি বল বাক্স থেকে বের করলে লাল, সাদা, নীল অথবা নীল, সাদা, লাল বল ক্রমানুসারে পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর যখন প্রতিটি বল বাক্সে পুনরায় রাখা না হয়। [06-07]

Solve মোট বল = 15টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{6 \times 5 \times 4}{15 \times 14 \times 13} + \frac{5 \times 4 \times 6}{15 \times 14 \times 13} = \frac{8}{91}$ **Ans.**

12. একটি বাক্সে 6 টি সাদা ও 5 টি লাল বল আছে। বাক্স হতে পুনঃস্থাপন করে দুটি বল নেয়া হল। বল দুটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [04-05]

Solve নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{36}{121}$ **Ans.**

. 20 খানা একই রকম টিকেটে 1 থেকে 20 পর্যন্ত লিখে একটি পাত্রে রেখে উত্তমরূপে মিশানোর পর আলগোছে ও নিরপেক্ষভাবে একটি টিকেট টানা হলে, টিকেটখানি 3 অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [02-03; RUET : 04-05]

Solve $P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20}$

$= \frac{6+4-1}{20} = \frac{9}{20}$ **Ans.**

$P(A) = 3$ এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P(B) = 5$ এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ এবং

$P(A \cap B) = \frac{1}{20}$

. দুটি একই রকমের বাক্সের 1 নং-বাক্সে 2 টি কাল ও 5 টি সাদা মার্বেল এবং 2 নং- বাক্সে 3 টি কাল ও 7 টি সাদা মার্বেল আছে। লটারির সাহায্যে একটি বাক্স নির্বাচন করা হল এবং নির্বাচিত বাক্সটি থেকে একটি মার্বেল উঠানো হল। মার্বেলটি সাদা হলে, 2 নং- বাক্স থেকে নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কত বের কর। [00-01]

Solve Here, $P\left(\frac{W}{B_1}\right) = \frac{^5C_1}{^7C_1} = \frac{5}{7}$, $P\left(\frac{W}{B_2}\right) = \frac{^7C_1}{^{10}C_1} = \frac{7}{10}$

$\therefore P(B_1) = \frac{1}{2}$ $\therefore P(B_2) = \frac{1}{2}$

$$\therefore P\left(\frac{B_2}{W}\right) = \frac{P\left(\frac{W}{B_2}\right)P(B_2)}{P\left(\frac{W}{B_1}\right)P(B_1) + P\left(\frac{W}{B_2}\right)P(B_2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}} = \frac{49}{99}$$ **Ans.**

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. কোন একটি কম্পিউটার কারখানায় M_1, M_2 এবং M_3 যন্ত্রে যথাক্রমে মোট উৎপাদনের 25%, 35% এবং 40% উৎপাদিত হয় এবং যথাক্রমে উৎপাদিত কম্পিউটারগুলোর যথাক্রমে 5%, 4% এবং 2% ত্রুটিপূর্ণ। উৎপাদিত কম্পিউটারগুলো হতে একটি কম্পিউটার নেওয়া হল এবং দেখা গেল কম্পিউটারটি ত্রুটিপূর্ণ। নেওয়া কম্পিউটারটি M_2 যন্ত্রে উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [05-06,CUET: 04-05]

Solve ধরি, M_2 যন্ত্রে উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাব্যতা $P(x_2)$

$$\therefore P(x_2) = \frac{P(M_2)\,P(x_2)}{P(M_1)\,P(x_1) + P(M_2)\,P(x_2) + P(M_3)\,P(x_3)}$$

$$= \frac{0.35\times0.04}{(0.25\times0.05) + (0.35\times0.04) + (0.4\times0.02)} = \frac{28}{69}$$ **Ans.**

02. 1 হতে 25 পর্যন্ত সংখ্যাগুলির মধ্য থেকে দৈবচয়নের মাধ্যমে জোড় সংখ্যাগুলি পাওয়ার সম্ভাবনা কত? [04-05]

Solve নমুনা বিন্দু = 25টি

$\therefore$ জোড় সংখ্যা = 12টি

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{12}{25}$ **Ans.**

03. একটি পাত্রে 4 টি সাদা, 5টি লাল এবং 6টি সবুজ বল আছে। তা হতে একত্রে 3 টি বল দৈবায়িত উপায়ে নির্বাচন করা হলো। এরূপক্ষেত্রে (a) প্রতিটি বল লাল ও (b) কমপক্ষে দুইটি বল লাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [03-04]

Solve (a) P (প্রতিটি বল লাল) $= \frac{^5C_3}{^{15}C_3} = \frac{2}{91}$

(b) P (প্রতিটি বল লাল) + P(2টি বল লাল ও একটি ভিন্ন রং এর)

$$= \frac{^5C_3}{^{15}C_3} + \frac{^5C_2 \times {}^{10}C_1}{^{15}C_3} = \frac{22}{91}$$ **Ans.**

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি ব্যাগে 5টি সাদা, 4টি সবুজ ও 1টি লাল বল আছে। এক সাথে 4টি বল দৈবভাবে নেয়া হল।

a. সবগুলো বল সাদা হবার সম্ভাবনা কত?

b. কোন লাল বল না পাবার সম্ভাবনা কত? [03-04]

Solve a. P (সবগুলো সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা) $= \frac{^5C_4}{^{10}C_4} = \frac{1}{42}$

b. P (লাল বল না পাওয়ার সম্ভাব্যতা) $= \frac{^9C_4}{^{10}C_4} = \frac{3}{5}$ **Ans.**

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. এক প্যাকেট কার্ড থেকে 3টি কার্ড টেনে তোলা হল। 2টি টেক্কা পাবার সম্ভাবনা বের কর। [11-12]

Solve নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{^4C_2 \times {}^{48}C_1}{^{52}C_3} = \frac{72}{5525}$ **Ans.**

02. একটি ছক্কা দুইবার চাল দেওয়া হ'ল। প্রথম চালে 4, 5 অথবা 6 এবং দ্বিতীয় চালে 1, 2, 3 অথবা 4 ওঠার সম্ভাবনা বের কর। [09-10]

Solve প্রথম চালে 4, 5, 6 উঠার সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

২য় চালে 1, 2, 3 অথবা, 4 উঠার সম্ভাব্যতা $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

দুইটি ঘটনা একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ **Ans.**

03. এক ব্যক্তির তিন সন্তান আছে। তাদের জন্মদিন বছরের তিনটি ভিন্ন ভিন্ন দিনে হবে এমন সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [08-09]

Solve ২য় সন্তানের জন্মদিন ১ম সন্তানের জন্মদিনে না হওয়ার সম্ভাব্যতা

$= \frac{365-1}{365} = \frac{364}{365}$

উল্লেখিত ২দিন ব্যতিত অন্য কোন দিনে ৩য় সন্তানের জন্মদিন হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{365-2}{365} = \frac{363}{365}$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$ **Ans.**

04. 1 থেকে 100 এর মধ্যে তিনটি পৃথক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফল জোড়সংখ্যা হবার সম্ভাবনা কত? [06-07]

Solve

জোড় (50)	বিজোড় (50)
1	2
2	1
3	0

$$\therefore \text{নির্ণেয় সম্ভাব্যতা} = \frac{^{50}C_1 \times {}^{50}C_2 + {}^{50}C_2 \times {}^{50}C_1 + {}^{50}C_3}{^{100}C_3} = \frac{29}{33}$$ **Ans.**

05. একটি পাত্রে 8টি লাল ও 7টি কালো বল আছে। পাত্রটি থেকে দু'টি করে বল দু'বার নেয়া হলো। বলগুলো কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত? [05-06]

Solve প্রতিস্থাপন করে, সম্ভাবনা $= \frac{^7C_2}{^{15}C_2} \times \frac{^7C_2}{^{15}C_2} = \frac{1}{25}$

প্রতিস্থাপন না করে, সম্ভাবনা $= \frac{^7C_2}{^{15}C_2} \times \frac{^5C_2}{^{13}C_2} = \frac{1}{39}$ Ans.

MCQ Part

BUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একজন বন্দুক চালনাকারীর গুলি লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করার সম্ভাবনা 0.8। যদি সে পর পর তিনবার গুলি চালায় তবে পর্যায়ক্রমে সফলতা ও ব্যর্থতার (বা ব্যর্থতা ও সফলতার) সম্ভাবনা কত? [13-14]

A. 0.56 B. 0.16 C. 0.20 D. 0.65

Ans B Solve সফল ব্যর্থ-সফল হওয়ার সম্ভাবনা

$= 0.8 \times (1 - 0.8) \times 0.8 = \frac{16}{125}$

ব্যর্থ-সফল-ব্যর্থ হওয়ার সম্ভাবনা $= (1 - .8) \times .8 \times (1 - .8) = \frac{4}{125}$

$\therefore$ পর্যায়ক্রমে সফল ও ব্যর্থ হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{16}{125} + \frac{4}{125} = 0.16$

02. তিনটি ছক্কা একই সময়ে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত বিন্দুর যোগফল 17 হওয়ার সম্ভাবনা হবে- [13-14]

A. $\frac{1}{72}$ B. $\frac{1}{144}$ C. $\frac{1}{216}$ D. $\frac{1}{108}$

Ans A Solve তিনটি ছক্কায় যোগফল 17 সম্ভব শুধুমাত্র $(6 + 6 + 5 = 17)$ তিনভাবে।

$\therefore$ সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$

03. একজন বিক্রেতা প্রত্যেক খরিদ্দারের নিকট শতকরা 70 ভাগ সুযোগে দ্রব্য বিক্রি করে। পর্যায়ক্রমিক খরিদ্দারদের আচরণ পারস্পারিক প্রভাবমুক্ত। যদি A এবং B দুইজন খরিদ্দার দোকানে প্রবেশ করে, তাহলে A অথবা B এর নিকট বিক্রেতার দ্রব্য বিক্রয়ের সম্ভাবনা কত? [12-13]

A. 0.50 B. 0.72 C. 0.91 D. 0.93

Ans C Solve এখানে, A ও B এর নিকট পণ্য বিক্রয়ের সম্ভাবনা

$= \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

$\therefore$ A অথবা B এর কাছে বিক্রয়ের সম্ভাবনা $= P(A \cup B)$।

যেহেতু এটি স্বাধীন ঘটনা

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

[স্বাধীন বলে $P(A \cap B) = P(A).P(B)$]

$= \frac{7}{10} + \frac{7}{10} - \frac{7}{10}.\frac{7}{10} = 0.91$

04. একটি মুদ্রা পরপর তিনবার টস করা হলে, পর্যায়ক্রমে মুদ্রাটির হেড এবং টেইল পাবার সম্ভাব্যতা হবে। [11-12]

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{8}$ D. None of

Ans A Solve $P(HTH) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ এবং $P(THT) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\therefore$ পর্যায়ক্রমে হেড ও টেইল পাওয়া সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

05. পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 2, 4, 7, 9, 3, 8 সংখ্যাগুলো ব্যবহার করে দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা বানানো হবে। সংখ্যাটির জোড় হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [10-11]

A. 0.25 B. 0.50 C. 0.75 D. 1.00

Ans B Solve 2, 4, 7, 9, 3, 8 ব্যবহার করে দুই অংক বিশিষ্ট সংখ্যা হয়, $= {}^6P_2 = 30$ টি। জোড় সংখ্যার ক্ষেত্রে; 2, 4, 8 এর যেকোনটি ${}^3P_1$ উপায়ে এবং বাকিগুলো ${}^5P_1$ উপায়ে।

$\therefore$ জোড় সংখ্যা পাওয়ার উপায় $= {}^3P_1 \times {}^5P_1 = 15$ টি

$\therefore$ জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

06. একজন চাকুরী প্রার্থী তিনটি ভিন্ন ভিন্ন প্রতিষ্ঠানে চাকুরীর জন্য আবেদন করেন। জানুয়ারী মাসের তিনটি ভিন্ন ভিন্ন দিনে তার নির্বাচনী পরীক্ষা হবে এমন সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [09-10]

A. 1.0 B. 0.992 C. 0.905 D. None of the above

Ans C Solve তিনটি ভিন্ন ভিন্ন দিনে নির্বাচনী পরীক্ষা হওয়ার সম্ভাবনা

$= \frac{31}{31}.\frac{30}{31}.\frac{29}{31} = 0.905$

07. 100 থেকে শুরু করে 999 পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্য থেকে একটি পূর্ণ সংখ্যা নেয়া হল। পূর্ণ সংখ্যাটির সবগুলো সংখ্যা বিজোড় হওয়ার সম্ভাবনা কত? [07-08]

A. $\frac{25}{102}$ B. $\frac{5}{36}$ C. $\frac{25}{36}$ D. $\frac{5}{102}$

Ans B Solve 100 থেকে 999 পর্যন্ত তিন অঙ্ক বিশিষ্ট মোট 900টি সংখ্যা আছে। 1 থেকে 9 এর মধ্যে বিজোড় অঙ্ক 5টি। তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রতিটি অঙ্ক বিজোড় হবে এমন সংখ্যার মোট পরিমান $= 5^3 = 125$

সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{125}{900} = \frac{5}{36}$

08. A ও B স্বাধীন ঘটনা এবং $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ হলে, $P(A \cup B)$ এর মান হবে- [06-07]

A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{5}{6}$

Ans D Solve $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}.\frac{3}{4} = \frac{5}{6}$

09. একই পোস্টে দুটি শূন্য পদে একজন পুরুষ ও একজন মহিলা চাকুরী প্রার্থী। পুরুষ ও মহিলার চাকুরী পাওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{7}$ এবং $\frac{1}{5}$। উভয়ের চাকুরী না পাওয়ার সম্ভাবনা কত? [05-06; CUET : 12-13]

A. $\frac{1}{35}$ B. $\frac{24}{35}$ C. $\frac{34}{35}$ D. $\frac{28}{35}$

Ans B Solve পুরুষের না পাবার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

মহিলার না পাবার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

এবং উভয়ের না পাবার সম্ভাবনা $= \frac{6}{7}.\frac{4}{5} = \frac{24}{35}$

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

দুটি ছক্কা পাশাপাশি নিক্ষেপ করলে যদি 2টা সংখ্যার যোগফল 6 পাওয়ার সম্ভাবনা P_1 এবং 2 টা সংখ্যার যোগফল 7 পাওয়ার সম্ভাবনা P_2 হয়, তাহলে $P_1 + P_2$ এর মান কত? [17-18]

A. $\frac{11}{36}$ B. $\frac{13}{36}$ C. $\frac{17}{36}$
D. $\frac{19}{36}$ E. কোনোটিই নয়

Ans A **Solve** $P_1 + P_2$ = দুটি ছক্কার একত্রে নিক্ষেপে উপরের পৃষ্ঠে সংখ্যা দুটির যোগফল 6 বা 7 পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5+6}{6^2} = \frac{11}{36}$

যদি কোন একটি পরীক্ষায় একজন ছাত্রের অংকে ফেল করার সম্ভাব্যতা 1/4, অংকে ও ইংরেজীতে উভয় বিষয়ে পাশ করার সম্ভাব্যতা 3/5 এবং দুটি বিষয়ের কোন একটিতে পাশ করার সম্ভাব্যতা 5/8 হয়, তাহলে ঐ ছাত্রের ইংরেজীতে পাশ করার সম্ভাব্যতা কত? [16-17]

A. 2/5 B. 3/8 C. 19/40
D. 39/40 E. 17/20

Ans C **Solve**

গণিতে পাশ করার সম্ভাব্যতা $= \left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

ইংরেজিতে পাশ করার সম্ভাব্যতা $= \frac{5}{8} - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5}\right) = \frac{19}{40}$

একটি ব্যাগে 12 টি লাল ও 16 টি কালো বল আছে। পরপর দুটি বল নেওয়া হলে উভয়টি একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা কত? [15-16]

A. $\frac{23}{28}$ B. $\frac{31}{56}$ C. $\frac{23}{56}$ D. $\frac{31}{63}$ E. $\frac{20}{63}$

Ans D **Solve** $\frac{12}{28} \times \frac{11}{27} + \frac{16}{28} \times \frac{15}{27} = \frac{11}{63} + \frac{20}{63} = \frac{31}{63}$

দুটি ছক্কা একই সঙ্গে নিক্ষেপ করা হলে যোগফল 7 পাবার সম্ভাবনা কোনটি? [14-15]

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{36}$ C. $\frac{5}{36}$ D. $\frac{2}{3}$ E. $\frac{7}{36}$

Ans A **Solve** যোগফল 7 হতে পারে, 6 ভাবে

১ম ছক্কা	২য় ছক্কা
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

$\therefore$ সম্ভাবনা $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ইমন ও শারমিন দশম শ্রেণীতে পড়ে। তারা তাদের গণিত বইয়ের যথাক্রমে 75% প্রশ্ন ও 80% প্রশ্ন সমাধান করতে পারে। দৈবভাবে নেয়া একটি গণিতের প্রশ্ন ইমন অথবা শারমিনের পক্ষে সমাধান করার সম্ভাবনা কত? [13-14]

A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{3}{20}$ C. $\frac{11}{20}$ D. $\frac{9}{20}$ E. $\frac{19}{20}$

Ans E **Solve**

ইমনের গণিত বই সমাধান করতে না পারার সম্ভাব্যতা $= (1 - 0.75) = \frac{1}{4}$

শারমিনের গণিত বই সমাধান করতে না পারার সম্ভাব্যতা $= (1 - 0.80) = \frac{1}{5}$

ইমন ও শারমিনের সমাধান না করার সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

ইমন অথবা শারমিনের সমাধান করতে পারার সম্ভাব্যতা $= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

06. একই রকম 3টি বক্সে যথাক্রমে 2টি লাল ও 5টি কালো, 3টি লাল ও 5টি সাদা এবং 5টি সাদা ও 7টি কালো বল আছে। দৈবচয়নের মাধ্যমে একটি বক্স হইতে একটি বল নেওয়া হইলে সেটি কালো হবার সম্ভাবনা কত? [10-11]

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{5}{9}$ E. $\frac{1}{2}$

Ans Blank **Solve** $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{0}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{109}{252}$

07. 16 জন বালক ও 12 জন বালিকা একটি প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করলে, একটি বালক প্রথম ও একটি বালিকা দ্বিতীয় হওয়ার সম্ভাব্যতা হল: [09-10]

A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{5}{63}$ D. $\frac{12}{49}$ E. $\frac{16}{63}$

Ans E **Solve** একটি বালক প্রথম ও একটি বালিকা ২য় হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{16}{28} \times \frac{12}{27} = \frac{16}{63}$

08. প্রান্তিক সংখ্যাদ্বয়কে অন্তর্ভুক্ত না করে 10 থেকে 30 পর্যন্ত সংখ্যাসেটের যে কোন একটিকে নিলে সেই সংখ্যাটি মৌলিক অথবা 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাব্যতা কত? [08-09]

A. $\frac{6}{21}$ B. $\frac{9}{19}$ C. $\frac{11}{21}$ D. $\frac{3}{7}$ E. $\frac{3}{19}$

Ans B **Solve** মৌলিক সংখ্যা, A = {11, 13, 17, 19, 23, 29}

5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার মোট, B = {15, 20, 25}

$\therefore P(A) = \frac{6}{19}, P(B) = \frac{3}{19} \therefore P(Total) = \frac{6}{19} + \frac{3}{19} = \frac{9}{19}$

09. 52টি তাসের প্যাকেট থেকে 1টি তাস দৈবচয়িতভাবে উঠানো হল। তাসটি লাল অথবা টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা কোনটি? [07-08]

A. $\frac{7}{52}$ B. $\frac{15}{26}$ C. $\frac{11}{13}$ D. $\frac{7}{13}$ E. $\frac{9}{13}$

Ans D **Solve** $\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

10. 50 হতে 70 সংখ্যাগুলি থেকে দৈবচয়ন পদ্ধতিতে একটি সংখ্যা নেওয়া হল। সংখ্যাটি মৌলিক সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা হল: [05-06]

A. $\frac{4}{21}$ B. $\frac{3}{21}$ C. $\frac{5}{21}$ D. $\frac{6}{21}$

Ans A **Solve** 50 – 70 এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা = 53, 59, 61, 67 = 4টি $\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{4}{21}$

CUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি বাক্সে 6টি সাদা ও 5টি লাল বল আছে। বাক্স হতে দুটি বল এক সাথে উঠিয়ে নেয়া হলো। বাক্স হতে পর্যায়ক্রমে বল উঠিয়ে সেটি পুনঃস্থাপন করে আবার একটি বল উত্তোলন করলে উত্তোলিত বল দুটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [12-13]

A. $\frac{36}{121}$ B. $\frac{30}{121}$ C. $\frac{2}{121}$ D. None

Ans A **Solve** $\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{36}{121}$

02. একটি ব্যাগে 6টি সাদা, 7টি লাল ও 9টি কালো বল আছে। দৈবক্রমে যে কোন তিনটি বল নেয়া হলো, সবগুলো বল সাদা বা লাল আসার সম্ভাব্যতা কত? [12-13]

A. $\frac{1}{28}$ B. $\frac{1}{77}$ C. $\frac{1}{44}$ D. None

Ans A **Solve** $\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবতা $= \frac{{}^6C_3 + {}^7C_3}{{}^{22}C_3} = \frac{1}{28}$

03. তিনটি সদৃশ বাক্সে লাল ও সাদা বল আছে। ১ম বাক্সে 3টি লাল ও 2টি সাদা বল, ২য় বাক্সে 4টি লাল ও 5টি সাদা বল, ৩য় বাক্সে 2টি লাল ও 4টি সাদা বল আছে। একটি বাক্স দৈবচয়িত ভাবে নির্বাচন করে একটি বল নেয়া হলো। যদি বলটি লাল হয়, তবে বলটি ২য় বাক্স হতে আসার সম্ভাবনা কত? [15-16]

A. $\frac{62}{135}$ B. $\frac{4}{27}$ C. $\frac{10}{31}$ D. None of them

Ans C Solve

১ম বাক্সে একটি বল লাল আসার সম্ভাবনা $P\left(\frac{R}{A_1}\right)=\frac{3}{5}$

২য় বাক্সে একটি বল লাল আসার সম্ভাবনা $P\left(\frac{R}{A_2}\right)=\frac{4}{9}$

৩য় বাক্সে একটি বল লাল আসার সম্ভাবনা $P\left(\frac{R}{A_3}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

যেহেতু বাক্স তিনটি সদৃশ সুতরাং $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$

$$\therefore P\left(\frac{A_2}{R}\right)=\frac{P(A_2)P\left(\frac{R}{A_2}\right)}{P(A_1)P\left(\frac{R}{A_1}\right)+P(A_2)P\left(\frac{R}{A_2}\right)+P(A_3)P\left(\frac{R}{A_3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{10}{31}$$

04. একটি ব্যাগে 3টি লাল, 2টি সাদা ও 1টি সবুজ বল আছে। দৈবক্রমে যে কোন তিনটি বল নেয়া হল। সবগুলো সাদা বল আসার সম্ভাবনা নিচের কোনটি? [11-12]

A. $\frac{^3C_2\times{}^4C_1}{^6P_1}$ B. $\frac{^2P_2\times{}^4P_2}{^6C_1}$ C. $\frac{^2C_2\times{}^4C_1}{^6C_1}$ D. None

Ans D Solve সবগুলো সাদা হওয়ার সম্ভাবনা = 0 ($\because$ সাদা বল 2 টি)

05. একটি বাক্সে বিভিন্ন আকারের 6টি সাদা বল, 7টি লাল বল এবং 8টি কাল বল আছে। দৈবভাবে একটি বল তুলে নেয়া হল। বলটি লাল বা সাদা হবার সম্ভাব্যতা হল- [10-11]

A. 7/21 B. 13/21 C. 6/21 D. None

Ans B Solve P (লাল অথবা সাদা) = P(লাল) + P(সাদা)

$$=\frac{7}{21}+\frac{6}{21}=\frac{13}{21}$$

06. একটি ব্যাগে 4টি সাদা এবং 5টি কালো বল আছে। একজন লোক নিরপেক্ষভাবে একসঙ্গে 3টি বল উঠালেন। 3টি বলই কালো হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [09-10]

A. $\frac{5}{42}$ B. $\frac{9}{42}$ C. $\frac{1}{7}$ D. None of them

Ans A Solve $P(B)=\frac{^5C_3}{^9C_3}=\frac{5}{42}$

RUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. একটি বাক্সে 4টি লাল, 5টি নীল এবং 7টি সাদা বল আছে। দৈব চয়নে একটি বলের লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত? [13-14]

A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{12}{16}$ D. $\frac{11}{16}$ E. None

Ans D Solve মোট বল, 16 টি

লাল হওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{4}{16}$ এবং সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{7}{16}$

$\therefore$ লাল বা সাদা হওয়ার সম্ভাব্যতা = $\frac{4}{16}+\frac{7}{16}=\frac{11}{16}$

02. 7 টি সাদা, 3টি কালো বল একটি সারিতে সাজানো হল, দুইটি কালো বল পাশাপাশি না বসার সম্ভাবনা- [11-12]

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{2}{15}$

D. $\frac{7}{15}$ E. $\frac{1}{3}$

Ans D Solve নির্ণেয় সম্ভাব্যতা = $\frac{^8C_3}{^{10}C_3}=\frac{7}{15}$

SELF TEST: [Written]

01. 1 মৌলিক সংখ্যা নয় মনে করে 50 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মৌলিক সংখ্যা... হতে নিরপেক্ষভাবে যে কোন একটিকে বাছাই করলে তার (i) 25 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (ii) 2 এর শক্তি বিশিষ্ট (iii) বর্গ 100 অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। Ans. $\frac{3}{5}, \frac{1}{15}$

02. দুইটি নিখুঁত মুদ্রা ও একটি নিখুঁত ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হল (i) দুইটি ... ও বিজোড় সংখ্যা (ii) একটি লেজ ও জোড় সংখ্যা (iii) যে কোন পিঠ ও বিজোড় ... পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। Ans. (i) $\frac{1}{8}$, (ii) $\frac{1}{4}$, ...

03. 4 জন বালক ও 2 জন বালিকা উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি সারিতে আসন গ্রহণ করে। বালিকাদের পাশাপাশি আসন গ্রহণ করার সম্ভাবনা কত? Ans. ...

04. 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে একখানা তাস দৈবভাবে উঠানো হল। ... লাল টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা কত? Ans. ...

05. 52টি তাসের একটি প্যাকেট হতে 3টি তাস বের করা হলে 3টি তাসই ... হওয়ার সম্ভাবনা কত? Ans. ...

06. কোন জরিপে দেখা গেল 70% লোক ইত্তেফাক পড়ে, 60% লোক ইনকিলাব পড়ে এবং 40% লোক উভয় পত্রিকাই পড়ে। দৈবভাবে বাছাই করলে একজন লোকের ইত্তেফাক বা ইনকিলাব পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। Ans. ...

07. দু'টি থলির একটিতে 5টি লাল ও 3টি কাল বল আছে। অপর থলিতে ... লাল ও 5টি কালো বল আছে। সমসম্ভব উপায়ে একটি থলি নির্বাচন করা ... এবং তা থেকে দু'টি বল তোলা হলে একটি লাল ও একটি কাল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। Ans. ...

08. দুটি সংখ্যার গড় ও বিভেদাংক যথাক্রমে 10 ও 20% সংখ্যা দুটি নির্ণয় কর। Ans. 12, 8

09. প্রথমে n স্বাভাবিক সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান $\sqrt{10}$ হলে এর বিভেদাংক নির্ণয় কর। Ans. 52...

10. তিনটি বিন্যাসের গণসংখ্যা 200, 250 এবং 300 এবং গড় যথাক্রমে 25, ... ও 15 এবং পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে 3, 4, 5 হলে এদের সম্মিলিত গড় নির্ণয় কর। Ans. ...

SELF TEST: [MCQ]

1. খেলার তাস গুছানোর সময় চারটি তাস অসাবধানতাবশত পড়ে গেল চারটি তাস চার স্যুটের হওয়ার সম্ভাব্যতা–

A. $\frac{1}{20825}$ B. $\frac{2197}{20825}$
C. $\frac{1}{256}$ D. কোনটিই নয়

2. দু'টি ঘটনা A, B ঘটার সম্ভাবনা যথাক্রমে 0.25 ও 0.50. A ও B উভয়ই ঘটার সম্ভাবনা 0.14। A ও B কোনটি না ঘটার সম্ভাবনা–

A. 0.39 B. 0.25
C. 0.11 D. 0.61

3. 1 থেকে n পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বর্গের যোগফলের গড় কত যখন n = 500?

A. 250 B. 62500
C. 83583.5 D. 85383.5

4. একটি পাত্রে 6টি লাল, 5টি সবুজ এবং 4টি সাদা বল আছে। 3টি বল দৈবভাবে নেয়া হল। (i) বলগুলো ভিন্ন রঙের, (ii) বলগুলো একই রঙের হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

A. $\frac{2}{15}, \frac{7}{15}$ B. $\frac{24}{91}, \frac{34}{455}$
C. $\frac{1}{12}$, 30 D. None

5. 52 খানা তাসের প্যাকেট হতে 3টি তাস বের করা হলে 3টি তাসই রাজা হবার সম্ভাব্যতা কত?

A. $\frac{1}{5525}$ B. $\frac{1}{26}$
C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{7}{15}$

6.

মধ্যবিন্দু	250	350	450	550	650	750	850
গণসংখ্যা	12	18	36	24	10	8	7

উপাত্তগুলো থেকে গড় নির্ণয় কর।

A. 426.94 B. 415.6
C. 496.95 D. 318.4

7. কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা P(A) হলে না ঘটার সম্ভাবনা কত?

A. P(A) B. 1–P(A)
C. $P(A^C) = 0$ D. কোনটি নয়

8. একটি অধিবর্ষে 53টি শুক্রবার থাকার সম্ভাবনা কত?

A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{1}{7}$
C. 1 D. 0

9. –2, –1, 0, 1, 2 সংখ্যাগুলোর পরিমিত ব্যবধান কত?

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$
C. $\sqrt{7}$ D. 1

10. 52টি তাসের দুইটি প্যাকেট হতে 1টি করে তাস দৈবভাবে লওয়া হলো। তাস 2টির টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত?

A. $\frac{1}{13}$ B. $\frac{1}{52}$
C. $\frac{1}{26}$ D. $\frac{1}{169}$

11. দুইটি বর্জনশীল ঘটনা A এবং B এরূপ যে $P'(A) = 0.7$, $P'(B) = P$ এবং $P(A \cup B) = 0.8$ হলে P এর মান-

A. $\frac{8}{7}$ B. 1
C. 0.5 D. $\frac{3}{7}$

12. A, B, C ঘটনা তিনটি পরস্পর পৃথক ও সম্পূর্ণ, যদি $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$, $P(C) = \frac{1}{3}P(B)$ হয়, তবে P(C) নির্ণয় কর।

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$
C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

13. –2a, –a, 0, a, 2a সংখ্যাগুলোর গড় ব্যবধান কত?

A. 0 B. $\frac{6a}{5}$
C. $\frac{3a}{5}$ D. $\frac{5a}{3}$

14. এক ব্যক্তি 4টি ঠিকানায় 4টি চিঠি লিখে এবং চিঠিগুলো খামগুলোতে দৈবক্রমে ঢুকান হলে সঠিক ঠিকানায় চিঠি পাবার সম্ভাবনা-

A. $\frac{1}{24}$ B. $\frac{11}{24}$
C. $\frac{23}{24}$ D. $\frac{5}{8}$

15. স্বামী ও স্ত্রীর মধ্যে আরো 10 বছর বাঁচার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ 10 বছরের পর স্বামী এবং স্ত্রী কারোই না বাঁচার সম্ভাবনা-

A. $\frac{11}{12}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{3}$

16. চারজন ব্যক্তি দৈবক্রমে 3 জন পুরুষ, 2 জন মহিলা, এবং 4 জন শিশু হতে বাছাই করা হল। তাদের মধ্যে দুইজন শিশু হবার সম্ভাবনা-

A. $\frac{9}{21}$ B. $\frac{2}{9}$
C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{10}{21}$

17. যদি A এবং B দুইটি ঘটনা হয় তবে, তাদের মধ্যে শুধুমাত্র একটি বাছাই করার সম্ভাবনা-

A. $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ B. $P(A) + P(B) + P(A \cap B)$
C. $P(A) + P(B)$ D. $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

OMR

01. ⒶⒷⒸⒹ	06. ⒶⒷⒸⒹ	11. ⒶⒷⒸⒹ	16. ⒶⒷⒸⒹ
02. ⒶⒷⒸⒹ	07. ⒶⒷⒸⒹ	12. ⒶⒷⒸⒹ	17. ⒶⒷⒸⒹ
03. ⒶⒷⒸⒹ	08. ⒶⒷⒸⒹ	13. ⒶⒷⒸⒹ	
04. ⒶⒷⒸⒹ	09. ⒶⒷⒸⒹ	14. ⒶⒷⒸⒹ	
05. ⒶⒷⒸⒹ	10. ⒶⒷⒸⒹ	15. ⒶⒷⒸⒹ	

Correct Answer

17.A	16.D	15.B	14.A	13.B	12.C	11.C	10.D	09.A
08.A	07.B	06.C	05.A	04.B	03.C	02.A	01.B	

আংশিক ভগ্নাংশ

KUET এর বিগত প্রশ্নাবলি [শর্ট টেকনিকের সাহায্যে সমাধান]

01. $\frac{x^5}{x^4-81}$ -এর আংশিক ভগ্নাংশে হলো- [12-13]

A. $x-\frac{9x}{2x^2+18}+\frac{9}{4x-12}+\frac{9}{4x+12}$

B. $x+\frac{9x}{2x^2+18}-\frac{9}{4x-12}-\frac{9}{4x+12}$

C. $x-\frac{9x}{2x^2+18}-\frac{9}{4x-12}+\frac{9}{4x+12}$

D. $x-\frac{9}{2x^2+18}+\frac{9}{4x-12}-\frac{9}{4x+12}$

E. $x+\frac{9x}{2x^2+18}+\frac{9}{4x-12}-\frac{9}{4x+12}$

Ans A Solve $\frac{x^5}{x^4-81}$

$=\frac{x(x^2-9)(x^2+9)+81x}{(x^2-9)(x^2+9)}$

$=x+\frac{81x}{(x^2-9)(x^2+9)}$

$=x+\frac{9x}{2(x^2-9)}-\frac{9x}{2(x^2+9)}$

$=x+\frac{9x}{2(x-3)(x+3)}-\frac{9x}{2x^2+18}$

$=x+\frac{9}{4}\left[\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}\right]-\frac{9x}{2x^2+18}$

$=x-\frac{9x}{2x^2+18}+\frac{9}{4x-12}+\frac{9}{4x+12}$

02. $\frac{x^4}{x^3+1}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে কোনটি? [11-12]

A. $x+\frac{1}{x+1}+\frac{5}{x^2-2x+1}$

B. $x+\frac{1}{3(x+1)}-\frac{5}{3(x^2-x+1)}$

C. $\frac{1}{2x+5}+\frac{3}{x^2+11}$

D. $x+\frac{5}{x+1}+\frac{9x}{x^2+3x+5}$

E. $\frac{11}{2x+1}+\frac{3}{x^2+5}$

Ans B Solve $\frac{x^4}{x^3+1}=\frac{x(x^3+1)-x}{x^3+1}$

$=x-\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=x+\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$

03. $\frac{5x^2-4}{x^2(x-2)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে কোনটি? [10-11]

A. $\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x-2}$

B. $\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x-2}$

C. $\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x-2}$

D. $\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x-2}$

E. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x-2}$

Ans E Solve $\frac{5x^2-4}{x^2(x-2)}$

$=\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x^2(x-2)}$

$=\frac{5}{x-2}-\frac{2\{x-(x-2)\}}{x^2(x-2)}$

$=\frac{5}{x-2}-\frac{2}{x(x-2)}+\frac{2}{x^2}$

$=\frac{5}{x-2}-\frac{x-(x-2)}{x(x-2)}+\frac{2}{x^2}$

$=\frac{5}{x-2}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

$=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x-2}$

প্রশ্ন ব্যাংক

- BUET
- KUET
- CUET
- RUET

BUET Admission Test [2017-2018]

Mathematics

01. যদি $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x+2$ হয়, তাহলে ডোমেন এবং রেঞ্জসহ $f^{-1}(x)$ বের কর।

Ans: $f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-1}$, ডোমেন, $f^{-1}(x) = R - \{1\}$
এবং রেঞ্জ $f^{-1}(x) = R - \{-1\}$

02. যদি $\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}-4 & 8 & 4\\-1 & 2 & 1\\-3 & 6 & 3\end{bmatrix}$ হয় তাহলে A ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

Ans: $[-1\ 2\ 1]$

03. যদি $\cos\alpha + \sec\alpha = \frac{5}{2}$ হয়, তাহলে $\cos^n\alpha + \sec^n\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

Ans: $2^n + 2^{-n}$

04. $\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদের মান নির্ণয় কর। **Ans:** 924

05. ভেক্টর পদ্ধতিতে $3i + j + k$ এবং $2i + 2j - k$ এর ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans: $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2+t)\hat{i} + (2-t)\hat{j} + (2t-1)\hat{k}$
বা $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} = t$

06. যদি $re^{i\theta} = \frac{3+2i}{2+3i} + \frac{1+5i}{1-2i}$, তবে r ও θ এর মান নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\pi - \tan^{-1}\frac{22}{19}$

07. এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির কেন্দ্র (3,4) এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

Ans: $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$

08. সমাধান করঃ $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \sin^{-1}(1-x)$। **Ans:** $x = 0, \frac{1}{2}$

09. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans:** $\frac{3}{2}$

10. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্রের স্থানাংক (1,−1), অনুরূপ দিকাক্ষ $x - y - 4 = 0$ এবং যা (1,1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

Ans: $3(x^2 + y^2) + 2xy - 8 = 0$

11. যদি $a + b + c = 0$ এবং $|a| = 3, |b| = 5, |c| = 7$ হয়, তাহলে a এবং b এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। **Ans:** 60°

12. O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm এবং AB চাপের দৈর্ঘ্য 14 cm। কোণ ∠AOB এর মান বের কর এবং চাপ AB ও জ্যা AB দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Ans: 1.4 রেডিয়ান, 20.7275 বর্গ সে.মি.

13. $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$। অতঃপর $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান বের কর। **Ans:** $m(m^2 - 1)$

14. অসীম ধারাটির যোগফল নির্ণয় করঃ $1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \ldots\infty$ **Ans:** $2\sqrt{2}$

15. A(5,3), B(−2,0) এবং C(1,1) বিন্দু তিনটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হলে বৃত্তের কেন্দ্র ও ত্রিভুজ ABC এর ভরকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{\sqrt{6437}}{3}$ একক।

16. $x = \frac{1}{y^2}$, $x = y$ এবং $y = 2$ রেখাগুলির দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নি... কর। ক্ষেত্রটির চিত্র অংকন কর। **Ans:** 1 বর্গ...

17. EXAMINATION শব্দটির ব্যঞ্জনবর্ণগুলোকে একত্রে না রেখে কত ... সাজানো যায়? **Ans:** 4914...

18. গণিত ও পরিসংখ্যান বিষয়ে 200 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন পরি... এবং 40 জন গণিতে ফেল করে, এবং উভয় বিষয়ে 10 জন ফেল ... নিরপেক্ষভাবে একজন ছাত্রকে বাছাই করলে তার পরিসংখ্যানে পাশ ও গণি... ফেল হওয়ার সম্ভাবনা বের কর। **Ans:** ...

19. 20 cm দৈর্ঘ্যের হালকা AB দণ্ডটি 10 cm ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপ... আনুভূমিকভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W ও 3W ওজন ঝুলা... হলে, পেরেক দুইটির কোন অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে?

Ans: একটি পেরেক A বিন্দু থেকে 7cm এবং অপর পেরেকটি B বিন্দু থেকে 3cm ভিতরে অবস্থান করবে।

20. স্থিরাবস্থা থেকে একটি বাসকে 3 m/sec² সমত্বরণে চলতে দেখে বাসটিকে ধরার উদ্দেশ্যে একজন লোক বাসের পেছনে কিছুদূর থেকে 12m ... সমবেগে দৌড়াতে আরম্ভ করে। বাস থেকে লোকটি সর্বোচ্চ কত দূরে থাকলে বাসটিকে ধরতে পারবে? **Ans:** 24 মিটার

BUET Admission Test [2016-2017]

Mathematics

01. $\frac{1+2i}{1-3i}$ কে $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আকারে প্রকাশ কর।

Ans: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

02. $y = x^2 - 4x + 7$ ফাংশনের স্কেচ অংকন কর। একই সাথে ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ, সিমেট্রিক লাইন, সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান, এবং X-অক্ষ ও Y-অক্ষ হতে কর্তিত অংশ বের কর।

Ans: ডোমেন = R, রেঞ্জ = [3, ∞); $y_{max} = \infty$; $y_{min} = 3$; সিমেট্রিক লাইন, x=2; x এবং y অক্ষ হতে কর্তিত অংশ শূন্য...

03. সমাধান কর: $\frac{1}{|5x+2|} \geq 5$ **Ans:** $\left\{x \in R: -\frac{11}{25} \leq x \leq -\frac{9}{25}\right.$ এবং $x \neq$ ...

04. যদি $A = \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$ এবং $AB = \begin{bmatrix}10 & 17\\4 & 7\end{bmatrix}$ হয় তবে B ম্যাট্রিক্স এর উপাদানসমূহ বের কর। **Ans:** ...

05. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হতে হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

06. $\left(2x^2 + \frac{P}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ সমান হলে P এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। **Ans:** ...

07. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে $x + y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত।

Ans: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

08. P এবং Q সমান্তরাল ও সদৃশ বল। P বলের ক্রিয়া রেখাকে এর সমান্তরাল বরাবর Q বলের দিকে x দূরত্বে সরানো হলে এদের লব্ধি d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{Px}{P+Q}$।

09. দুটি সরলরেখা (–1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে।

Ans: $2x + y = 0$; $x - 2y + 5 = 0$

10. দুজন ছাত্রকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে বলা হল। একজন ছাত্র সমীকরণের x এর সহগটি ভুল লিখে 2 এবং 6 এই বীজ দুটি পেল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে 2 এবং –9 এই বীজ দুটি পেল। নির্ভুল সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় কর।

Ans: –4, –3

11. $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right)$-কে tan 3θ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

Ans: 3 tan 3θ

12. যদি $y = f(x)$ এবং $x = \frac{1}{z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{d^2f}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$

13. একটি পাত্রে নয়টি বল আছে, যার মধ্যে দুটি লাল, তিনটি নীল এবং চারটি কালো। তিনটি বল পাত্রটি হতে দৈবভাবে নেওয়া হল। (ক) বল তিনটি ভিন্ন রংয়ের এবং (খ) বল তিনটি একই রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Ans: (ক) $\frac{2}{7}$ (খ) $\frac{5}{84}$

14. দুটি নৌকা প্রত্যেকে 5 km/h বেগে চলে 3 km/h বেগে প্রবাহিত 550 m চওড়া একটি নদী পাড়ি দিতে চায়। একটি নৌকা ন্যূনতম পথে ও অপরটি ন্যূনতম সময়ে নদীটি পাড়ি দেয়। তারা একই সময়ে যাত্রা করলে তাদের অপর পাড়ে পৌঁছানোর সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর।

Ans: 1.65 min

15. $y^2 = ax$ এবং $x^2 + y^2 = 4ax$ রেখাদ্বয়ের অন্তবর্তী এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Ans: $\left(\frac{4\pi}{3} + 3\sqrt{3}\right)a^2$ বর্গ একক

16. $f(x) = \sin 3x$ হলে $\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{f(x+3h) - f(x)}{3h}$ এর মান নির্ণয় কর।

Ans: 3cos 3x

17. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A (1, 2, 3), B (2, 3, 1) এবং C (3, 1, 2) হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Ans: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ বর্গ একক।

18. CALCULUS শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলোকে একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায়? এই বিন্যাসগুলোর কতগুলোতে প্রথমে ও শেষে একই অক্ষর থাকবে?

Ans: 5040, 540

19. যদি $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ হয়, তবে দেখাও যে $\sin\frac{1}{2}(x - y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2 - b^2}$

20. মান নির্ণয় কর: $\int\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1 + x^2)^2}dx$

Ans: $\frac{1}{2m}e^{mz} + \frac{e^{mz}}{2(m^2 + 4)}(m\cos 2z + 2\sin 2z) + C$, যেখানে $z = \tan^{-1}x$

BUET Admission Test [2015-2016]

Mathematics

01. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর: $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$

Ans. $x = 5, y = -2$

02. ধারার সমষ্টি নির্ণয় কর: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{9} + \ldots\ldots$

Ans. $\sqrt{3}$

03. $(1 - x + x^2)^7$ এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ নির্ণয় কর।

Ans. 28

04. P এবং Q (P > Q) মানের দুটি বল α কোণে ক্রিয়ারত। এদের অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি θ কোণে ঘুরে যায় প্রমাণ কর যে, $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{P - Q}{P + Q}\tan\frac{\alpha}{2}$

05. একটি ট্রেন সরল রেলপথে 2km ব্যবধানে দুইটি স্টেশনে থামে। ট্রেনটির গতিপথের ১ম অংশটির ত্বরণ ২য় অংশটির ত্বরণের দ্বিগুণ। এক স্টেশন থেকে অন্য স্টেশন যেতে কত সময় লাগবে? ১ম অংশের ত্বরণ 1/6।

Ans. 6s

06. 12 একক দৈর্ঘ্য ও 5 একক প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের একটি কর্ণের দুই পাশে দুটি বৃত্ত রাখলে তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

Ans. 8.4064

07. প্রমাণ কর যে, $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$

08. একটি বাক্সে সমাকৃতির 8টি লাল ও 3টি কালো বল আছে। আরেকটি বাক্সে 10টি লাল ও 2টি কালো বল আছে। একটি বাক্স লটারির মাধ্যমে নির্বাচিত করে তা হতে যদি একটি বল তোলা হয় এবং তা যদি লাল হয় তাহলে প্রথম বাক্সটি নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

Ans. 0.7659

09. 4 জন বিজ্ঞান ও 3 জন কলা বিভাগের ছাত্র রয়েছে। বিজ্ঞানের ছাত্রেরা সংখ্যা গরিষ্ঠতা দিয়ে 5 জনের দল গঠন করলে তা কত ভাবে করা যাবে? **Ans.** 15 ভাবে।

10. যোগজীকরণ নির্ণয় কর: $\int\frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}dx$

Ans. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + C$

11. যোগজীকরণ নির্ণয় কর: $\int\frac{dx}{\cos x + \sin x}$

Ans. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}\right| + C$

12. $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{C} = 5\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{D} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{AB}$ এর উপর $\vec{BC}$ এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

Ans. 0

13. y = 3 সরল রেখার সমান্তরাল কোন রেখা $y = (x - 3)^2(x - 2)$ বক্র রেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক সেই বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

Ans. নির্ণেয় বিন্দুসমূহ $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ এবং (3, 0)

14. যদি কোন ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের কোসাইন তাদের বিপরীত বাহুর সাথে ব্যস্তভেদে অম্বিত হয় এবং বৃহত্তম কোণ ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ হয় তবে ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

Ans. 90°

15. একটি ওজনবিহীন তারের সাথে 3 kg ও 2 kg ভরের দুইটি বস্তু একটি স্থির পুলির উপর দিয়ে অবাধে ঝুলছে। গতি শুরু হওয়ার 5 sec পর রশিটি কেটে দিলে, হালকা বস্তুটি আর কত উপরে উঠবে?

Ans. 4.9m

16. একটি সরলরেখা (1,4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গএকক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. নির্ণেয় সরলরেখার সমকিরন: $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$

17. $y^m + y^{-m} = 2x$ হলে $m^2(x^2 - 1)y_2 + m^2.xy_1 - y = ?$

Ans. 0

18. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ বের কর যার ব্যাস $y^2 = 4(x - 1)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমান।

Ans. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

19. $x^2 = 4ay$, $y^2 = 4ax$ দুটি পরাবৃত্তের ছেদকৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Ans. $\frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক

20. $x^3 - px^2 - 14x - 24 = 0$
$x^2 - qx - 6 = 0$
$x^2 - 2x + r = 0$
১ম সমীকরণের মূলগুলো ২য় ও ৩য় সমীকরণের মূলগুলোর সমান।
$p + q + r = ?$

Ans. –14

KUET Admission Test [2017-2018]

Mathematics

01. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(e^x \cos x)}{x\sin x}$ এর মান কোনটি?

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{1}{5}$
D. 2 E. $\frac{1}{2}$

02. $y = \sin^3 x$ হলে, y_n এর মান কোনটি?

A. $\frac{1}{4}\left[3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) - 3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)\right]$ B. $\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$
C. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ D. $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)$
E. $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right) + \cos nx$

03. $y = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$ এর সর্বোচ্চ মান হলো-

A. ∞ B. 0 C. 2 D. −2 E. −4

04. $\log_{\sin x} \sin^2 x$ এর অন্তরক সহগ কোনটি?

A. 2 B. $(\sin x)^{\sin^2 x - 1}$ C. $2(\sin x)^{\cos^2 x - 1}$
D. 0 E. cotx

05. $\int \frac{6x-7}{4x^2-4x+5}dx$ এর মান হলো-

A. $\frac{3}{2}\log(4x - 4k + 5) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$
B. $3\log(4x^2 - 4x + 5) + \tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$
C. $\frac{3}{2}\log(4x - 4x + 5) + 2\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{2}\right) + c$
D. $\frac{3}{2}\log(4x^2 - 4x + 5) + \tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$
E. $3\log(4x^2 - 4x + 5) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2x-1}{2} + c$

06. $\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)}dx$ এর মান কোনটি?

A. $\frac{\pi a^2}{4}$ B. $\frac{\pi a^2}{3}$ C. $\frac{\pi a^2}{5}$
D. $\frac{\pi a^2}{7}$ E. $3\pi a^2$

07. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুগুলো হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াতর P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকলে P : Q : R এর মান কত?

A. a : b : c B. 2a : b : c C. 2a : 3b : c
D. a : b : 5c E. কোনোটিই নয়

08. সমবেগে খাড়া উর্ধ্বগামী একটি বিমান হতে একটি বোমা ছেড়ে দেওয়ার 10 সেকেন্ড পর মাটিতে পড়ে। মাটিতে বোমাটি আঘাত করার মূহুর্তে বিমানটি যে উচ্চতায় পৌঁছায় তা হলো-

A. 1470 m B. 980 m C. 1960 m
D. 490 m E. 245 m

09. এক ব্যক্তির কাছে 500, 50 ও 5 টাকার যথাক্রমে 3, 4 ও 5 টি নোট রয়েছে। টাকা না ভাঙিয়ে সে কত প্রকার ভিন্ন ভিন্ন দ্রব্যের দাম দিতে পারবে?

A. 60 B. 59 C. 61
D. 119 E. 121

10. দুটি ছক্কা পাশাপাশি নিক্ষেপ করলে যদি 2টা সংখ্যার যোগফল 6 পাওয়ার সম্ভাবনা P_1 এবং 2 টা সংখ্যার যোগফল 7 পাওয়ার সম্ভাবনা P_2 হয়, তাহলে $P_1 + P_2$ এর মান কত?

A. $\frac{11}{36}$ B. $\frac{13}{36}$ C. $\frac{17}{36}$
D. $\frac{19}{36}$ E. কোনোটিই নয়

11. 2, 5, 9, 16 এর বিভেদাঙ্ক হলো-

A. $\sqrt{\frac{55}{2}}\%$ B. $\sqrt{\frac{55}{128}}\%$ C. $\sqrt{\frac{1375}{8}}\%$
D. $\sqrt{2750}$ E. $\sqrt{\frac{2750}{8}}$

12. $1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \ldots\ldots$ এর মান কোনটি?

A. −3ln2 B. ln7 C. 5ln3 D. 2ln2 E. 3ln5

13. 'a' এর কোন মানের জন্য $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + a\hat{k}$ ও $\vec{C} = a\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$ সমতলীয় হবে?

A. 2 B. −2 C. 3 D. −5 E. 5

14. P(1, 2) বিন্দু হতে $2x - y + 5 = 0$ ও $x + y - 4 = 0$ রেখার উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব টানা হলো। Δ PQR এর ক্ষেত্রফল হলো-

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$ E. $\frac{7}{2}$

15. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(0, 0), B(1, 5) এবং C(−2, 2) হলে A বিন্দুগামী BC রেখার উপর লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

A. 2x = y B. x + y = 0 C. 3x + 5y = 0
D. x + 5y = 2 E. 7x + y = 3

16. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ বৃত্তের $x - y = 0$ জ্যাটি পরিধির যেকোন বিন্দুর সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হলো–

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{2\pi}{3}$ E. $\frac{3\pi}{4}$

17. একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত উপবৃত্তটি $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x অক্ষের উপরে এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ রেখাকে y অক্ষের উপরে ছেদ করে। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা কোনটি?

A. $\frac{\sqrt{7}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ E. $\frac{\sqrt{17}}{6}$

18. $\cos^2 A + \cos^2\left(A + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(A - \frac{\pi}{3}\right)$ এর মান কোনটি?

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2} + 1$ C. $\frac{1}{2} + 5$
D. $\frac{5}{7}$ E. $\frac{7}{9}$

19. $\sqrt{3}\tan 6\theta - \sqrt{3}\tan 4\theta + \tan 6\theta \tan 4\theta + 1 = 0$ এর সমাধান হলো-

A. 60^0 B. 165^0 C. 75^0
D. 30^0 E. 135^0

20. যদি $\tan^{-1} a + \frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{1+b^2}{1-b^2} + \frac{1}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1+c^2}{2c} = \pi$ হয়, তাহলে a + b + c এর মান কত?

A. 5 abc B. 7 abc C. 11 abc D. 2 abc E. abc

21. $\frac{x+4}{x+3} > \frac{x-6}{x-7}$ অসমতাটির সমাধান হলো–

A. $-4 < x < 6$ B. $-4 \le x \le 6$ C. $x < -3$ and $x > 7$
D. $x < -4$ and $x > 6$ E. $-3 < x < 7$

2. $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান কত?

A. 4xyz B. $\frac{1}{2}$xyz C. $\frac{1}{7}$xyz D. 11xyz E. 13xyz

3. $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

A. $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$ B. $\pm(2+5i)$ C. $\pm(3+7i)$

D. $\pm(9+11i)$ E. None of these

4. $f : R \rightarrow, g : R \rightarrow R, h : R \rightarrow R, f(x) = \tan^{-1}x, g(y) = \sin y$ এবং $h(z) = \frac{1-z}{1+z}$ হলে $g[f\circ h(\tan 30^0)]$ এর মান–

A. 30^0 B. 45^0 C. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ E. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

25. $6x^3 - x + 13 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, $\sum(\alpha-\beta)^2$ এর মান কত?

A. $\frac{-1}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. 1 D. –1 E. $\frac{2}{3}$

01.E	02.A	03.A	04.D	05.Blank	06.A	07.A	08.D	09.D
10.A	11.Blank	12.D	13.E	14.C	15.B	16.C	17.B	18.A
19.Blank	20.E	21.E	22.A	23.A	24.D	25.C		

KUET Admission Test [2016-2017]

Mathematics

01. x এর কোন কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} 2-x & 13 \\ 5 & 10-x \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যতিক্রমী (singular) ম্যাট্রিক্স হবে?

A. –15 ও –3 B. – 15 ও 3 C. 15 ও –3

D. 13 ও 5 E. 15 ও 3

02. $f : R \rightarrow R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(-8,8)$ এর মান কত হবে?

A. {-4, 4} B. {-3, 3} C. {-2, 2}

D. {-1, 1} E. $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

03. স্বরবর্ণগুলিকে একত্রে পাশাপাশি না রেখে 'ADMISSION' শব্দটির অক্ষরগুলি কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যাবে?

A. 90720 B. 88600 C. 86400

D. 4320 E. 360

04. – 625 এর চতুর্থ মূল কোনটি?

A. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ B. $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(21 \pm i)$ C. $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(5 \pm i)$

D. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3 \pm 4i)$ E. $\pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

05. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত?

A. 1100 B. 1120 C. 1200 D. 1220 E. 1320

06. যদি $x^2 + kx + 1 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $x^2 - 2x + 9 = 0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে k এর মান কত?

A. $\pm\frac{2}{5}$ B. $\pm\frac{1}{5}$ C. $\pm\frac{3}{5}$

D. $\pm\frac{2}{7}$ E. $\pm\frac{2}{3}$

07. যদি $z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \ldots\ldots\infty$ এবং $y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\infty$ হয় তাহলে x এর মান কত?

A. $(1 + e^z)$ B. $(1 + e^{-z})$ C. $ln(1 + 3z)$

D. $ln\left(\frac{1}{1+5z}\right)$ E. $ln\left(\frac{1}{1-e^z}\right)$

08. A(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ হলো–

A. 5x + 2y = 6 B. 7x + 3y = 9 C. 9x + 5y = 11

D. 3x + y = 12 E. 3x + 11y = 15

09. পোলার স্থানাঙ্কে $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?

A. $r^2+5\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)r+21=0$ B. $r^2-\frac{5}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)r-21=0$

C. $r^2+5\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)r-21=0$ D. $r^2+\frac{5}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)r+21=0$

E. $r^2 - 5\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)r + 21 = 0$

10. $9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও মূলবিন্দু দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নীচের কোনটি?

A. 11 বর্গ একক B. 12 বর্গ একক C. 13 বর্গ একক

D. 14 বর্গ একক E. 15 বর্গ একক

11. মান নির্ণয় কর- $\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan x}$

A. – 3 B. 3 C. – 2 D. 2 E. 1

12. যদি $y = \frac{ln\,x}{x}$ হয়, তবে $x^3y_2 - 2xy$ এর মান কোনটি?

A. – 3 B. – 2 C. – 1 D. 0 E. 3

13. $\sin x = \frac{1}{4}$ এর জন্য $y = \sin x + \cos 2x$ ফাংশনটির গুরুমান কোনটি?

A. – 2 B. 0 C. 1 D. 9/8 E. 11/8

14. $y^x = e^{x-y}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?

A. $\frac{y}{x+y}(1 + ln\,y)$ B. $\frac{y}{x+y}(1 - ln\,y)$ C. $\frac{y}{x-y}(1 + ln\,y)$

D. $\frac{y}{x-y}(1 - ln\,y)$ E. $\frac{y}{x-y}(ln\,y - 1)$

15. $\int\frac{x^2-1}{x^2-4}dx$ এর মান কোনটি?

A. $x + \frac{3}{4}ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c$ B. $x + \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

C. $x + \frac{3}{2}ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ D. $x + \frac{3}{2}ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c$

E. $x + \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}d\theta$ এর মান কোনটি?

A. $\frac{2\pi}{5}$ B. $\frac{3\pi}{7}$ C. $\frac{\pi}{5}$ D. $\frac{\pi}{4}$ E. $\frac{\pi}{3}$

17. $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$ হলে θ এর মান কোনটি?

A. $\pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ B. $\pm\frac{\pi}{2} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

C. $\pm\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ D. $\pm\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

E. $\pm\frac{\pi}{4} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{1\sqrt{2}}\right)$

18. $\frac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{2}$ এবং $\frac{\tan x}{\tan y}=\sqrt{3}$ হলে, x এবং y এর মান কোনটি?

A. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ C. $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{8}$
D. $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{5}$ E. $-\pi, \pi$

19. ABC ত্রিভুজে যদি $a = 3$, $b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 30°$ হয় তবে B ও C এর মান কোনটি?

A. 45°, 30° B. 30°, 40° C. 20°, 45°
D. 10°, 70° E. 30°, 90°

20. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র I বিন্দুতে যথাক্রমে IA, IB, IC রেখা বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে তাহলে P : Q : R এর মান কত হবে?

A. cos2A : cos2B : cos2C B. cosA : cosB : cosC
C. $\cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$ D. sin A : sin B : sin C
E. $\sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}$

21. 12 মিটার দৈর্ঘ্যের সুষম একটি বীম AB এর ওজন 50 কেজি, যার A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 15 কেজি ও 35 কেজি ওজন ঝুলানো। A প্রান্ত হতে কত দূরত্বে শুধু একটিমাত্র অবলম্বন স্থাপন করলে ব্যবস্থাটি সুস্থিত থাকবে?

A. 5 মিটার B. 35/6 মিটার C. 6 মিটার
D. 36/5 মিটার E. 7 মিটার

22. একটি বিড়াল 20 মিটার দূরে একটি ইঁদুরকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে 3 মিটার/সেকেন্ড^2 ত্বরণে ইঁদুরটির পশ্চাতে দৌড়ালো। ইঁদুরটি 13 মিটার/সেকেন্ড সমবেগে দৌড়াতে থাকলে কতক্ষণ পরে এবং কত দূরে গিয়ে বিড়ালটি ইঁদুরটিকে ধরতে পারবে?

A. 15 সেকেন্ড ও 150 মিটার B. 20 সেকেন্ড ও 200 মিটার
C. 10 সেকেন্ড ও 150 মিটার D. 10 সেকেন্ড ও 200 মিটার
E. 20 সেকেন্ড ও 150 মিটার

23. 4 গ্রাম ভরের একটি বস্তু 6 মিটার উচ্চ স্থান হতে পতিত হয়ে কাদায় 5 সে.মি. প্রবেশ করে স্থির হয়ে পড়ল। ভরটির উপর কাদার গড় ধাক্কার পরিমাণ কত?

A. 18.973 N B. 9.486 N C. 4.7432 N
D. 2.3716 N E. 1.1856 N

24. যদি কোন একটি পরীক্ষায় একজন ছাত্রের অংকে ফেল করার সম্ভাব্যতা 1/4, অংকে ও ইংরেজীতে উভয় বিষয়ে পাশ করার সম্ভাব্যতা 3/5 এবং দুটি বিষয়ের কোন একটিতে পাশ করার সম্ভাব্যতা 5/8 হয়, তাহলে ঐ ছাত্রের শুধু ইংরেজীতে পাশ করার সম্ভাব্যতা কত?

A. 2/5 B. 3/8 C. 19/40
D. 39/40 E. 17/20

25. একটি ব্যবসায়ী 40 টাকা কেজি দরে পেয়ারা এবং 120 টাকা কেজি দরে আপেল কিনতে পারেন। উভয় প্রকার মিলে তিনি তার দোকানে মোট 120 কেজি ফল রাখতে পারেন। উক্ত ব্যবসায়ী পেয়ারা বিক্রি করে প্রতি কেজিতে 16 টাকা এবং আপেল বিক্রি করে প্রতি কেজিতে 32 টাকা লাভ করতে পারেন। যদি তিনি সর্বোচ্চ 12000 টাকা বিনিয়োগ করতে পারেন, তাহলে কোন প্রকারের ফল কত কেজি কিনলে তিনি সর্বোচ্চ লাভ করতে পারবেন?

A. 120 কেজি পেয়ারা
B. 120 কেজি আপেল
C. 30 কেজি আপেল ও 90 কেজি পেয়ারা
D. 90 কেজি আপেল ও 30 কেজি পেয়ারা
E. 60 কেজি আপেল ও 60 কেজি পেয়ারা

01.C	02.B	03.C	04.E	05.B	06.E	07.E	08.D	09.E
10.B	11.E	12.A	13.D	14.D	15.B	16.B	17.A	18.A
19.Blank	20.C	21.D	22.C	23.C	24.C	25.D		

KUET Admission Test [2015-2016]

Mathematic

01. যদি $f : R^n \to R^n$ দ্বারা $f(x) = \begin{cases} 3x-1 \text{ if } x>3 \\ x^2-2 \text{ if } -2\le x\le 3 \\ 2x+3 \text{ if } x<-2 \end{cases}$ সূচিত হ f(−3) এর মান কত?

A. −3 B. −4 C. −5
D. 6 E. 7

02. যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ও $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ হয়, তবে $(BA)^{-1}$ এর মান কত?

A. $\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -44 & 1 \\ 31 & -1 \end{pmatrix}$
D. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -31 & 1 \\ 44 & -1 \end{pmatrix}$ E. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -44 & 31 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

03. 4, 5, 6, 7 এবং 8 এর প্রত্যেকটি একবার মাত্র ব্যবহার করে তিন অ কয়টি বিজোড় সংখ্যা তৈরি করা যায়?

A. 30টি B. 24টি C. 25টি D. 12টি E. 36টি

04. $2x^3 + 3x^2 + 6x - 65 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $\frac{5}{2}$ হলে, মূলগুলো হলো-

A. $2 \pm 3i$ B. $4 \pm 3i$ C. $3 \pm 2i$
D. $-2 \pm 3i$ E. $-4 \pm 3i$

05. $\frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + \ldots\ldots\infty$ ধারাটির যোগফল কোনটি?

A. 3e B. 4e C. 2e
D. 5e E. 7e

06. ধরি P(x, y), Q(3 , 5), R(7, −3) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু। যদি ∠QG $-\frac{\pi}{2}$ হয় যেখানে G ভর কেন্দ্র, তাহলে G এর সঞ্চার পথ হলো-

A. $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 109 = 0$
B. $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 109 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 109 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 109 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 109 = 0$

07. $x - 3y + 4 = 0$, $x - 6y + 5 = 0$ এবং $x + ax + 2 = 0$ রেখা সমবিন্দুগামী হলে তৃতীয় রেখার সাথে লম্ব এবং মূল বিন্দুগামী রে সমীকরণ কত?

A. $2x + 5y = 0$ B. $7x + y = 0$ C. $4x + 3y = 0$
D. $3x - y = 0$ E. $-4x + 9y = 0$

08. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 24y - 17 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র হতে $x - y - 6 = 0$ জ্যা টির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ বিন্দু হতে জ্যাটি y অক্ষকে যেখানে ছে করে তার দূরত্ব কত?

A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$ E. $7\sqrt{2}$

09. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও $2x^2 + 2y^2 + 12x - 16y - 13 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত?

A. 6 sq units B. 9 sq units C. 12 sq units
D. 18 sq units E. 24 sq units

10. যদি cos(A + B) sin (C + D) = cos (A− B) sin (C − D) হয়, তাহলে tanD এর মান কোনটি?

A. tanA tanB tanC B. cotA cotB cotC
C. sinA sinB sinC D. cosA cosB cosC
E. secA secB secC

11. $\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}$ এর মান কোনটি?
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{-\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$ E. $\frac{\pi}{6}$

12. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 13 ও 5 একক হয় এবং 13 একক বাহুর পাশের একটি কোণের পরিমাণ $\text{cosec}^{-1}\frac{13}{5}$ হলে, অপর কোণ দুইটির পরিমাণ ও অপর বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে?
A. $\frac{\pi}{4}, \sec^{-1}\frac{13}{12}, 12$ B. $\frac{\pi}{2}, \sec^{-1}\frac{13}{12}, 12$
C. $\frac{\pi}{2}, \cos^{-1}\frac{13}{12}, 12$ D. $\frac{\pi}{2}, \sin^{-1}\frac{5}{13}, 12$
E. কোনটিই নয়

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\log_e(e^x\cos x)}{x\sin x}$ এর মান কোনটি?
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{7}$ E. $-\frac{1}{2}$

14. যদি $y=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^{x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?
A. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$ B. $\frac{1}{nx}(\log_e x-1)$
C. $\frac{1}{nx}(\log_e x\ 2)$ D. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\log_e x\ 1}{x^2}\right)\right]$
E. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m}}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\log_e x-3}{x^2}\right)\right]$

15. যদি $y=\sin^3 x$ হয়, তবে y_n এর মান কত?
A. $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+3\right)$ B. $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+4\right)$
C. $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+5\right)$ D. $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+6\right)$
E. $\frac{1}{4}\sin\left[3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)-3^3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)\right]$

16. দুটি সংখ্যার যোগফল 7 হলে সংখ্যা দুটির গুণফলের সর্বোচ্চ মান হলো-
A. 6 B. 10 C. 12 D. ∞ E. কোনটিই নয়

17. $\int\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}d\theta$ এর মান হলো-
A. $\log_e\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+c$ B. $\log_e\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+c$
C. $\log_e\sec\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+c$ D. $\log_e\text{cosec}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+c$
E. $\log_e\sin 2\theta+c$

18. $\int_0^\infty\frac{22dx}{x^2-14x+170}$ এর মান কত?
A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{\pi}{4}$ D. 22π E. 11π

19. যদি 12 ও 8 এর একক মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে এমন কোণে ক্রিয়াশীল যেন তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?
A. $2\tan^{-1}10$ B. $2\tan^{-1}4$ C. $2\tan^{-1}2$
D. $2\tan^{-1}5$ E. কোনটিই নয়

20. 8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দৈর্ঘ্যের একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু যে দূরত্বে সরে যাবে তা কত একক?
A. 1 একক B. 2 একক C. 3 একক D. 4 একক E. কোনটিই নয়

21. দুইটি ট্রেন একই রেল পথে বিপরীত দিক থেকে প্রতি ঘণ্টায় 40 m/s এবং 60 m/s গতিবেগে অগ্রসর হচ্ছে। 1300 m দূরত্বে থাকাকালে উভয় ইঞ্জিনে একই মানের মন্দন প্রয়োগ করা হলো। মন্দনের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর যাতে সংঘর্ষ এড়ানো যেতে পারে।
A. -3 m/sec^2 B. 5 m/sec^2 C. 2 m/sec^2
D. 15 m/sec^2 E. 11 m/sec^2

22. সমত্বরণে চলমান একটি গাড়ির বাইরে ঝুলানো W ওজনের একটি বস্তু উলম্বের সঙ্গে $\frac{\pi}{6}$ কোণে ঝুলে থাকলে গাড়িটির ত্বরণ কত?
A. 17 m sec^{-2} (প্রায়) B. 6 m sec^{-2} (প্রায়)
C. 170 cm sec^{-2} (প্রায়) D. 1.7 m sec^{-2} (প্রায়)
E. 566 cm sec^{-2} (প্রায়)

23. A ও B ধরণের প্রতিটি দ্রব্য তৈরীতে যথাক্রমে 10 ও 6 একক শ্রম, 6 ও 18 একক কাঁচামাল লাগে এবং 10 ও 12 টাকা লাভ করা যায়। একটি কোম্পানি সর্বোচ্চ 480 একক শ্রম ও ৪64 একক কাঁচামাল যোগান দিতে সক্ষম হলে কোম্পানিটি সর্বোচ্চ যে লাভ করতে পারে তা, কত টাকা?
A. 576 B. 480 C. 1380 D. 1350 E. 720

24. একটি ব্যাগে 12 টি লাল ও 16 টি কালো বল আছে। পরপর দুটি বল নেওয়া হলে উভয়টি একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা কত?
A. $\frac{23}{28}$ B. $\frac{31}{56}$ C. $\frac{23}{56}$ D. $\frac{31}{63}$ E. $\frac{20}{63}$

25. x এর ক্রমবর্ধমান শক্তিতে $\log_e(1-3x+2x^2)^{-1}$ এর বিস্তরণে x^n এর সহগ নির্ণয় কর।
A. $\frac{3+2^{-n}}{n}$ B. $\frac{1+2^n}{n}$ C. $\frac{4+2^{5-n}}{n}$
D. 3n E. 2^n-5

01.A	02.B	03.B	04.D	05.A	06.Blank	07.D	08.B	09.B
10.A	11.A	12.B	13.C	14.D	15.E	16.E	17.C	18.Blank
19.C	20.C	21.C	22.B	23.E	24.D	25.B		

CUET Admission Test [2015-2016]

MCQ Part

01. a, b ও c এর মান কত হলে $\vec{V}=(x+y+az)\hat{i}+(bx+3y-z)\hat{j}+(3x+cy+z)\hat{k}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হবে?
A. (3, 1, 1) B. (3, –1, –1) C. (–3, 1, –1) D. (3, 1, –1)

02. $\sqrt[3]{-64}$ এর মান কত?
A. $\pm 2i, \pm\sqrt{3}\pm i$ B. $+2i, \pm\sqrt{3}\pm i$
C. $\pm 2i, \pm\sqrt{3}+i$ D. none of them

03. একটি বাঘ 20 m দূরে একটি হরিণকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে 3 m/sec^2 ত্বরণে হরিণটির পশ্চাতে দৌড়ান। হরিণটি 13 m/sec সমবেগে দৌড়াতে থাকলে কতক্ষণ পরে বাঘটি হরিণকে ধরতে পারবে?
A. 10 or $-\frac{4}{3}$ B. –10 or $\frac{4}{3}$ C. 10 D. none of them

04. নিম্নের অসীম ধারাটির যোগফল নির্ণয় কর।
$\frac{1}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{9}{3!}+\frac{13}{4!}+$ ....
A. e – 3 B. 3 + e C. 3 – e D. None of them

05. তিনটি সদৃশ বাক্সে লাল ও সাদা বল আছে। ১ম বাক্সে 3টি লাল ও 2টি সাদা বল, ২য় বাক্সে 4টি লাল ও 5টি সাদা বল, ৩য় বাক্সে 2টি লাল ও 4টি সাদা বল আছে। একটি বাক্স দৈবচায়িত ভাবে নির্বাচন করে একটি বল নেয়া হলো। যদি বলটি লাল হয়, তবে বলটি ২য় বাক্স হতে আসার সম্ভাবনা কত?
A. $\frac{62}{135}$ B. $\frac{4}{27}$ C. $\frac{10}{31}$ D. None of them

06. একটি পাতলা তারের দুই প্রান্তে সংযুক্ত 5 kg এবং 3 kg ভরের দুইটি বস্তু একটি পুলির উভয় পার্শ্বে অবাধে ঝুলছে 4 sec পর তারটি ছিঁড়ে গেল। হালকা ভরটি আর কতদূর উঠবে এবং আর কতক্ষণ পর যাত্রাস্থলে ফিরে আসবে?
A. $(\sqrt{5}+1)$sec B. $\sqrt{5}$ sec
C. $(\sqrt{5}-1)$sec D. None of them

07. ABCD আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA এবং AC রেখা বরাবর যথাক্রমে 3, 8, 7, 11 ও 5 একক বলসমূহ কার্যরত আছে। যদি AC = 10 একক ও BC = 6 একক হয় তবে বলগুলো দ্বারা সৃষ্ট যুগলের ভ্রামক এর মান কত হবে?
A. 106 unit B. $35\frac{1}{3}$ unit
C. 53 unit D. None of them

08. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x অক্ষের সাথে 30° কোন উৎপন্ন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
A. $\sqrt{3}\,y = x \pm 8$ B. $\sqrt{3}y = x - 8$
C. $y = \sqrt{3}\,x \pm 8$ D. None of them

09. $xy + x^2y^2 = C$ সমীকরণটির $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে?
A. $-\frac{x}{y}$ B. $\frac{x}{y}$ C. $\frac{y}{x}$ D. None of them

10. 100 থেকে 999 সংখ্যাগুলো মধ্যে যেসব সংখ্যায় 1টি জোড় ও 2টি বিজোড় অংশ আছে তাদের মোট সংখ্যা কত?
A. 150 B. 300 C. 200 D. None of them

11. যদি $\frac{3}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট একটি সরলরেখা $ax + 3y - 7 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে a এর মান হবে?
A. −2 B. 3 C. 2 D. None of them

12. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{49}{6}$ D. $\frac{6}{49}$

13. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় কোন সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে, তার ক্ষেত্রফল হবে?
A. $3\sqrt{3}$ বর্গ একক B. $5\sqrt{3}$ বর্গ একক
C. $5\sqrt{5}$ বর্গ একক D. $3\sqrt{5}$ বর্গ একক

14. 10 ft দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রশির এক প্রান্ত একটি খাড়া দেওয়ালের সাথে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত একটি মসৃন গোলকের উপরিস্থিত একটি বিন্দুতে সংযুক্ত রয়েছে। যদি গোলকটি দেওয়ালের সংস্পর্শে স্থিতিবস্থায় থাকে তবে রশির উপর টান কত হবে? ধর, গোলকটির ওজন 10000 lb ও ব্যাসার্ধ 3 ft.
A. 11277 lb B. 10000 lb
C. 10277 lb D. 9731 lb

15. $A + B + C = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হলে tanBtanC + tanCtanA + tanA tan B এর মান বের কর।
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C. 1 D. 1/2

16. $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta;\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর সমাধান বের কর।
A. π/3 B. π/6 C. π/2 D. π/4

17. $y^2 = 6x$ পরাবৃত্ত ও $y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল বের কর।
A. 256/3 sq. unit B. 128/3 sq. unit
C. 28/3 sq. unit D. 64/3 sq. unit

18. $(1 + x^2)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{4r} এর সহগ বের কর।
A. $2r(r+1)$ B. $(2r-1)(r-1)$
C. $(r+1)(2r-1)$ D. $(2r+1)(r+1)$

19. একটি বস্তু 39.2 m/sec বেগে ভূমির সাথে 30° কোনে নিক্ষিপ্ত হল। কত সময় পরে বস্তুটি নিক্ষেপ দিকের সাথে লম্বভাবে থাকবে?
A. 9 sec B. 6 sec
C. 7 sec D. 8 sec

20. $\int\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}dx$ এর মান বের কর।
A. $x - \frac{2}{3}(1 + e^{-3x}) + c$ B. $x + \frac{2}{3}(1 + e^{-3x}) + c$
C. $x + 2\log(1 + e^{-3x}) + c$ D. None of them

01.A	02.A	03.C	04.B	05.D	06.A	07.A	08.D	09.D	10.B
11.C	12.C	13.B	14.C	15.C	16.A	17.Blank	18.D	19.D	20.D

RUET Admission Test [2015-2016]

Mathematic

01. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অংকগুলো একবার মাত্র ব্যবহার করে গঠিত ও 5 দ্বারা অবিভাজ্য 7 অংক বিশিষ্ট সংখ্যাগুলো মানের উর্ধক্রমানুসারে সাজান হল। উক্ত তালিকায় 2000তম সংখ্যাটি কত? **Ans.** 4316527

02. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরনের মূলদ্বয় α ও β হলে $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$ এর মান নির্ণয় কর। **Ans.** $\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$

03. $y = \sqrt{x}$ থাকে (x,y) বিন্দুটির মান নির্ণয় কর যা (4, 0) বিন্দুর নিকটতম।
Ans. নির্ণেয় বিন্দুটি $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

04. মান নির্ণয় কর। $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\tan sx - \sin sx}{x^3}$, s > 0 **Ans.**

05. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার উপর স্পর্শকের স্পর্শক বিন্দুগুলো নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকসমূহ x- অক্ষের উপর লম্ব। **Ans.** বিন্দুগুলো (0,0), (−2a, 0)

06. x = b রেখাটি $y = (1-x)^2$, y = 0 এবং x = 0 দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে $R_1\ (0 \le x \le b)$ এবং $R_2\ (b \le x \le 1)$ অংশদ্বয়ে বিভক্ত করে যেখানে $R_1 - R_2 = \frac{1}{4}$, b এর মান নির্ণয় কর। **Ans.**

07. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **Ans.** −

08. সমাধান কর: $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta,\ [0 < \theta < \pi]$
Ans. $\theta = n\pi + (-1)^n\ldots$

09. বর্গমূল নির্ণয় কর: $\cos\theta + i\sin\theta,\ i = \sqrt{-1}$
Ans. নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{1+\cos\theta} + i\sqrt{1-\cos\theta}\right\}$

10. একটি বস্তু কনার সরণ $x(t) = t(3-2t)/2$। যে সময়ে বস্তুর বেগ ও সরণের সংখ্যামান সমান, তা নির্ণয় কর। বস্তুটির সময়, বেগ ও সরণের সংখ্যামান সমান হওয়ার সময়ও নির্ণয় কর। **Ans.** t = 3 বা ...